$2^η$ Θεματική Ενότητα : Άλγεβρα Boole και Λογικές Πύλες

Βασικοί Ορισμοί

<u>Δυαδικός Τελεστής</u> (Binary Operator): σε κάθε ζεύγος από το S αντιστοιχίζει ένα στοιχείο του S = set, σύνολο

Συνηθισμένα Αξιώματα (α, β, γ, 0)$\in$S, $\otimes$, $\bullet$ δυαδικοί τελεστές :

1. Κλειστότητα ως προς δυαδικό τελεστή: $α \otimes β \in S$
2. Προσεταιριστικός Νόμος: $(α \otimes β) \otimes γ = α \otimes (β \otimes γ)$
3. Αντιμεταθετικός Νόμος: $α \otimes β = β \otimes α$
4. Ουδέτερο Στοιχείο: $α \otimes 0 = 0 \otimes α = α$
5. Αντίστροφο: $α \otimes α' = 0$
6. Επιμεριστικός Νόμος: $α \bullet (β \otimes γ) = (α \bullet β) \otimes (α \bullet γ)$

Αξιωματικός Ορισμός Άλγεβρας Boole

Άλγεβρα Boole: είναι μία αλγεβρική δομή πάνω σε ένα σύνολο στοιχείων Β μαζί με τους δυαδικούς τελεστές +, •, αρκεί να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα (Huntigton) :

1. Κλειστή ως προς τους τελεστές +, • : $\alpha + \beta \in B$ $\alpha \bullet \beta \in B$
2. Αντιμεταθετική ως προς +, • : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$
3. Ουδέτερο Στοιχείο 0(+), 1(•): $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \bullet 1 = \alpha$
4. Συμπλήρωμα ως προς +, • : $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha \bullet \alpha' = 0$
5. Επιμεριστική ως προς +, • : $\alpha + (\beta \bullet \gamma) = (\alpha + \beta) \bullet (\alpha + \gamma)$, $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = (\alpha \bullet \beta) + (\alpha \bullet \gamma)$
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in B$ με $\alpha \neq \beta$.

Διαφορές με συνήθη Άλγεβρα

1. Τα αξιώματα Huntigton δεν περιλαμβάνουν τον προσεταιριστικό νόμο που όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει.
2. Ο επιμεριστικός νόμος του + ως προς τον • ισχύει για την άλγεβρα Boole αλλά όχι για την συνήθη άλγεβρα.
3. Η άλγεβρα Boole δεν έχει προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά αντίστροφα άρα δεν υπάρχει αφαίρεση - διαίρεση.
4. Το συμπλήρωμα δεν υπάρχει στην συνήθη άλγεβρα.
5. Η συνήθης άλγεβρα ασχολείται με το απειροσύνολο των πραγματικών. Η Boole έχει δύο στοιχεία, τα 0, 1.

Ανάλογα με την επιλογή των στοιχείων του Β και των κανόνων λειτουργίας των τελεστών μπορούμε να σχηματίσουμε πολλές άλγεβρες Boole.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole (1)

x	y	x΄	x.y	x+y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Η δίτιμη άλγεβρα Boole(2)

x	y	z	$y+z$	$x\cdot(y+z)$	$x\cdot y$	$x\cdot z$	$(x\cdot y)+(x\cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

1. Η κλειστότητα προφανώς ισχύει.
2. Τα ουδέτερα στοιχεία είναι 0 για το + και 1 για το • : (0+0=0, 0+1=1+0=1) και (1 • 1=1, 1 • 0=0 • 1=0)
3. Οι αντιμεταθετικοί νόμοι είναι προφανείς από την συμμετρία.
4. Ο επιμεριστικός νόμος φαίνεται από τον πίνακα
5. Από τον πίνακα συμπληρώματος έχουμε x+x΄=1: 0+0΄=0+1=1, 1+1΄=1+0=1 και x • x΄=0: 0 • 0΄=0 • 1=0, 1 • 1΄=1 • 0=0
6. Η άλγεβρα έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού 1≠0.

B={0, 1}

x	y	x΄	x.y	x+y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Βασικά θεωρήματα και ιδιότητες

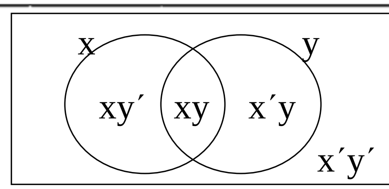
Δυϊσμός: Ότι ισχύει από τα αξιώματα Huntigton για το + (•) μπορεί να προκύψει από το • (+) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.

Μια αληθής αλγεβρική έκφραση παραμένει αληθής αν εναλλάξω τελεστές και ουδέτερα στοιχεία (ΚΑΙ-Η, 0-1)

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1
Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x + 0 = x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x + x' = 1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x + x = x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')' = x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x + y = y + x$	(b) $xy = yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(b) $x(yz) = (xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y + z) = xy + xz$	(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x + y)' = x'y'$	(b) $(xy)' = x' + y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x + y) = x$

Προτεραιότητα Τελεστών
1. Παρενθέσεις
2. Οχι
3. Και
4. Ή



ΟΧΙ ➔ NOT

ΚΑΙ ➔ AND

Η ➔ OR

Παραδείγματα

Απλοποιείστε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε έναν ελάχιστο αριθμό "παραγοντων".

1. $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$

2. $x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$

3. $x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$

4. $$\begin{aligned} xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z \end{aligned}$$

5. $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$ λόγω δυισμού από τη συνάρτηση 4.

Συμπλήρωμα συνάρτησης (De Morgan)

$(A + B + C)' = (A + X)'$	θέτουμε $B + C = X$
$= A'X'$	από το θεώρημα 5(α) (De Morgan)
$= A' \cdot (B + C)'$	αντικαθιστούμε $B + C = X$
$= A' \cdot (B'C')$	από το θεώρημα 5(α) (De Morgan)
$= A'B'C'$	από το θεώρημα 4(β) (προσεταιριστική)

Η γενικευμένη μορφή του θεωρήματος De Morgan λέει ότι το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να βγει εναλλάσσοντας τα ΚΑΙ με τα Ή και συμπληρώνοντας κάθε όρο (παράγοντα).

$$(A+B+C+D+\dots+F)' = A'B'C'D'\dots F'$$

$$(ABCD\dots F)' = A'+B'+C'+D'+\dots+F'$$

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές, παρενθέσεις και ένα ίσον.

F_1=xyz΄ είναι 1 μόνο αν x=y=1, z=0.

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

$F_1 = xyz'$

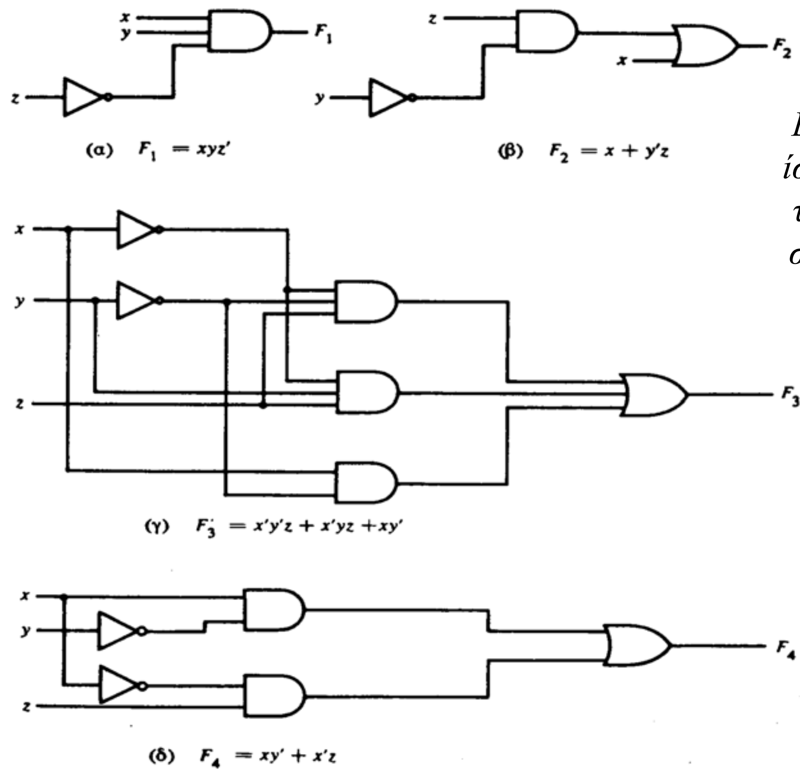
$F_2 = x+y'z$

$F_3 = x'y'z+x'yz+xy'$

$F_4 = xy'+x'z$

Η F_4 είναι ίδια με την F_3 $\Rightarrow$ Υπάρχουν πολλές εκφράσεις για μια συνάρτηση

Συναρτήσεις Boole



Εφόσον οι F_3, F_4 είναι ίσες και το κύκλωμα για την F_4 είναι μικρότερο συμφέρει να βρίσκουμε τις απλούστερες εκφράσεις με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών (ελαχιστοποίηση παραγόντων - όρων)

Κανονικές και Πρότυπες Μορφές

Minterm (Ελαχιστόρος) : Το ΚΑΙ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή xyzw, x΄yz΄w, xy΄zw.

Maxterm (Μεγιστόρος) : Το Η΄ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή x+y+z+w, x΄+y+z΄+w, x+y΄+z+w.

			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
x	y	z	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Για n μεταβλητές έχουμε 2^n ελαχιστόρους και μεγιστόρους. Οι μεταβλητές έχουν ανεστραμένες τιμές στους αντίστοιχους ελαχιστόρους / μεγιστόρους

Κανονικές Μορφές

Κάθε Ελαχιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου Μεγιστόρου και αντίστροφα, πχ m_0=xyz, M_0=x΄+y΄+z΄

Ιδιότητα: Οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ελαχιστόρων ή γινόμενο μεγιστόρων.

$$F_1 = x'y'z + xy'z' + xyz \quad \begin{cases} F_1 = m_1+m_4+m_7 \quad F_1' = m_0+m_2+m_3+m_5+m_6 \\ F_1' = M_1M_4M_7 \quad F_1 = M_0M_2M_3M_5M_6 \end{cases}$$

x	y	z	Συνάρτηση f_1	Συνάρτηση f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Μετατροπή μεταξύ Κανονικών Μορφών

Βήματα μετατροπής από άθροισμα ελαχιστόρων σε γινόμενο μεγιστόρων:

1. Εκφράζω την F σε άθροισμα ελαχιστόρων. Έστω F(A,B,C)=Σ(1,4,5,6,7).
2. Βρίσκω την F΄=Σ(0,2,3)=$m_0+m_2+m_3$.
3. Βρίσκω την F΄΄ ως εξής: F΄΄=$(m_0+m_2+m_3)'= m_0'm_2'm_3' = M_0M_2M_3$=Π(0,2,3)

Πίνακας Αληθείας για την $F = xy + x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

F(x,y,z)=Σ(1,3,6,7)

Π(x,y,z)=Π(0,2,4,5)

Πρότυπες Μορφές: Το γινόμενο αθροισμάτων και το άθροισμα γινομένων χωρίς την απαίτηση σε κάθε παράγοντα να είναι όλοι οι όροι.

Άλλες Λογικές Πράξεις

Υπάρχουν $(2^2)^n$ διαφορετικές συναρτήσεις n δυαδικών μεταβλητών.

Για n=2 έχουμε 16 διαφορετικές συναρτήσεις Boole.

Οι AND και OR είναι απλά 2 από τις 16.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Σύμβολο τελεστή			$\cdot$	$/$		$/$		$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\odot$	$'$	$\subset$	$'$	$\supset$	$\uparrow$	

Κατηγορίες Συναρτήσεων:

1. Δυο σταθερές 0, 1,.
2. Τέσσερις unary συμπληρώματος/μεταφοράς
3. Δέκα συναρτήσεις με δυαδικούς τελεστές.

Άλλες Λογικές Πράξεις

Εκφράσεις Boole για τις 16 συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Συναρτήσεις Boole	Σύμβολο τελεστή	Όνομα	Σχόλια
$F_0 = 0$		Ουδέτερη	Δυαδική σταθερά 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	ΚΑΙ (AND)	x ΚΑΙ y
$F_2 = xy'$	x/y	Αποτροπή	x αλλά όχι y
$F_3 = x$		Μεταφορά	x
$F_4 = x'y$	y/x	Αποτροπή	y αλλά όχι x
$F_5 = y$		Μεταφορά	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Αποκλειστικό- Ή	x Ή y αλλά όχι και τα δύο
$F_7 = x + y$	$x + y$	Ή (OR)	x Ή y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	ΟΥΤΕ (NOR)	ΟΧΙ- Ή
$F_9 = xy + x'y'$	$x \odot y$	Ισοδυναμία*	x ίσον y
$F_{10} = y'$	y'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Συνεπαγωγή	Αν y τότε x
$F_{12} = x'$	x'	Συμπλήρωμα	ΟΧΙ x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Συνεπαγωγή	Αν x τότε y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND (ΟΧΙ-ΚΑΙ)	ΟΧΙ-ΚΑΙ
$F_{15} = 1$		Ταυτότητα	Δυαδική σταθερά 1

* Η ισοδυναμία ("equivalence") λέγεται επίσης και "ισότητα" ("equality"), "σύμπτωση" ("coincidence") ή "αποκλειστικό-ΟΥΤΕ" ("exclusive NOR").

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

Όνομα	Γραφικό Σύμβολο	Αλγεβρική Συνάρτηση	Πίνακας Αληθείας
AND ΚΑΙ		$F = xy$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR Ή		$F = x + y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Αντιστροφέας		$F = x'$	x | F 0 | 1 1 | 0
Απομονωτής		$F = x$	x | F 0 | 0 1 | 1

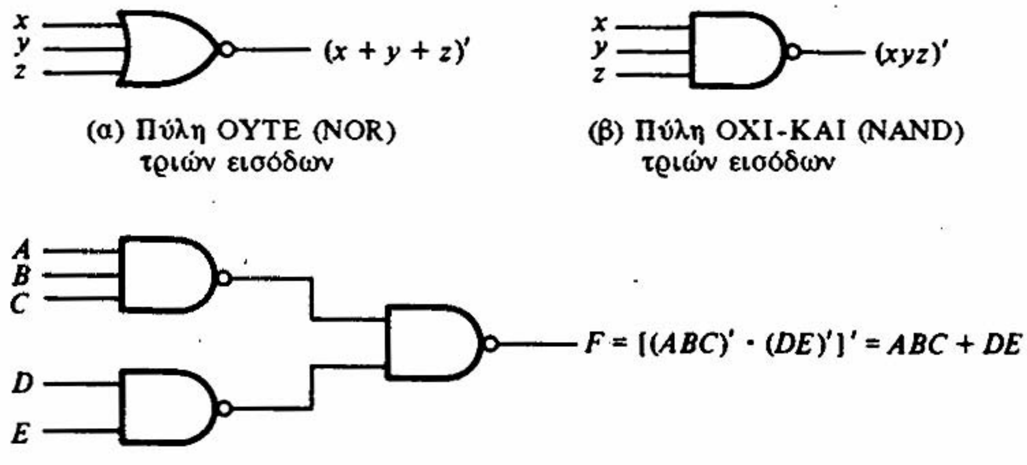
Ψηφιακές Λογικές Πύλες

Όνομα	Γραφικό Σύμβολο	Αλγεβρική Συνάρτηση	Πίνακας Αληθείας
NAND ΟΧΙ-ΚΑΙ		$F = (xy)'$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR ΟΥΤΕ		$F = (x + y)'$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
XOR Αποκλειστό-Ή		$F = xy' + x'y$ $= x \oplus y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
Ισοδυναμία ή Αποκλειστικό -ΟΥΤΕ		$F = xy + x'y'$ $= x \odot y$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πύλες εκτός από αντιστρ./απομων. μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους. Βασική προϋπόθεση να είναι αντιμεταθετικές-επιμεριστικές.

Η πράξεις ΌΧΙ-ΚΑΙ και ΟΥΤΕ είναι αντιμεταθετικές αλλά όχι επιμεριστικές. Για αυτό τις ορίζω ως: x↓y↓z=(x+y+z)΄, x↑y↑z=(xyz)΄



(α) Πύλη ΟΥΤΕ (NOR) τριών εισόδων

(β) Πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ (NAND) τριών εισόδων

(γ) Πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ σε σειρά

Οι πύλες Αποκλειστικό Ή με περισσότερες από δύο εισόδους είναι σπάνιες κατασκευαστικά (πύλες 2 εισόδων σε σειρά).

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

Chips:
- Συλλογή από πύλες διασυνδεδεμένες στο κύκλωμα
- Κεραμικό ή πλαστικό περίβλημα
- Ακροδέκτες (pins)

Επίπεδα Ολοκλήρωσης

Μικρής Κλίμακας **SSI**: 10 πύλες / chip

Μεσαίας Κλίμακας **MSI**: 10-100 πύλες / chip

Μεγάλης Κλίμακας **LSI**: 100 - μερικές χιλάδες πύλες / chip

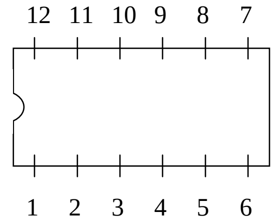
Πολύ Μεγάλης Κλίμακας **VLSI**: <1.000.000 πύλες / chip

Πάρα Πολύ Μεγάλης Κλίμακας **ULSI**: >1.000.000 πύλες / chip

Οικογένειες Chips:
- TTL Transistor-Transistor Logic: Πρότυπη Λογική Οικογ.
- ECL Emitter-Coupled Logic: Υψηλή Ταχύτητα Λειτουργίας.
- MOS Metal Oxide Semiconductor: Υψηλή Πυκνότητα.
- CMOS Complementary MOS: Χαμηλή Κατανάλωση.

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

Χαρακτηριστικά
- Ικανότητα Οδήγησης
- Κατανάλωση Ισχύος
- Καθυστέρηση Διάδοσης
- Περιθώριο Θορύβου



TTL 5400: Πλατιά ζώνη θερμοκρασιών (Στρατιωτική Χρήση)

TTL 7400: Βιομηχανικές εφαρμογές

Διάφορες Σειρές της Λογικής Οικογένειας TTL

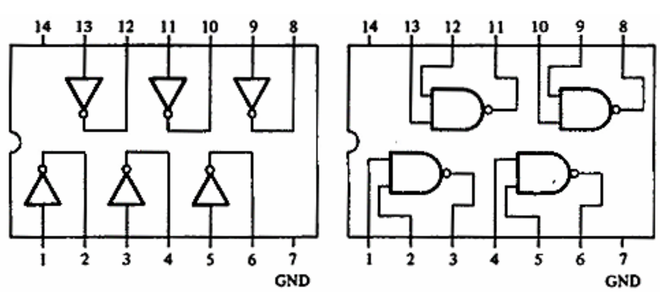
Σειρές TTL	Πρόθεμα	Παράδειγμα
Standard TTL	74	7486
Υψηλής ταχύτητας TTL	74H	74H86
Χαμηλής ισχύος TTL	74L	74L86
Schottky TTL	74S	74S86
Χαμηλής ισχύος Schottky TTL	74LS	74LS86
Προηγμένα Schottky TTL	74AS	74AS86
Προηγμένα Χαμηλής Ισχύος Schottky TTL	74ALS	74ALS86

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-10

Διάφορες Σειρές της Λογικής Οικογένειας CMOS

Σειρές CMOS	Πρόθεμα	Παράδειγμα
Κλασικά CMOS	40	4009
Συμβατά σε Pins με TTL	74C	74C04
Υψηλής ταχύτητας και συμβατά σε pins με TTL	74HC	74HC04
Υψηλής ταχύτητας και ηλεκτρικά συμβατά με TTL	74HCT	74HCT04

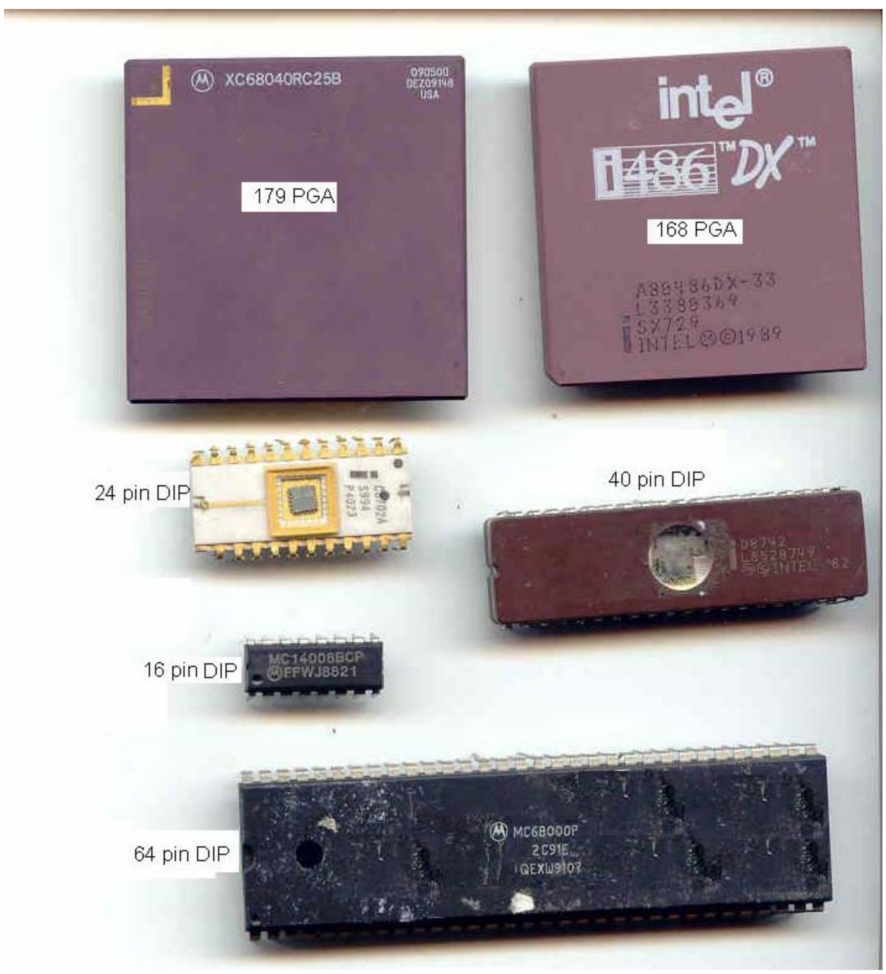


7404: έξι αντιστροφείς

7400: τέσσερις πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ 2-εισόδων


4836035AAA
MALAY LX 849
7548
Philippines

25


XC68040RC25B
179 PGA
intel
i486 DX
168 PGA
A80486DX-33
INTEL 1989
24 pin DIP
40 pin DIP
16 pin DIP
MC14008BCP
64 pin DIP
MC68000P

26