$3^η$ Θεματική Ενότητα : Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Η Μέθοδος του Χάρτη

Η Αλγεβρική Έκφραση μίας συνάρτησης δεν είναι μοναδική. Στόχος η εύρεση της μικρότερης. Απαιτείται συστηματική μέθοδος.

m_0	m_1
m_2	m_3

x \ y	0	1
0	x΄y΄	x΄y
1	xy΄	xy

x \ y	0	1
0		
1		1

xy

x \ y	0	1
0		1
1	1	1

x+y

Κώδικας Gray

x \ yz	00	01	11	10
0	x΄y΄z΄	x΄y΄z	x΄yz	x΄yz΄
1	xy΄z΄	xy΄z	xyz	xyz΄

Κάθε δύο γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε μία μεταβλητή (κανονική/ συμπληρ.)

⇩

Διαγραφή μεταβλητής και απλοποίηση αθροίσματος

Πχ. m_5+m_7 = xy΄z+xyz = xz(y΄+y) = xz

F(x,y,z)=Σ(2,3,4,5)

x \ yz	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

F(x,y,z)=x΄y+xy΄

Χάρτης Τεσσάρων Μεταβλητών

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

wx \ yz	00	01	11	10
00	w′x′y′z′	w′x′y′z	w′x′yz	w′x′yz′
01	w′xy′z′	w′xy′z	w′xyz	w′xyz′
11	wxy′z′	wxy′z	wxyz	wxyz′
10	wx′y′z′	wx′y′z	wx′yz	wx′yz′

(y: columns 11, 10; x: rows 01, 11; w: rows 11, 10)

Κάθε 2^n γειτονικά τετράγωνα διαφέρουν σε n μεταβλητές

Η πάνω ακμή ακουμπάει στην κάτω και η δεξιά στην αριστερή (γειτονικότητα)

F(w,x,y,z)=Σ(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)

F(w,x,y,z)=y´+w´z´+xz´

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1		

Prime Implicants

Prime Implicant: ένα γινόμενο παραγόντων που σχηματίζεται συνδυάζοντας τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό γειτονικών τετραγώνων.

Ουσιώδης Prime Implicant: όταν καλύπτει ένα ελαχιστόρο που δεν καλύπτει κανένας άλλος prime implicant

F(A, B, C, D)=Σ(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

(C: columns 11, 10; D: columns 01, 11; B: rows 01, 11; A: rows 11, 10)

Ουσ. PI: BD, B´D´

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

(C: columns 11, 10; D: columns 01, 11; B: rows 01, 11; A: rows 11, 10)

PI: CD, B´C, AD, AB´

m_3: CD, B´C

m_9: AD, AB´

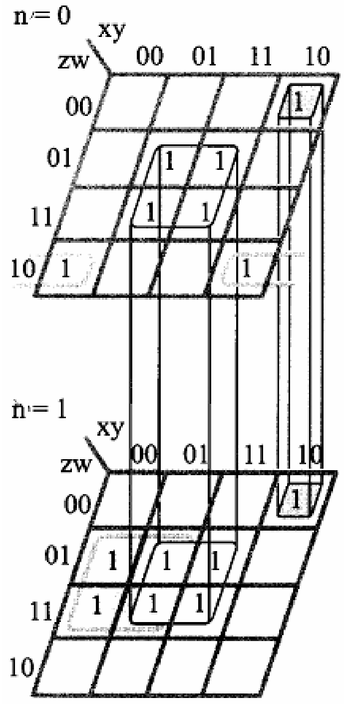
m_{11}: CD, B´C, AD, AB´

F=(BD+B´D´)+

(CD+AD) or (CD + AB´) or

(B´C+ AD) or (B´C+AB´)

Χάρτης 5 μεταβλητών



A = 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

A = 1

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

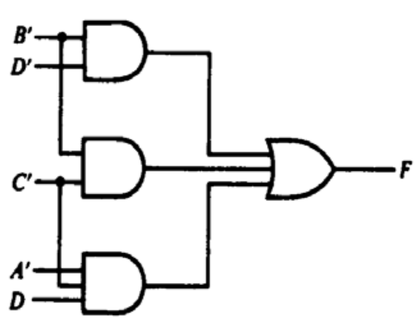
Απλοποίηση Γινομένων Αθροισμάτων

Φτιάχνουμε τον χάρτη της F, συνδυάζουμε τα 0 για την F΄, αντιστρέφουμε την F΄ με το θεώρημα De Morgan

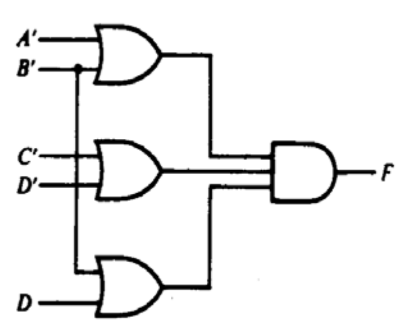
F(A,B,C,D)=Σ(1,2,5,8,9,10), F=B΄D΄+B΄C΄+A΄C΄D΄

F΄=AB+CD+BD΄, F=(A΄+B΄)(C΄+D΄)(B΄+D)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1



(α) $F = B'D' + B'C' + A'C'D$



(β) $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

Γινομένα Αθροισμ./Αθροίσματα Γινομένων

Η διαδικασία αυτή ισχύει είτε η F δίνεται ως άθροισμα ελαχιστόρων είτε ως γινόμενο μεγιστόρων.

Έστω $F(x,y,z)=\Pi(0,2,5,7)=M_0M_2M_5M_7=(x+y+z)(x+y'+z)(x'+y+z')(x'+y'+z')$

Τότε σύμφωνα με τα γνωστά $F=\Sigma(1,3,4,6)$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

$F=x'z+xz'$

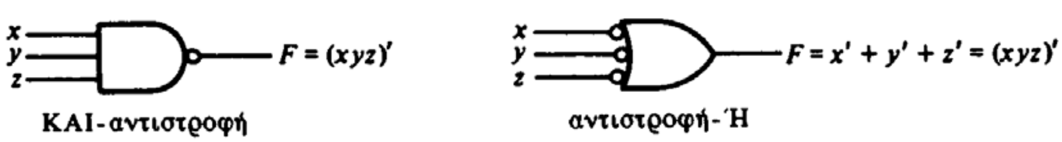
$F'=xz+x'z'$ ή $F=(x'+z')(x+z)$

Άσσοι: ελαχιστόροι

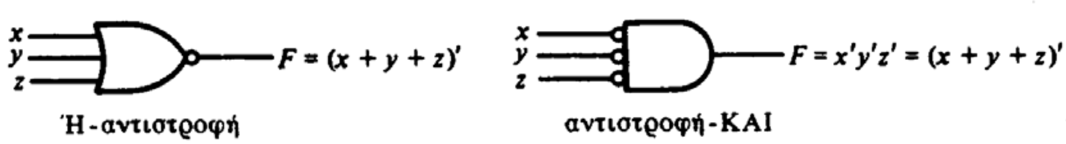
Μηδενικά: μεγιστόροι

Υλοποίηση με πύλες Όχι-Και & Ούτε

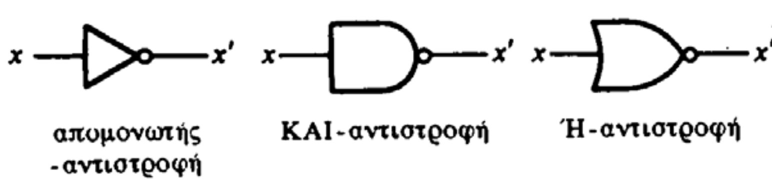
Οι πύλες Όχι-Και & Ούτε χρησιμοποιούνται πολύ συχνότερα από τις Και, Ή γιατί κατασκευάζονται ευκολότερα.



(α) Δύο σύμβολα για πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ



(β) Δύο σύμβολα για πύλες ΟΥΤΕ

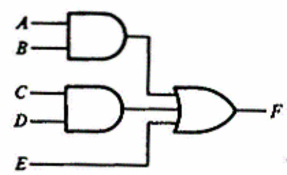


(γ) Τρία σύμβολα για αντιστροφείς

Υλοποίηση με πύλες Όχι-Και

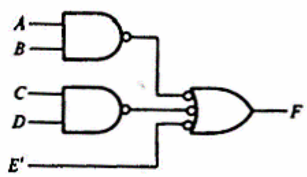
Πρέπει η F να είναι απλοποιημένη σε άθροισμα γινομένων.

1. Απλοποιούμε την συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων
2. Σχεδιάζουμε μια πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ για κάθε όρο γινομένου με >1 παράγοντες
3. Σχεδιάζουμε μία πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ στο δεύτερο επίπεδο
4. Όροι με έναν παράγοντα χρησιμοποιούν αντιστροφέα

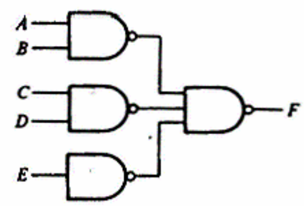


(α) ΚΑΙ-Ή (AND-OR)

<u>Παράδειγμα</u>. Υλοποίηση της συνάρτησης F=AB+CD+E με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ



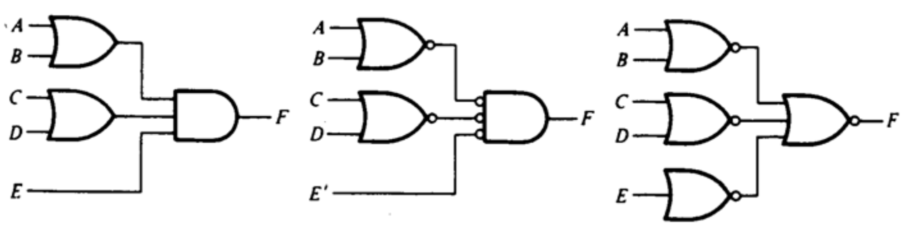
(β) ΟΧΙ ΚΑΙ-ΟΧΙ ΚΑΙ (NAND-NAND)



(γ) ΟΧΙ ΚΑΙ-ΟΧΙ ΚΑΙ (NAND-NAND)

Υλοποίηση με πύλες ΟΥΤΕ

Η συνάρτηση ΟΥΤΕ είναι το δυϊκό της ΌΧΙ-ΚΑΙ και άρα οι κανόνες μετατροπής είναι δυϊκοί

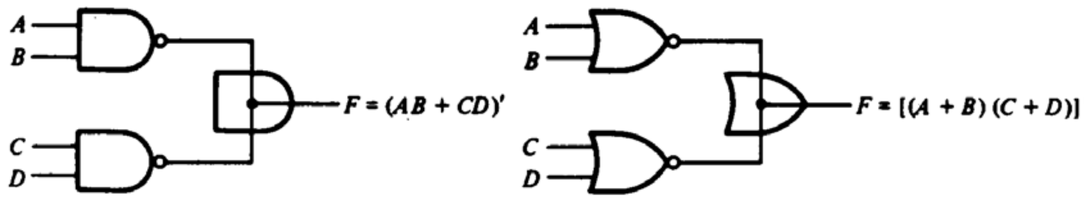


(α) Ή-ΚΑΙ (OR-AND) (β) ΟΥΤΕ-ΟΥΤΕ (NOR-NOR) (γ) ΟΥΤΕ-ΟΥΤΕ (NOR-NOR)

ΣΧΗΜΑ 3-20
Τρεις τρόποι για την υλοποίηση της $F = (A + B)(C + D)E$

Πρέπει η F να είναι απλοποιημένη σε γινόμενο αθροισμάτων.

Άλλες Διεπίπεδες Υλοποιήσεις



(α) Καλωδιωμένο-ΚΑΙ με πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ, TTL, ανοιχτού συλλέκτη

(AND-OR-INVERT)

(β) Καλωδιωμένο-Ή με πύλες ECL

(OR-AND-INVERT)

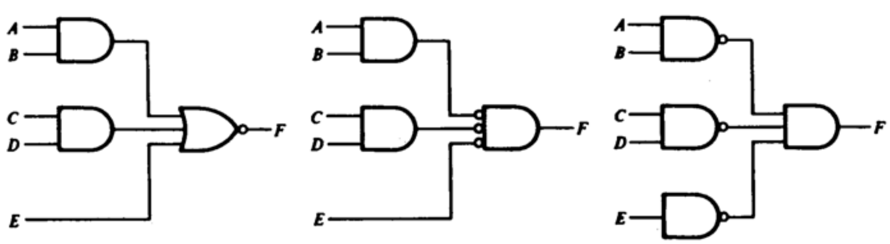
ΣΧΗΜΑ 3-22
Καλωδιωμένη λογική

Όλες οι δυνατές λογικές πράξεις είναι οι ΚΑΙ, Η, ΌΧΙ-ΚΑΙ, ΟΥΤΕ. Άρα έχουμε 16 δι-επίπεδες υλοποιήσεις, οι 8 εκφυλισμένες:

ΚΑΙ-Η	Η-ΚΑΙ
ΌΧΙ ΚΑΙ-ΌΧΙ ΚΑΙ	ΟΥΤΕ-ΟΥΤΕ
ΟΥΤΕ-Η	ΌΧΙ ΚΑΙ-ΚΑΙ
Η-ΌΧΙ ΚΑΙ	ΚΑΙ-ΟΥΤΕ

ΚΑΙ-ΟΥΤΕ ⇒ ΌΧΙ ΚΑΙ-ΚΑΙ

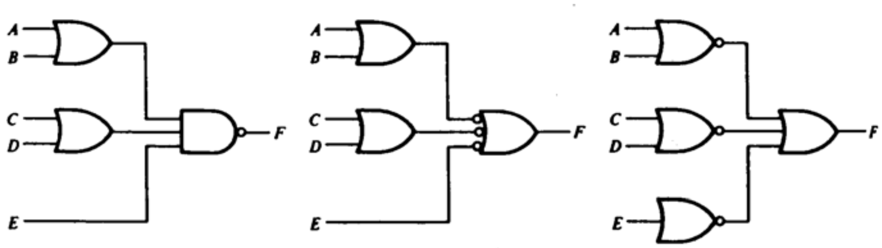
ΚΑΙ-ΟΥΤΕ ⇒ ΌΧΙ ΚΑΙ-ΚΑΙ: F=(AB+CD+E)΄=(AB)΄(CD)΄E΄



(α) ΚΑΙ-ΟΥΤΕ (AND-NOR) (β) ΚΑΙ-ΟΥΤΕ (AND-NOR) (γ) ΟΧΙ-ΚΑΙ (NAND-AND)

ΣΧΗΜΑ 3-23
Κυκλώματα ΚΑΙ-Ή-ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Η-ΌΧΙ ΚΑΙ ⇒ ΟΥΤΕ Η: F=(A+B)(C+D)E)΄=(A+B)΄+(C+D)΄+E΄



(α) Ή-ΟΧΙ-ΚΑΙ (OR-NAND) (β) Ή-ΟΧΙ-ΚΑΙ (OR-NAND) (γ) ΟΥΤΕ-Ή (NOR-OR)

ΣΧΗΜΑ 3-24
Κυκλώματα Ή-ΚΑΙ-ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ:
$F = [(A + B)(C + D)E]'$

Συνθήκες Αδιαφορίας

Συμβολίζονται με X και αντιστοιχούν σε συνδυασμούς εισόδων που δεν ορίζονται για μία συνάρτηση.

Π.χ. F(w,x,y,z)=Σ(1,3,7,11,15) με συνθήκες αδιαφορίας 0,2,5

wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$F=yz+w'x'=\Sigma(\underline{0},1,\underline{2},3,7,11,15)$

wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$F=yz+w'z=\Sigma(1,3,\underline{5},7,11,15)$

Οι αδιάφοροι όροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως άσσοι ή μηδενικά ανάλογα με την απλοποίηση που οδηγεί στο μικρότερο κύκλωμα

Μέθοδος Κατάταξης σε Πίνακα

Ο χάρτης είναι βολικός για μικρό αριθμό μεταβλητών (5-6) και βασίζεται στην επιλογή με το μάτι.

Η μέθοδος κατάταξης σε πίνακα είναι αλγοριθμική (βήματα) και αυτοματο-ποιήσιμη για υλοποίηση σε υπολογιστή (Quine-McCluskey).

Βήματα:

- Ομαδοποίηση δυαδικών αναπαρ. ελαχιστόρων με βάση αριθμό άσσων
- Συνδυασμός ελαχιστόρων που διαφέρουν σε μία μόνο μεταβλητή (απαλοιφή της μεταβλητής) και μαρκάρισμα χρησιμοποιημένων
- Οι μη μαρκαρισμένοι συνδυασμοί αποτελούν τους Prime Implicants το άθροισμα των οποίων δίνει την ελαχιστοποιημένη (?) συνάρτηση

Όταν το άθροισμα των Prime Implicants δεν δίνει την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή με αλγόριθμο.

Μέθοδος Κατάταξης σε Πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ 3-5
Εύρεση των Prime Implicants για το Παράδειγμα 3-13

(α)

	wx yz	
0	0 0 0 0	✓
1	0 0 0 1	✓
2	0 0 1 0	✓
8	1 0 0 0	✓
10	1 0 1 0	✓
11	1 0 1 1	✓
14	1 1 1 0	✓
15	1 1 1 1	✓

(β)

	wx yz	
0,1	0 0 0 –	
0,2	0 0 – 0	✓
0,8	– 0 0 0	✓
2,10	– 0 1 0	✓
8,10	1 0 – 0	✓
10,11	1 0 1 –	✓
10,14	1 – 1 0	✓
11,15	1 – 1 1	✓
14,15	1 1 1 –	✓

(γ)

	wx yz
0,2,8,10	– 0 – 0
0,8,2,10	– 0 – 0
10,11,14,15	1 – 1 –
10,14,11,15	1 – 1 –

F=Σ(0,1,2,8,10,11,14,15)

F=w´x´y´+x´z´+wy

Επιλογή των Prime Implicants

Πίνακας των Prime-Implicants για το Παράδειγμα 3-15

		1	4	6	7	8	9	10	11	15
$x'y'z$	1,9	X					X			
$w'xz'$	4,6		X	X						
$w'xy$	6,7			X	X					
xyz	7,15				X					X
wyz	11,15								X	X
wx'	8,9,10,11					X	X	X	X	

Στόχος: Η επιλογή των ελάχιστων Prime Implicants που καλύπτουν όλους τους ελαχιστόρους

Οι Prime Implicants που καλύπτουν ελαχιστόρους που δεν καλύπτονται από άλλους ελαχιστόρους ονομάζονται Ουσιώδεις Prime Implicants και πρέπει να συμπεριληφθούν οπωσδήποτε