

**Προσεγγίσεις μαθητών στην εγγραφή μιας κλάσης ισοδυνάμων τριγώνων σε ορθογώνιο  
και μελέτη της σχέσης επιφάνειας και περιμέτρου τους  
με τη χρήση εργαλείων του Cabri-Geometry II**

Μαρία Κορδάκη<sup>1</sup> και Αθανασία Μπαλωμένου<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Τμήμα Μηχ/κών Ηλ/κών Υπολογιστών & Πληροφορικής  
Παν/μίου Πατρών, EAITY, e-mail: kordaki@cti.gr

<sup>2</sup> Μαθηματικό τμήμα Παν/μίου Πατρών, e-mail: smpalomenou@in.gr

Λέξεις κλειδιά: Cabri-Geometry II, Διατήρηση της επιφάνειας, ισοδύναμα τρίγωνα, επιφάνεια και  
περίμετρος, Β/μια εκπ/ση

## Προσεγγίσεις μαθητών στην εγγραφή μιας κλάσης ισοδυνάμων τριγώνων σε ορθογώνιο και μελέτη της σχέσης επιφάνειας και περιμέτρου τους με τη χρήση εργαλείων του Cabri-Geometry II

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται προσεγγίσεις μαθητών των τριών τάξεων Γυμνασίου στις έννοιες της διατήρησης της επιφάνειας μιας κλάσης ισοδυνάμων τριγώνων εγγεγραμμένων καθώς και στη σχέση μεταξύ της επιφάνειας και της περιμέτρου τους. Οι μαθητές κλήθηκαν να φέρουν σε πέρας μια δραστηριότητα της καθημερινής ζωής χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του εκπ/κού λογισμικού Cabri-Geometry II (Laborde, 1990). Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας φαίνεται ότι όλοι οι μαθητές ολοκλήρωσαν την παραπάνω δραστηριότητα χρησιμοποιώντας τουλάχιστον μια σωστή στρατηγική επίλυσης. Οι μαθητές προσέγγισαν τις παραπάνω έννοιες ξεκινώντας από την μελέτη τριγώνων που τους ήταν ήδη γνωστά όπως ισοσκελή ή ορθογώνια τρίγωνα με βάση μια πλευρά ενός ορθογωνίου και τρίτη κορυφή σημαντικά και γνωστά σημεία της απέναντι πλευράς του, όπως το μέσο και τα άκρα της. Στη συνέχεια ορισμένοι μαθητές προχώρησαν στην προσέγγιση αυτών των εννοιών σε περιορισμένο αριθμό τριγώνων που κατασκεύαζαν με τον ίδιο τρόπο αλλά η τρίτη τους κορυφή ήταν τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς του ορθογωνίου, ενώ άλλοι προχώρησαν στη μελέτη μιας απειρίας τριγώνων τα οποία κατασκεύαζαν με τη χρήση της άμεσης διαχείρισης υπολογιστικών αντικειμένων (drag-mode). Επιπλέον, εργαλεία χρησιμοποιήθηκαν όπως: το εργαλείο 'πολύγωνο', οι άξονες, το πλέγμα, και η αυτόματη μέτρηση επιφάνειας και μήκους σε συνδυασμό με την αυτόματη πινακοποίηση αριθμητικών δεδομένων. Όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να προσδιορίσουν τη σχέση της επιφάνειας των ισοδυνάμων τριγώνων με την επιφάνεια του ορθογωνίου. Οι περισσότεροι μπόρεσαν επίσης να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου στα τρίγωνα, καθώς και να επιλέξουν το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο.

### ABSTRACT

*In this study we present students' approaches regarding the concept of conservation of area in one class of equivalent triangles that are enrolled in a rectangle. Furthermore, we present students' approaches regarding the relationship between area and perimeter of these equivalent triangles. Students were asked to develop solution strategies in an everyday-life activity, using the tools of Cabri-Geometry II (Laborde, 1990). The analysis of the data shows that all students were actively involved in this activity and each student constructed more than one correct solution strategy. Most of the students started by constructing specific known triangles such as isosceles and right-angled triangles. These triangles had as a base one side of the rectangle and as third vertex specific known-points of the opposite side of the rectangle such as the middle point and the vertices that represent the edges of this side. Some students went on by constructing triangles that had as base one side of the rectangle and as third vertex a random point of the opposite side of the rectangle. Other students progressed in the construction of abundant triangles, using the 'drag mode' operation provided by Cabri. All the students succeeded in defining the relationship between the area of the equivalent triangles that they constructed and the area of the rectangle. Here, the role of the provided tools for automatic measurement of area and length as well as the automatic tabulation of numerical data was essential. Moreover, most of the students used these tools managing to discriminate the difference between the area and the perimeter of a triangle and to select the triangle with the smallest perimeter among all the equivalent triangles that they had constructed.*

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας είναι βασική και πρωταρχική προκειμένου για την κατανόηση της έννοιας της μέτρησης της επιφάνειας (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981; Hirstein, Lamb & Osborne, 1978; Maher & Beattys, 1986). Διατήρηση της επιφάνειας σημαίνει ότι ένα επίπεδο σχήμα δύναται να διατηρεί την επιφάνειά του ενώ αλλάζει μορφή (Piaget, et al., 1981). Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας διαφορετικών σχημάτων αλλά και σχημάτων της ίδιας μορφής (Johnson, 1986). Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές φαίνεται να συγκρίνουν επιφάνειες στηριζόμενοι στην οπτική τους αντίληψη (Carpenter, 1976; Kordaki & Potari, 2002) ενώ άλλες φορές επικεντρώνονται στην περίμετρο των επιπέδων σχημάτων προκειμένου να κάνουν συγκρίσεις των επιφανειών τους (Hart, 1989; Kidman & Cooper, 1997). Η κατανόηση της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας έχει συνδεθεί με τη μορφή των σχημάτων που μελετώνται κάθε φορά (Johnson, 1986). Για παράδειγμα, οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν τη δυνατότητα της διατήρησης της επιφάνειας περισσότερο σε παραλληλόγραμμα ενώ εμφανίζουν περισσότερες δυσκολίες όταν πρόκειται για τρίγωνα. Στην περίπτωση των ισοδυνάμων τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη οι μαθητές επικεντρώνονται στην περίμετρο των σχημάτων ενώ ελάχιστοι αναγνωρίζουν τα ίσα στοιχεία τους (Kordaki, 2003).

Η κατανόηση της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας έχει επίσης συνδεθεί με το πλαίσιο συμφραζομένων στο οποίο συντελείται η μάθηση (Kordaki, 2003) και ειδικότερα με το είδος των εργαλείων που διατίθενται στους μαθητές τα οποία φαίνεται να παίζουν σημαντικό ρόλο στις στρατηγικές επίλυσης που κατασκευάζουν (Nunes, Light & Mason, 1993; Kordaki & Potari, 2002). Ο ρόλος της άμεσης διαχείρισης 'drag mode' των γεωμετρικών σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή έχει αναγνωριστεί ως ιδιαίτερα σημαντικός λόγω του ότι δίνει τη δυνατότητα οπτικοποίησης μιας απειρίας σχημάτων τα οποία διατηρούν βασικές ιδιότητες (Noss & Hoyles, 1996; Mariotti, 1995). Μελετώντας αυτή την απειρία σχημάτων οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διατυπώσουν εικασίες για τις κοινές ιδιότητες των σχημάτων αυτών και να προχωρήσουν σε γενικεύσεις.

Το περιβάλλον Cabri-Geometry II παρέχει τη δυνατότητα της άμεσης διαχείρισης 'drag mode' των γεωμετρικών σχημάτων που σχεδιάζονται με τη βοήθεια των εργαλείων που παρέχει στους μαθητές. Επιπλέον, διαθέτει μια ποικιλία εργαλείων με την οποία μπορεί να μελετηθεί μεγάλο μέρος γεωμετρικών εννοιών πχ. Μεσοκάθετοι, ύψη, διχοτόμοι κα. Παρέχονται επίσης εργαλεία αυτόματης μέτρησης επιφανειών και μηκών όπως και δυνατότητες αυτόματης πινακοποίησης αυτών των μεγεθών για κάθε σχήμα που δημιουργείται με τη χρήση της λειτουργίας της άμεσης διαχείρισης των σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή. Έτσι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν τα αριθμητικά δεδομένα που παράγονται με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως και να διατυπώσουν εικασίες, γενικεύσεις και συμπεράσματα.

Παρόλο που μέσα από την έρευνα έχει φανεί η δυνατότητα που παρέχει στους μαθητές ο ηλεκτρονικός υπολογιστής για πειραματισμό με πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας (Noss & Hoyles, 1996; Borba & Confrey, 1996; Kordaki & Potari, 2002, Kordaki, 2003), η προσέγγιση της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας μιας κλάσης τριγώνων εγγεγραμμένων σε ορθογώνιο από μαθητές με τη χρήση των εργαλείων του Cabri-Geometry II, καθώς και της σχέσης επιφάνειας και περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων δεν έχει έως τώρα μελετηθεί από ερευνητές.

Στην παρούσα έρευνα, μελετάμε την επίδραση των εργαλείων του Cabri-Geometry II στις στρατηγικές επίλυσης που κατασκευάζουν οι μαθητές για την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε τρίγωνα και τις αντιλήψεις τους για τη σχέση επιφάνειας και περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων μέσα από μια δραστηριότητα της καθημερινής ζωής. Ειδικότερα, μελετώνται:

- Οι στρατηγικές επίλυσης που κατασκευάζουν οι μαθητές για τη διατήρηση της επιφάνειας μιας κλάσης τριγώνων εγγεγραμμένων σε ορθογώνιο όπως και για τη σχέση επιφάνειας και περιμέτρου τους
- Ο ρόλος των εργαλείων του Cabri-Geometry II στις στρατηγικές επίλυσης των μαθητών.

## ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα μελέτη είναι μια ποιοτική μελέτη (Cohen & Manion, 1989) η οποία στοχεύει να διερευνήσει τις προσεγγίσεις των μαθητών στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μιας κλάσης τριγώνων εγγεγραμμένων σε ορθογώνιο όπως και για τη σχέση επιφάνειας και περιμέτρου τους με τη χρήση εργαλείων του Cabri-Geometry II. Αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας για την κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων από μαθητές με τη χρήση εργαλείων του Cabri-Geometry II. Κατά τη διάρκεια της έρευνας αυτής δόθηκαν στους μαθητές πέντε δραστηριότητες να φέρουν σε πέρας. Στην παρούσα εργασία συζητιέται η μία μόνον από αυτές.

*Η δραστηριότητα.* Οι μαθητές κλήθηκαν να φέρουν σε πέρας μια δραστηριότητα της καθημερινής ζωής χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του εκπ/κού λογισμικού Cabri-Geometry II. Συγκεκριμένα, ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν σε ένα ανεκμετάλλευτο χώρο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 10 μέτρα μήκος και 4 μέτρα πλάτος, στο προαύλιο του σχολείου τους, όσο πιο πολλά τριγωνικά παρτέρια μπορούν τα οποία να έχουν βάση τη μια πλευρά του ορθογωνίου και κορυφή τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς του. Στη συνέχεια, οι μαθητές θα έπρεπε να επιλέξουν ποιο τριγωνικό παρτέρι τους συμφέρει να κατασκευάσουν, έτσι ώστε όταν το περιφράξουν με συρματοπλέγμα να έχουν το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η παραπάνω δραστηριότητα επιλέχθηκε ώστε να δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν τις δικές τους προσεγγίσεις στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μιας κλάσης τριγώνων εγγεγραμμένων σε ορθογώνιο

όπως και για τη σχέση επιφάνειας και περιμέτρου τους. Ζητώντας από τους μαθητές να βρουν όσο περισσότερες λύσεις μπορούν, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκφράσουν διαφορετικές αντιλήψεις για τις έννοιες που μελετούν και να αποκτήσουν μια πιο διευρυμένη αντίληψη σχετικά με αυτές τις έννοιες (Kordaki, 2003).

*Το πείραμα.* Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο Γυμνάσιο Πανόπουλου Ν.Ηλείας, με 25 συνολικά μαθητές και στις 3 τάξεις του Γυμνασίου (8 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, 9 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου και 8 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου). Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 2 ή 3 ατόμων και αρχικά είχαν την ευκαιρία να εξοικειωθούν με βασικές λειτουργίες ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή (άνοιγμα, κλείσιμο του υπολογιστή, χρήση του Word και δημιουργία, αποθήκευση και εκτύπωση αρχείων). Αυτό έγινε στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου που αποτελείται από τρεις ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Στη συνέχεια, οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τη χρήση όλων των εργαλείων του Cabri II εκτός από εκείνα που αφορούν στα διανύσματα, στους γεωμετρικούς τόπους, στην ομοιοθεσία και στις μακροκατασκευές. Στη φάση αυτή χρησιμοποιήθηκε μόνον ένας υπολογιστής γιατί μόνο σε αυτόν υπήρχε η δυνατότητα να εγκατασταθεί το Cabri-Geometry II και οι ομάδες των μαθητών εργάστηκαν κυκλικά. Η φάση της εξοικείωσης με το περιβάλλον του υπολογιστή όπως και με το περιβάλλον του Cabri-Geometry II διήρκεσε περίπου 2 μήνες από 2 ώρες την εβδομάδα για κάθε ομάδα μαθητών (1 μήνας για κάθε περιβάλλον). Μετά την ολοκλήρωση της φάσης εξοικείωσης οι μαθητές αντιμετώπισαν τις πέντε δραστηριότητες της έρευνας. Κάθε ομάδα εργάστηκε δύο ώρες κατά μέσο όρο για κάθε δραστηριότητα. Η ερευνητρια, μια από τις συγγραφείς, συμμετείχε ως παρατηρητής με ελάχιστη παρέμβαση.

Τα δεδομένα της έρευνας αποτελούν τα ηλεκτρονικά αρχεία με τις εικόνες των στρατηγικών των μαθητών, χειρόγραφες σημειώσεις της ερευνητριας και κασέτες βιντεοκάμερας.

*Η διαδικασία ανάλυσης δεδομένων.* Τα διάφορα είδη δεδομένων ταξινομήθηκαν ανά ομάδα μαθητών ώστε να υπάρξει μια σαφής εικόνα των στρατηγικών που κατασκευάστηκαν από αυτούς. Στη συνέχεια οι στρατηγικές αυτές ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες. Στο επόμενο στάδιο της ανάλυσης αναφέρονται πόσοι μαθητές, κατά ομάδες, τάξη και φύλο, ακολούθησαν κάθε στρατηγική. Τέλος, αναλύεται ο ρόλος των εργαλείων του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri-Geometry II στην κατασκευή των στρατηγικών των μαθητών.

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές κατασκεύασαν μια ποικιλία στρατηγικών προκειμένου να φέρουν σε πέρας τη δραστηριότητα της έρευνας. Η φύση της δραστηριότητας (που ζητούσε όσο το δυνατόν περισσότερες λύσεις) σε συνδυασμό με την ποικιλία των εργαλείων του περιβάλλοντος Cabri-Geometry II, οδήγησε τους μαθητές να αναπτύξουν τις στρατηγικές που αναφέρονται στη συνέχεια. Αρχικά οι μαθητές κατασκεύασαν το ορθογώνιο προαύλιο με την παρακάτω διαδικασία : α) Εμφάνιση αξόνων και πλέγματος β) Κατασκευή ορθογωνίου ΑΒΓΔ με μήκος ΑΒ= 10 εκατοστά και πλάτος ΒΓ= 4 εκατοστά χρησιμοποιώντας το εργαλείο: «πολύγωνο» και οδηγό τις κορυφές των μονάδων του πλέγματος. Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο πολύγωνο προκειμένου να επιτύχουν την κατασκευή των ορθών γωνιών του ορθογωνίου και για το λόγο αυτό χρησιμοποίησαν τελικά το εργαλείο αυτό σε συνδυασμό με τους άξονες και το πλέγμα.

Τρεις κατηγορίες στρατηγικών προέκυψαν με κριτήριο τα σημεία που επέλεξαν οι μαθητές ως τρίτη κορυφή των ισοδυνάμων τριγώνων. Αυτές οι κατηγορίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Σε αυτόν τον πίνακα παρουσιάζεται επίσης και ο αριθμός των ομάδων κατά τάξη, καθώς επίσης και ο αριθμός των παιδιών κατά τάξη που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία.

Κατηγορίες των στρατηγικών κατασκευής ισοδυνάμων τριγώνων από τους μαθητές στο περιβάλλον Cabri-Geometry II	Αριθμός ομάδων	Αριθμός μαθητών
Κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και		
C1: επιλογή σημαντικών σημείων (μέσα πλευρών, κορυφές ορθογωνίου) ως τρίτη κορυφή κορυφές τριγώνων	A1, A2, A3, B1, B2, Γ1, Γ2, Γ3	8Α, 6Β, 8Γ
C2: επιλογή τυχαίων σημείων πλευράς του ορθογωνίου ως τρίτη κορυφή των τριγώνων	B1, Γ1, Γ3	3Β, 5Γ
C3: επιλογή μιας απειρίας σημείων πλευράς του ορθογωνίου ως τρίτη κορυφή των τριγώνων με χρήση του 'drag' mode	B3, Γ2	3Β, 3Γ

Πίνακας 1. Κατηγορίες στρατηγικών κατασκευής ισοδυνάμων τριγώνων από μαθητές στο περιβάλλον Cabri-Geometry II.

Σε κάθε κατηγορία περιγράφονται οι στρατηγικές επίλυσης όπως αυτές πραγματοποιήθηκαν από τους μαθητές, τα εργαλεία του Cabri-Geometry II που χρησιμοποιήθηκαν για την πραγματοποίησή τους και στη συνέχεια γίνεται μια προσπάθεια ερμηνείας των στρατηγικών με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας. Οι κατηγορίες των στρατηγικών που πραγματοποιήθηκαν παρατίθενται στην επόμενη ενότητα.

*C1: κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και επιλογή σημαντικών σημείων της απέναντι πλευράς ως τρίτη κορυφή.* Οι στρατηγικές των μαθητών που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία παρουσιάζονται στην εικόνα 1.

<b>Στρατηγική Α</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Σχηματισμός των τριγώνου ABK, ΓΔΜ όπου Κ, Μ: τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΑΒ του ορθογωνίου αντίστοιχα</li> <li>• Σχηματισμός των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ</li> <li>• Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ, ΑΒΚ, ΓΔΜ και του ορθογωνίου ΑΒΓΔ</li> <li>• Πινακοποίηση των τιμών της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ και του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξαγωγή συμπερασμάτων για τη σχέση επιφάνειας – περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων</li> </ul>
<b>Στρατηγική Β</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Σχηματισμός των τριγώνων ΓΒΛ, ΑΔΝ όπου Λ, Ν: τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΔ του ορθογωνίου αντίστοιχα</li> <li>• Σχηματισμός των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ</li> <li>• Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ, ΓΒΛ, ΑΔΝ και του ορθογωνίου ΑΒΓΔ</li> <li>• Πινακοποίηση των τιμών της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων ΓΒΛ, ΑΔΝ, ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ και του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξαγωγή συμπερασμάτων για τη σχέση επιφάνειας – περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων</li> </ul>

Εικόνα 1. Στρατηγικές μαθητών για την κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και επιλογή σημαντικών σημείων της απέναντι πλευράς.

Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία δεν περίμεναν αρχικά ότι τα τρίγωνα που κατασκεύαζαν είχαν ίσες επιφάνειες. Οδηγήθηκαν στο να κατανοήσουν ότι διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να έχουν ίσες επιφάνειες από τις παρατηρήσεις τους στα αριθμητικά αποτελέσματα της αυτόματης μέτρησης της επιφάνειας των τριγώνων που κατασκεύαζαν. Ορισμένοι μαθητές αιτιολόγησαν αυτή την ισοδυναμία παρατηρώντας ότι τα τρίγωνα που κατασκεύαζαν έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη, ενώ κάποιοι άλλοι δεν μπόρεσαν να δώσουν καμιά αιτιολόγηση αλλά στάθηκαν στην ορθότητα των μετρήσεων που παράγονται αυτόματα από το πρόγραμμα. Όσον αφορά στη σχέση μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου των τριγώνων που οι μαθητές κατασκεύαζαν, φάνηκε ότι κατανοούν τη διαφορά μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου στηριγμένοι στις αυτόματες μετρήσεις επιφάνειας και περιμέτρου αυτών των τριγώνων. Επιπλέον, οι μαθητές εντόπισαν το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο μεταξύ των ισοδυνάμων τριγώνων που κατασκεύαζαν. Όλοι οι μαθητές που κατασκεύαζαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία αλλά και αυτοί που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν στις επόμενες κατηγορίες προσδιόρισαν ότι η επιφάνεια του ορθογωνίου είναι διπλάσια από την επιφάνεια κάθε τριγώνου που κατασκεύαζαν.

*C2: κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και επιλογή τυχαίων σημείων της απέναντι πλευράς του.* Οι στρατηγικές των μαθητών που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία παρουσιάζονται στην εικόνα 2.

<b>Στρατηγική Α</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Σχηματισμός των τριγώνων ΑΒΚ, ΑΒΜ, ΑΒΝ, ΑΒΛ, με βάση ΑΒ τη μεγάλη βάση του ορθογωνίου και κορυφή τυχαίο σημείο (Κ, Μ, Ν, Λ) της πλευράς ΓΔ του ορθογωνίου</li> <li>• Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων ΑΒΜ, ΑΒΝ, ΑΒΛ, ΑΒΚ και του ορθ. ΑΒΓΔ</li> </ul>
<b>Στρατηγική Β</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Σχηματισμός των τριγώνων ΒΓΖ, ΒΓΦ, ΒΓΤ, ΒΓΞ, με βάση ΒΓ τη μικρή βάση του ορθογωνίου και κορυφή τυχαίο σημείο (Ζ, Φ, Τ, Ξ) της πλευράς ΒΓ του ορθογωνίου</li> <li>• Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων ΒΓΦ, ΒΓΤ, ΒΓΞ, ΒΓΖ και του ορθ. ΑΒΓΔ</li> </ul>

Εικόνα 2. Στρατηγικές μαθητών για την κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και επιλογή τυχαίων σημείων της απέναντι πλευράς.

Οι τρεις ομάδες μαθητών που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία είχαν ήδη πραγματοποιήσει τις στρατηγικές που εντάχθηκαν στην προηγούμενη κατηγορία (κατηγορία C1). Παρά το ότι ήδη είχαν παρατηρήσει ότι δύο ή περισσότερα τρίγωνα μπορούν να έχουν ίσες επιφάνειες δεν περίμεναν στην αρχή ότι τα τρίγωνα που κατασκεύαζαν με κορυφή τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς του ορθογωνίου θα είχαν ίσες επιφάνειες. Χρησιμοποίησαν πάλι την αυτόματη μέτρηση των επιφανειών αυτών των τριγώνων και οδηγήθηκαν στο να κατανοήσουν ότι αυτά τα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να έχουν ίσες επιφάνειες. Ορισμένοι μαθητές αιτιολόγησαν αυτή την ισοδυναμία παρατηρώντας ότι τα τρίγωνα που κατασκεύαζαν έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη, ενώ κάποιοι άλλοι δεν μπόρεσαν να δώσουν καμιά αιτιολόγηση αλλά στάθηκαν στην ορθότητα των μετρήσεων που παράγονται αυτόματα από το πρόγραμμα. Όσον αφορά στη σχέση μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου των τριγώνων που οι μαθητές κατασκεύαζαν, φάνηκε ότι κατανοούν τη διαφορά μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου στηριγμένοι στις αυτόματες μετρήσεις επιφάνειας και περιμέτρου αυτών των τριγώνων. Επιπλέον, οι μαθητές εντόπισαν το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο μεταξύ των ισοδυνάμων τριγώνων που κατασκεύαζαν. Οι μαθητές στάθηκαν στη μελέτη των συγκεκριμένων τριγώνων που κατασκεύαζαν χωρίς να προχωρήσουν στην κατανόηση της ύπαρξης μιας απειρίας ισοδυνάμων τριγώνων που μπορούσαν να κατασκευαστούν και χωρίς να μπορέσουν να εντοπίσουν από αυτά το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο.

*C3: κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και επιλογή μιας απειρίας σημείων της απέναντι πλευράς του με χρήση του 'drag' mode σε συνδυασμό με την αυτόματη μέτρηση επιφάνειας και μήκους και της αυτόματης πινακοποίησης. Οι στρατηγικές των μαθητών που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία παρουσιάζονται στην εικόνα 3.*

<b>Στρατηγική Α</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Σχηματισμός τριγώνου ABK, με βάση AB τη μεγάλη βάση του ορθογωνίου και κορυφή K: τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς ΓΔ του ορθογωνίου</li><li>• Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου του τριγώνου ABK και του ορθ. ABΓΔ</li><li>• Πινακοποίηση των μηκών των πλευρών, της επιφάνειας και της περιμέτρου του τριγώνου ABK</li><li>• Μετακίνηση της κορυφής K πάνω στην πλευρά ΓΔ με τη χρήση του 'drag' mode και ταυτόχρονη πινακοποίηση των μηκών των πλευρών, της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων που προκύπτουν</li><li>• Εξαγωγή συμπερασμάτων για τη διατήρηση της επιφάνειας των τριγώνων που προέκυψαν και για τη σχέση επιφάνειας – περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων</li></ul>
<b>Στρατηγική Β</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Σχηματισμός τριγώνου ΒΓΛ, με βάση ΒΓ τη μικρή βάση του ορθογωνίου και κορυφή Λ: τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς ΑΔ του ορθογωνίου</li><li>• Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου του τριγώνου ΒΓΛ και του ορθ. ABΓΔ</li><li>• Πινακοποίηση των μηκών των πλευρών, της επιφάνειας και της περιμέτρου του τριγώνου ΒΓΛ</li><li>• Μετακίνηση της κορυφής Λ πάνω στην πλευρά ΑΔ με τη χρήση του 'drag' mode και ταυτόχρονη πινακοποίηση των μηκών των πλευρών, της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων που προκύπτουν</li><li>• Εξαγωγή συμπερασμάτων για τη διατήρηση της επιφάνειας των τριγώνων που προέκυψαν και για τη σχέση επιφάνειας – περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων</li></ul>

Εικόνα 2. Στρατηγικές μαθητών για την κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ορθογωνίου και επιλογή τυχαίων σημείων της απέναντι πλευράς.

Η μια ομάδα μαθητών (η ομάδα B3) που πραγματοποίησε τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία είχε εκφράσει ότι 'τρίγωνα με κοινή βάση και ίσα αντίστοιχα ύψη έχουν ίσες επιφάνειες'. Επαλήθευσαν αυτή τη γνώση τους με τη χρήση του 'drag mode' και την αυτόματη πινακοποίηση επιφανειών και περιμέτρων των τριγώνων που δημιουργούσαν κάθε φορά. Οι μαθητές αυτοί, κατανόησαν ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουν μια απειρία ισοδυνάμων τριγώνων με τον τρόπο που προαναφέρθηκε και διαπίστωσαν ότι η επιφάνεια και η περίμετρος ενός τριγώνου αποτελούν διαφορετικές οντότητες. Επιπλέον, οι μαθητές αυτοί, εντόπισαν το τρίγωνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ισοδύναμα τρίγωνα που είναι δυνατό να κατασκευαστούν με τον παραπάνω τρόπο. Η δεύτερη ομάδα μαθητών (η ομάδα Γ2) που πραγματοποίησε τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία κατανόησε τη δυνατότητα κατασκευής μιας απειρίας

ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά ενός ορθογωνίου και κορυφή ένα τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς του με τη βοήθεια του 'drag' mode της αυτόματης μέτρησης της επιφάνειας και της περιμέτρου των τριγώνων όπως και της αυτόματης πινακοποίησης. Επιπλέον, οι μαθητές, μέσα από τη διαδικασία που προαναφέρθηκε παρατήρησαν τη διαφορά μεταξύ περιμέτρου και επιφάνειας και μπόρεσαν να διακρίνουν το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο.

*Οι στρατηγικές που πραγματοποιήθηκαν από τις ομάδες των μαθητών*

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2) παρουσιάζονται οι κατηγορίες των στρατηγικών που πραγματοποίησε κάθε ομάδα μαθητών. Οι αριθμοί που παρουσιάζονται σε κάθε κελί του πίνακα δηλώνουν τη σειρά πραγματοποίησης κάθε στρατηγικής επίλυσης. Για παράδειγμα η 9<sup>η</sup> γραμμή του πίνακα δείχνει ότι οι μαθητές M18, M19, M20, της ομάδας Γ1 (1<sup>η</sup> ομάδα της τρίτης τάξης) πραγματοποίησαν 3 στρατηγικές επίλυσης. Η πρώτη στρατηγική που πραγματοποίησαν, είναι η στρατηγική A της κατηγορίας C2, ενώ η δεύτερη και η τρίτη οι στρατηγικές A και B της κατηγορίας C1 αντίστοιχα. Επιπλέον, η τελευταία στήλη του Πίνακα 2 περιέχει το πλήθος των στρατηγικών που πραγματοποιήθηκαν από κάθε ομάδα ενώ η τελευταία γραμμή αυτού του πίνακα περιέχει το σύνολο των στρατηγικών που πραγματοποιήθηκαν από τους μαθητές ανά κατηγορία. Το τελευταίο κελί της τελευταίας στήλης του Πίνακα 2 δείχνει τον συνολικό αριθμό στρατηγικών που πραγματοποιήθηκαν από το σύνολο των μαθητών προκειμένου να φέρουν σε πέρας τη δραστηριότητα που τους δόθηκε.

Ομάδες μαθητών Ai, Bi, Gi, i=1,2,3	Κατηγορίες στρατηγικών				
	Μαθητές Mi, i=1,..,25	C1 (C1A, C1B)	C2 (C2A, C2B)	C3 (C3A, C3B)	Σύνολο στρατηγικών
A1 (M1,M2,M3)	1 (A),2 (B)				2
A2 (M4, M5, M6)	1 (A),2 (B)				2
A3 (M7, M8)	1 (A),2 (B)				2
B1 (M9,M10, M11)	1 (A),2 (B)	3 (A)			3
B2 (M12, M13, M14)	1 (A)				1
B3 (M15,M16, M17)				1 (A),2 (B)	2
Γ1 (M18,M19, M20)	2 (A),3 (B)	1 (A)			3
Γ2 (M21,M22, M23)	1 (A),2 (B)			3 (A)	3
Γ3 (M24, M25)	2 (A),3 (B)	1 (A)			3
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>15</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>21</b>

*Πίνακας 2. Οι στρατηγικές κατασκευής ισοδυνάμων τριγώνων που πραγματοποιήθηκαν από τις ομάδες των μαθητών*

Όπως φαίνεται στον πίνακα 3, οι πιο πολλοί μαθητές πραγματοποίησαν στρατηγικές που εντάχθηκαν στην κατηγορία C1. Για τους πιο πολλούς η πρώτη στρατηγική που πραγματοποίησαν ήταν η στρατηγική C1A. Επιπλέον, για τους πιο πολλούς μαθητές η στρατηγική C1B ήταν η δεύτερη σε σειρά στρατηγική που πραγματοποίησαν. Μία ομάδα μαθητών προχώρησε στην πραγματοποίηση της στρατηγικής C2A ενώ μία ομάδα μαθητών προχώρησε στην πραγματοποίηση της στρατηγικής C3A. Το ότι οι μαθητές αρχικά κατασκευάζουν ισοδύναμα τρίγωνα που έχουν ως βάση τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και ως τρίτη κορυφή επιλέγουν γνωστά σημαντικά σημεία της απέναντι πλευράς του (μέσα των πλευρών του και κορυφές) πιθανό σημαίνει ότι αισθάνονται ασφαλείς όταν χρησιμοποιούν στοιχεία που τους είναι ήδη γνωστά. Επιπλέον, τα τρίγωνα που σχηματίζονται εδώ είναι ισοσκελή και ορθογώνια τα οποία επίσης αποτελούν μέρος της σχολικής γνώσης των μαθητών. Ορισμένοι από αυτούς τους μαθητές εξελίχθηκαν στην πραγματοποίηση της στρατηγικής C2A κατασκευάζοντας ισοδύναμα τρίγωνα που έχουν ως βάση τη μικρή πλευρά του ορθογωνίου και ως τρίτη κορυφή επιλέγουν επίσης γνωστά σημαντικά σημεία της απέναντι πλευράς του. Αυτό πιθανό σημαίνει ότι στηρίζονται στην επιτυχία της πρώτης στρατηγικής και τολμούν να επιλέξουν ως βάση τη μικρή πλευρά του ορθογωνίου κάτι που δεν είναι τόσο συνηθισμένο στις σχολικές πρακτικές. Οι μαθητές αυτοί φαίνεται να τολμούν να δοκιμάσουν το τι μπορεί να συμβαίνει σε μια κατασκευή που δεν τους είναι τόσο γνωστή. Επιπλέον, ορισμένοι μαθητές που είχαν προηγουμένως πραγματοποιήσει τις στρατηγικές C1A και C1B εξελίσσονται τολμώντας να διερευνήσουν χρησιμοποιώντας το 'drag mode', αν το σύνολο των τριγώνων τα οποία κατασκευάζονται με βάση τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου και τρίτη κορυφή τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς είναι ισοδύναμα (στρατηγική C3A).

## ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι μαθητές προκειμένου να φέρουν σε πέρας τη δραστηριότητα που τους δόθηκε εκμεταλλεύτηκαν τις δυνατότητες του περιβάλλοντος Cabri-Geometry II και κατασκεύασαν διαφορετικές προσεγγίσεις στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας των τριγώνων σε αντιπαράθεση με την κυρίαρχη σχολική προσέγγιση η οποία στηρίζεται στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου. Όλοι οι μαθητές κατάφεραν να κατασκευάσουν τουλάχιστον μια σωστή στρατηγική επίλυσης για το πρόβλημα που τους δόθηκε.

Όσον αφορά στην κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά του ορθογωνίου και τρίτη κορυφή σημείο της απέναντι πλευράς οι μαθητές κατασκεύασαν στρατηγικές οι οποίες εντάχθηκαν σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες με κριτήριο το σημείο το οποίο επέλεξαν για τρίτη κορυφή των ισοδυνάμων τριγώνων α) επιλογή γνωστών σημαντικών σημείων όπως τα μέσα των πλευρών και οι κορυφές του ορθογωνίου (κατηγορία C1) β) επιλογή περιορισμένου αριθμού τυχαίων σημείων της απέναντι πλευράς (κατηγορία C2) και γ) επιλογή όλων των σημείων της απέναντι πλευράς με χρήση του 'drag mode' (κατηγορία C3). Σε κάθε μία από τις τρεις παραπάνω κατηγορίες οι μαθητές κατασκεύασαν ισοδύναμα τρίγωνα δοκιμάζοντας και τις δύο βάσεις του ορθογωνίου. Οι περισσότεροι μαθητές αρχικά πραγματοποίησαν στρατηγικές της κατηγορίας C1 ενώ ορισμένοι από αυτούς εξελίχθηκαν στην πραγματοποίηση στρατηγικών της κατηγορίας C2 και κάποιιοι άλλοι πέρασαν κατευθείαν στην πραγματοποίηση στρατηγικών της κατηγορίας C3. Αυτή η εξέλιξη κατά την άποψή μας δείχνει ότι ο μαθητές ξεκινούν από την κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων με βάση τη μια πλευρά του ορθογωνίου και τρίτη κορυφή σημεία που τους είναι ήδη γνωστά από τη σχολική γνώση στη συνέχεια τολμούν να διερευνήσουν το τι συμβαίνει όταν τα σημεία αυτά είναι τυχαία και τέλος αισθάνονται άνετα να μελετήσουν το τι συμβαίνει στη γενική περίπτωση σχηματισμού μιας απειρίας τριγώνων μέσω δυναμικής μετακίνησης ενός οποιουδήποτε σημείου της απέναντι πλευράς κατά μήκος αυτής.

Μετά την ολοκλήρωση της δραστηριότητας όλοι οι μαθητές φάνηκε να κατανοούν ότι τρίγωνα με ίδια επιφάνεια δεν έχουν κατ' ανάγκη ίσα στοιχεία (πλευρές και γωνίες), ενώ ορισμένοι από αυτούς μπόρεσαν να διακρίνουν ότι τρίγωνα με κοινή βάση και ίσα τα αντίστοιχα ύψη είναι ισοδύναμα. Όλοι οι μαθητές μέσα από τις στρατηγικές επίλυσης που κατασκεύασαν, μπόρεσαν επίσης να διαχωρίσουν τις έννοιες της επιφάνειας και της περιμέτρου, και να διαπιστώσουν ότι τα τρίγωνα με ίδια επιφάνεια δεν έχουν υποχρεωτικά ίδια περίμετρο. Επιπλέον, οι περισσότεροι μαθητές (23 από τους 25 μαθητές) κατάφεραν να διατυπώσουν εικασίες για το ποιο από όλα τα ισοδύναμα τρίγωνα έχει τη μικρότερη περίμετρο. Οι παραπάνω μαθητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι μεταξύ ισοδυνάμων τριγώνων τα ισοσκελή έχουν τη μικρότερη περίμετρο και μεταξύ των ισοδυνάμων ισοσκελών τριγώνων μικρότερη περίμετρο έχει αυτό με τη μεγαλύτερη βάση. Όλοι οι μαθητές κατανόησαν επίσης ότι η επιφάνεια του ορθογωνίου είναι διπλάσια από την επιφάνεια κάθε τριγώνου που κατασκεύασαν. Οι διαπιστώσεις των μαθητών για τη σχέση επιφάνειας και περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων στηρίχθηκαν στις παρατηρήσεις τους κατά τη διάρκεια της κατασκευής των διαφόρων στρατηγικών επίλυσης, δεν συνδυάστηκαν όμως με κάποια αιτιολόγηση ή/και απόδειξη παρόλο που οι μαθητές παρακινήθηκαν από την ερευνήτρια γι' αυτό.

### *Ο ρόλος των εργαλείων*

*Η αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου και η αυτόματη πινακοποίηση:* Τα εργαλεία αυτά χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές προκειμένου να ελέγξουν την ισοδυναμία των τριγώνων που κατασκεύαζαν όπως και να μελετήσουν τη σχέση μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου αυτών των τριγώνων. Με βάση τα αποτελέσματα των μετρήσεων και την αυτόματη πινακοποίησή τους όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να διαχωρίσουν τις έννοιες της επιφάνειας και της περιμέτρου ενός τριγώνου. Επιπλέον, με τη χρήση των εργαλείων αυτών όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ της επιφάνειας του ορθογωνίου και της επιφάνειας κάθε τριγώνου που ανήκει στην κλάση των ισοδυνάμων τριγώνων που εγγράφονται σε αυτό με τον τρόπο που προαναφέρθηκε.

*Οι άξονες, το πλέγμα και το εργαλείο 'πολύγωνο':* Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα εργαλεία αυτά σε συνδυασμό, λόγω του ότι δεν μπορούσαν να σχεδιάσουν τετράπλευρα με ορθές γωνίες χρησιμοποιώντας αποκλειστικά το εργαλείο 'πολύγωνο'.

Η λειτουργία 'drag mode': Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη λειτουργία αυτή σε συνδυασμό με την αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου και την αυτόματη πινακοποίηση προκειμένου να μελετήσουν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε μια απειρία τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη. Με τη χρήση των εργαλείων αυτών οι μαθητές βοηθήθηκαν στο να κάνουν διάκριση μεταξύ της επιφάνειας και της περιμέτρου ενός τριγώνου και να εντοπίσουν το τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ποικιλία των διαφόρων εργαλείων που παρέχει το εκπαιδευτικό λογισμικό Cabri-Geometry II σε συνδυασμό με τη φύση της δραστηριότητας που καλούσε τους μαθητές να δώσουν όλες τις δυνατές λύσεις βοήθησε κάθε μαθητή να κατασκευάσει ενεργητικά περισσότερες από μία στρατηγικές για να προσεγγίσει τις έννοιες της διατήρησης της επιφάνειας μιας κλάσης τριγώνων εγγεγραμμένων σε ορθογώνιο καθώς και να διαχωρίσουν την έννοια της επιφάνειας και της περιμέτρου τους. Οι μαθητές μπόρεσαν να διερευνήσουν αυτές τις έννοιες ξεκινώντας από την μελέτη τριγώνων που τους ήταν ήδη γνωστά όπως ισοσκελή ή ορθογώνια τρίγωνα με βάση μια πλευρά ενός ορθογωνίου και τρίτη κορυφή σημαντικά και γνωστά σημεία της απέναντι πλευράς του, όπως το μέσο και τα άκρα της. Στη συνέχεια ορισμένοι μαθητές μπόρεσαν να εξελιχθούν στη διερεύνηση αυτών των εννοιών σε περιορισμένο αριθμό τριγώνων που κατασκεύαζαν με τον ίδιο τρόπο αλλά η τρίτη τους κορυφή ήταν τυχαίο σημείο της απέναντι πλευράς του ορθογωνίου, ενώ άλλοι προχώρησαν στη μελέτη μιας απειρίας τριγώνων τα οποία κατασκεύαζαν με τη χρήση της λειτουργίας 'drag mode'. Η χρήση των εργαλείων του Cabri-Geometry II και ειδικότερα η αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου, η αυτόματη πινακοποίηση και η λειτουργία 'drag mode' έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε μια ποικιλία ισοδύναμων τριγώνων και να διαχωρίσουν την έννοια της επιφάνειας από την περίμετρο. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να διερευνήσουν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μιας κλάσης τριγώνων εγγεγραμμένων σε ορθογώνιο μέσα από τις διαφορετικές εικονικές αναπαραστάσεις τους, να διατυπώσουν γενικεύσεις και να αποκτήσουν μια πιο διευρυμένη άποψη της παραπάνω έννοιας και της σχέσης επιφάνειας- περιμέτρου ισοδύναμων τριγώνων. Επιπλέον, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να κάνουν συνδυασμούς και συνδέσεις μεταξύ διαφόρων κομματιών γνώσης που ήδη κατείχαν, χωρίς να περιοριστούν στη μελέτη ενός μικρού αριθμού τριγώνων με την αποκλειστική χρήση του τύπου υπολογισμού της επιφάνειας τριγώνων, πρακτική που κυρίως χαρακτηρίζει την παρεχόμενη σχολική γνώση.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Borba, M. and Confrey, G. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multirepresentational environment. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 319-337.
- Carpenter, T. P. (1976). 'Analysis and Synthesis of Existing Research on Measurement', in R. A. Lesh (ed.), *Number and measurement*, ERIC/SMEAK Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis center, pp. 47-83.
- Cohen, L. and Manion, L. (1989). *Research Methods in Education*, Routledge, London.
- Johnson, H. C. (1986). 'Area is a measure', *International Journal of Mathematics Education, Science & Technology*, 17(4), 419-424.
- Hart, K-M. (1989). Measurement. In John Murray (Eds), *Childrens Understanding of Mathematics*: 11-16, (pp. 9-22). G. Britain: Atheneum Press Ltd.
- Hirstein, J., Lamb, C. E. and Osborn, A. (1978). 'Student Misconceptions about area measure', *Arithmetic Teacher* 25(6), 10-16
- Kidman, G. and Cooper, T. J. (1997). 'Area integration rules for grades 4, 6, and 8 students', *Proceedings of the 21<sup>st</sup> International Conference, Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, Lathi, Finland, pp.136-143.
- Kordaki, M. and Potari, D. (2002). The effect of tools of area measurement on students' strategies : The case of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100.
- Kordaki, M. (2003, to appear). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*.
- Laborde, J-M. (1990). *Cabri-Geometry* [Software], Universite de Grenoble, France, 1990.
- Maher, C.A. and Beattys, C. B. (1986). 'Examining the Construction of area and its Measurement by Ten to Fourteen Year old Students', in E. Lansing, G. Lappan, and R. Even (eds), *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference, Psychology of Mathematics Education*, N. A., pp. 163-168.
- Mariotti, M., A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). Berlin: Springer-Verlag.
- Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction*, 3, 39-54.
- Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*, Norton & Company, N.Y.