

Η ΑΜΦΙΔΡΟΜΗ ΣΧΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Δρ Μαρία Κορδάκη

Τμήμα Μηχ/κών Ηλ/κών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Παν/μίου Πατρών (Διδ. Π.Δ. 407/80)

Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, e-mail : kordaki@cti.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται το πλαίσιο των Μαθηματικών εννοιών και μεθόδων μέσα στο οποίο αναπτύχθηκε ένας μικρόκοσμος σε υπολογιστή για τη μάθηση εννοιών που αφορούν στη διατήρηση και στη μέτρηση της επιφάνειας. Το πλαίσιο αυτό αποτέλεσαν οι πίνακες για την αποθήκευση δεδομένων σε συνδυασμό με τους πίνακες βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών, τους τύπους υπολογισμού εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων, μηκών ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών, και τη μέθοδο των τραπεζίων για τον υπολογισμό εμβαδών ακανόνιστων μη καμπυλόγραμμων επιφανειών. Οι δυνατότητες γραφικής αναπαράστασης του υπολογιστή σε συνδυασμό με το πλαίσιο των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν έδωσαν δυναμικό και ποιοτικό χαρακτήρα στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Το εκπαιδευτικό λογισμικό που κατασκευάστηκε μέσα από το συνδυασμό Μαθηματικών και Τεχνολογίας δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να οικοδομήσουν τις παραπάνω μαθηματικές έννοιες με μια ποικιλία μεθόδων.

1. Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά αποτελούν βασική θεμελίωση της Πληροφορικής η οποία θεωρείται ταυτόχρονα ως θεωρητική, πειραματική και τεχνολογική επιστήμη (ACM, 1991). Μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα σε συνδυασμό με τις μεθοδολογίες της απόδειξης αποτελούν σημαντικό συστατικό στοιχείο του θεωρητικού πλαισίου της Πληροφορικής ενώ υιοθετούνται επίσης οι πειραματικές μεθοδολογίες για το σχεδιασμό πειραμάτων, τη συλλογή δεδομένων, την ανάλυση και την ερμηνεία τους και την εξαγωγή συμπερασμάτων με στόχο τη δυνατότητα προβλέψεων. Ο τεχνολογικός χαρακτήρας της Πληροφορικής καθορίζεται από το ότι οι

θεωρίες και οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό συστημάτων ή συσκευών για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Ο σχεδιασμός ακολουθεί μια τυπική διαδικασία όπως : καθορισμός απαιτήσεων του προβλήματος, διατύπωση προδιαγραφών, σχεδιασμός, υλοποίηση, έλεγχος και βελτίωση του αποτελέσματος.

Η Πληροφορική επηρεάζει εγκάρσια το σύνολο της κοινωνικής, της οικονομικής και της πολιτικής ζωής και επιπλέον επιδρά καταλυτικά στο χώρο της Εκπαίδευσης. Ολοένα και περισσότερο αναγνωρίζεται η σημασία της Πληροφορικής ως εργαλείου στη διδασκαλία και τη μάθηση Μαθηματικών εννοιών αλλά και όλων των άλλων γνωστικών αντικειμένων (Noss & Hoyles, 1996). Στην περίπτωση των Μαθηματικών τονίζεται το ότι η Τεχνολογία η οποία διαμορφώνεται και διαμορφώνει τα Μαθηματικά επηρεάζει επίσης και τον τρόπο της διδασκαλίας και της μάθησής τους και δίνει νέες διαστάσεις στο αντικείμενο το οποίο διδάσκεται (Karut, 1992). Ιδιαίτερα στη Γεωμετρία έχουν αναπτυχθεί ανοικτά περιβάλλοντα μάθησης τα οποία δίνουν ένα δυναμικό χαρακτήρα στις γεωμετρικές έννοιες. Ως παράδειγμα αναφέρονται το περιβάλλον *Cabri-Geometry* και το *Geometer's Scetch – Pad* (Laborde & Strasser, 1990; Klotz & Jackiv, 1988). Τα ανοικτά περιβάλλοντα και συγκεκριμένα οι μικρόκοσμοι αποτελούνται από α) Ένα σύνολο από βασικά αντικείμενα και στοιχειώδεις λειτουργίες που μπορούν να επιδράσουν σε αυτά όπως και ένα σύνολο κανόνων που εκφράζουν τους τρόπους αυτής της επίδρασης. Το σύνολο αυτό αποτελεί μια συνήθη δομή ενός τυπικού συστήματος από μια μαθηματική οπτική. β) Ένα φαινομενολογικό χώρο ο οποίος συνδέει αντικείμενα και ενέργειες των εννοιολογικών αντικειμένων με τα φαινόμενα στην οθόνη του υπολογιστή. Αυτό το φαινομενολογικό πεδίο καθορίζει τον τύπο της ανατροφοδότησης που ο μικρόκοσμος παρέχει, σε συνάρτηση με τις ενέργειες και τις αποφάσεις του χρήστη (Balacheff & Sutherland, 1994, ο.π οι Balacheff & Karut, 1996, σελ. 471).

Οι μικρόκοσμοι αποτελούν εννοιολογικούς χώρους όπου είναι δυνατός ο χειρισμός διασυνδεδεμένων εννοιών, διαδικασιών και αναπαραστάσεων (Vergnaud, 1983, ο.π. η Hilel, 1992) και θεωρούνται ότι αποτελούν πολλά υποσχόμενες περιοχές για το μέλλον της διδασκαλίας και της μάθησης (Balacheff & Karut, 1996). Επιπλέον είναι δυνατή η κατασκευή νέων λειτουργιών από το χρήστη και από αυτή την άποψη φαίνονται ότι μπορούν να εξελίσσονται παράλληλα με τη γνώση του μαθητή (Hoyles, 1993). Τα αντικείμενα των μικροκόσμων χαρακτηρίζονται ως ενδιάμεσα μεταξύ των συγκεκριμένων και των αφηρημένων συμβολικών εννοιών τους (Papert, 1987, ο.π η Hoyles, 1993). Η δυνατότητα εμφάνισης στην οθόνη του

υπολογιστή μιας απειρίας γραφικών αναπαραστάσεων μιας γεωμετρικής κατασκευής όπως για παράδειγμα η δυνατότητα εμφάνισης μιας πληθώρας μορφών του ίδιου σχήματος δίνει ένα δυναμικό χαρακτήρα στις σχετικές γεωμετρικές έννοιες και επιτρέπει τη μελέτη τους μέσα από τις μεταβολές των πολλαπλών μορφών τους. Για την οικοδόμηση τέτοιων ανοικτών περιβαλλόντων σε υπολογιστή απαιτείται χρήση Μαθηματικών κυρίως από τις περιοχές της Αλγεβρας, της Αναλυτικής, της Ευκλείδειας και της Υπολογιστικής Γεωμετρίας.

2. Το πλαίσιο της έρευνας

Στην παρούσα μελέτη παρουσιάζονται οι λειτουργίες του μικρόκοσμου C.AR.ME. 'The Conservation of ARea and its Measurement microworld', (Kordaki & Potari, 1998) σε συνδυασμό με τις μαθηματικές έννοιες και μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξή του. Ο μικρόκοσμος αυτός κατασκευάστηκε προκειμένου να αποτελέσει ένα πιθανό περιβάλλον μάθησης για τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Η έννοια της μέτρησης της επιφάνειας αποτελεί μια σημαντική έννοια των Μαθηματικών, έχει ενδιαφέρον για όλους τους λαούς και χρησιμοποιείται στην επιστήμη στην τεχνολογία αλλά και στην προσωπική ζωή των ατόμων (Hirstein, Lamb, & Osborn, 1978; Inskoop, 1976). Η έννοια της μέτρησης της επιφάνειας στηρίζεται στις έννοιες της μονάδας, της επικάλυψης με τη μονάδα χωρίς κενά και επικαλύψεις και στην καταμέτρηση των μονάδων με σύνθεση από τα μέρη τους όπου αυτό απαιτείται (Piaget, Inhelder, & Sheminska, 1981; Hirstein, et al., 1978; Maher & Beattys, 1986). Προαπαιτούμενη έννοια της μέτρησης της επιφάνειας αποτελεί η έννοια της διατήρησής της ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση (Piaget, et al., 1981; Hirstein, et al., 1978; Beattys & Maher, 1985). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον επίσης αποκτά η μελέτη ισοδυνάμων επιφανειών της ίδιας μορφής όπως οι οικογένειες ισοδυνάμων τριγώνων ή παραλληλογράμμων με κοινή βάση και ίσα ύψη (Κορδάκη, 1999). Οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της μέτρησης της επιφάνειας και οι δυσκολίες που συναντούν αποδίδονται στην έλλειψη έμφασης στις έννοιες που τη συνθέτουν όπως και στην έννοια της διατήρησης αλλά και στο φαινομενικά μεγάλο κενό ανάμεσα σε αυτή την ποιοτική προσέγγιση και στην πολιτισμική οποία εκφράζεται με τους τύπους υπολογισμού των εμβαδών (Rahim & Sawada, 1990; Baturu & Nason, 1996; Kidman & Cooper, 1997). Επιπλέον οι μαθητές φαίνεται να μην αναγνωρίζουν ότι σχήματα της ίδιας μορφής (πχ τρίγωνα) μπορούν να διατηρούνται ως προς την επιφάνεια όπως επίσης δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τα κοινά

γραμμικά τους στοιχεία όπως η κοινή βάση και τα ίσα ύψη κλάσεων ισοδυνάμων τριγώνων ή παραλληλογράμμων (Κορδάκη, 1999).

Ο μικρόκοσμος C.AR.ME. κατασκευάστηκε προκειμένου να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν με τη χρήση μιας ποικιλίας ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων με τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας σε οποιοδήποτε σχήμα αλλά και σε κλάσεις ισοδυνάμων σχημάτων της ίδιας μορφής όπως τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα με κοινή βάση και ίσα ύψη. Ο σχεδιασμός του μικρόκοσμου ήταν αποτέλεσμα μοντελοποίησης η οποία πραγματοποιήθηκε με βάση το γνωσιοθεωρητικό πλαίσιο του εποικοδομισμού σε συνδυασμό με κοινωνικές θεωρήσεις που αφορούν στο ρόλο των εργαλείων (Bauersfeld, 1988; Confrey, 1995). Επιπλέον η μοντελοποίηση στηρίχθηκε σε ερευνητικά δεδομένα για το πώς οι μαθητές μαθαίνουν τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας όπως και στο ποιες είναι οι πιθανές τους ενέργειες προκειμένου να αντιμετωπίσουν σημαντικά προβλήματα που αφορούν σε αυτές τις έννοιες (Kordaki & Potari, 1998).

Αρχείο	Σχεδίαση	Επεξεργασία	Αυτόματη μέτρηση	Αυτόματοι μετασχηματισμοί	Εργαλεία	Βοήθεια
Ανοιγμα..	Τετραγωνικός καμβάς	Επιλογή μέρους	Επιφάνειας	Τετράγωνο	Τετραγωνική μονάδα	
Ανοιγμα Τελευταίου ...	Τριγωνικός καμβάς	Επιλογή όλου	Γωνίας	Ορθογώνια και Οικογένειες ισοδ. Ορθογωνίων Παραλληλόγραμμα και Οικογένειες ισοδ. παραλ/μων Τρίγωνα και Οικογένειες ισοδ. τριγώνων	Ορθογώνια μονάδα	
Αποθήκευση τελευταίου	Σχεδίαση πολυγώνου	Κοπή	Ευθ. τμήματος		Μονάδα του μαθητή	
Αποθήκευση ως..	Σχεδίαση ευθ. τμήματος	Επικόλληση			Επικάλυψη με τη μονάδα	
Εκτύπωση	Τέλος σχεδίασης πολυγώνου	Σχεδίαση γωνίας στροφής		Εμφάνιση αριθμ. στοιχείων σχημάτων	Καταμέτρηση μονάδων	
Εξοδος	Καθάρισμα οθόνης	Στροφή			Τετραγωνικό καρέ	
		Σχεδίαση άξονα συμμετρίας			Ορθογώνιο καρέ	
		Συμμετρία ως προς άξονα			Καρέ του μαθητή	
		Σβηστήρες				

Πίνακας 1. Οι παρεχόμενες λειτουργίες στο περιβάλλον διεπαφής με το χρήστη στο μικρόκοσμο C.AR.ME

Τα εργαλεία τα οποία παρέχονται στους μαθητές από το περιβάλλον του μικρόκοσμου παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 και συζητούνται στην

επόμενη ενότητα ως προς τη διδακτική τους αξία αλλά και ως προς το μαθηματικό πλαίσιο των μεθόδων και των εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή τους.

3. Η μαθηματική θεμελίωση των λειτουργιών του μικρόκοσμου C.AR.ME.

Λειτουργίες αρχείου : Στην πρώτη στήλη του πίνακα 1 ανήκουν οι λειτουργίες αρχείου με τη χρήση των οποίων οι μαθητές μπορούν να αποθηκεύσουν ή να ανακαλέσουν τις εικόνες - σχήματα τα οποία δημιουργούν κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους με το πρόγραμμα.

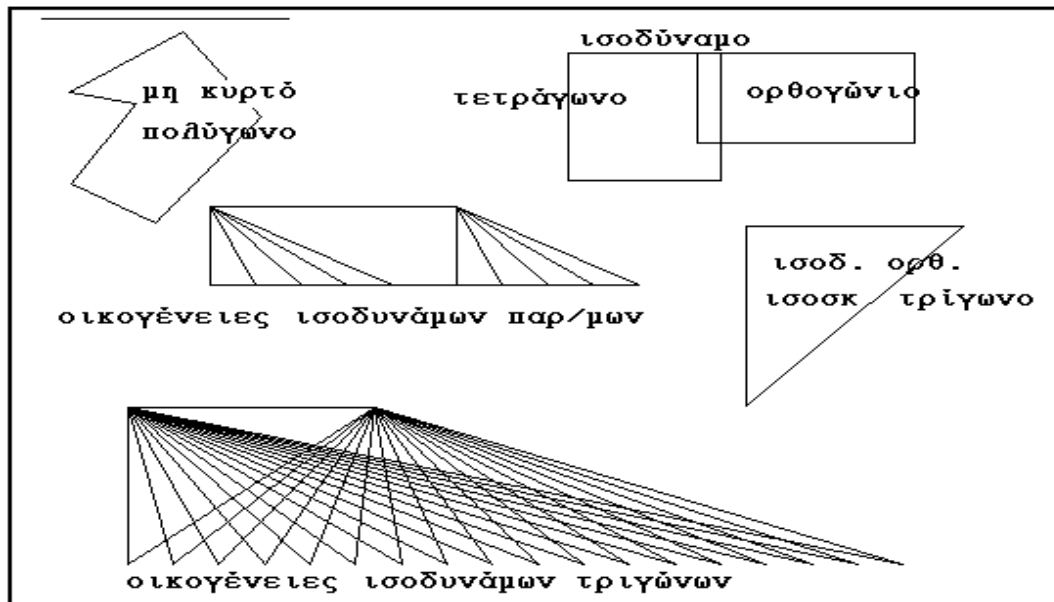
Λειτουργίες σχεδίασης : Στη δεύτερη στήλη βρίσκονται οι λειτουργίες με τη βοήθεια των οποίων ο μαθητής μπορεί να σχεδιάσει σχήματα ή ευθύγραμμα τμήματα στην οθόνη του υπολογιστή. Τα σχήματα θεωρούνται ως αλληλουχία διανυσμάτων οι συντεταγμένες των άκρων των οποίων αποθηκεύονται σε πίνακες. Τα ευθύγραμμα τμήματα θεωρούνται επίσης ως διανύσματα οι συντεταγμένες των άκρων των οποίων αποθηκεύονται με τον τρόπο που προαναφέρθηκε.

Λειτουργίες ποιοτικής επεξεργασίας επιφανειών : Στην Τρίτη στήλη διατίθενται λειτουργίες για την ποιοτική επεξεργασία της επιφάνειας ενός σχήματος χωρίς τη χρήση αριθμών. Ο πειραματισμός των μαθητών με επιφάνειες με τη χρήση ποιοτικών μεθόδων όπως για παράδειγμα είναι ο τεμαχισμός επιφανειών και η ανασύνθεσή των μερών τους για τη δημιουργία νέων ισοδυνάμων σχημάτων προτείνεται εμφατικά από τους ερευνητές για το ξεπέρασμα των δυσκολιών τις οποίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι οποίες αποδίδονται κυρίως στην πρόωρη εισαγωγή τους στους τύπους υπολογισμού (Piaget, Inhelder, & Sheminska, 1981; Hirstein, Lamb, & Osborn, 1978; Beattys, & Maher, 1985). Για το σκοπό αυτό έγινε προσπάθεια προσομοίωσης των αισθησιοκινητικών παιδιών όταν εμπλέκονται σε προβλήματα που αφορούν σε έννοιες της επιφάνειας στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Η προσομοίωση έγινε με τις λειτουργίες της 'επιλογής όλου' και της 'επιλογής μέρους' οι οποίες υλοποιήθηκαν με τη χρήση πινάκων διπλής εισόδου όπως και με τις λειτουργίες της 'κοπής', της 'επικόλλησης', της 'στροφής' ως προς γωνία και κέντρο στροφής και της 'συμμετρίας' ως προς άξονα οι οποίες υλοποιήθηκαν με τη χρήση τύπων της Αναλυτικής Γεωμετρίας που αφορούν στους βασικούς αυτούς μετασχηματισμούς. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν οι διδιάστατοι πίνακες για την αποθήκευση των συντεταγμένων των άκρων των διανυσμάτων τα οποία συνθέτουν τα δημιουργούμενα κάθε φορά πολύγωνα. Οι συντεταγμένες αυτές χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου για την

σχεδίαση των σχημάτων στις νέες τους θέσεις ύστερα από τους μετασχηματισμούς που προαναφέρθηκαν με τη βοήθεια των σχεδιαστικών δυνατοτήτων της γλώσσας προγραμματισμού (Visual Basic 3.1) που χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη του λογισμικού.

Λειτουργίες για αυτόματες μετρήσεις : Με τις λειτουργίες αυτές οι μαθητές μπορούν να μετρήσουν αυτόματα μήκη, γωνίες και μη καμπυλόγραμμες επιφάνειες με βάση τις τυποποιημένες μονάδες μέτρησης (1 εκ., 1 μοίρα, 1 τ.εκ., αντίστοιχα). Για τις μετρήσεις μηκών και γωνιών χρησιμοποιήθηκαν οι αντίστοιχοι τύποι της αναλυτικής Γεωμετρίας ενώ για τη μέτρηση των μη καμπυλογράμμων επιφανειών χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των τραπεζίων (Chapra, & Canale, 1990). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο το εμβαδόν ενός μη καμπυλογράμμου σχήματος n -γώνου προκύπτει ως αλγεβρικό άθροισμα των εμβαδών των n τραπεζίων που δημιουργούνται όταν προβάλλουμε όλες τις πλευρές του n -γώνου σε έναν από τους άξονες καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Λειτουργίες αυτόματων μετασχηματισμών. Οι λειτουργίες αυτές παρουσιάζονται στην 5^η στήλη του Πίνακα 1 και δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή να μελετήσει ισοδύναμα σχήματα της ίδιας ή διαφορετικής μορφής τα οποία με τις κατάλληλες επιλογές σχεδιάζονται αυτόματα από το πρόγραμμα. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μέσα από δυναμικές μορφές της. Πιο συγκεκριμένα κάθε σχήμα είναι δυνατό να μετασχηματίζεται αυτόματα σε σχήματα καθιερωμένων γεωμετρικών μορφών όπως, τετράγωνο, ορθογώνιο με διαστάσεις οι οποίες έχουν λόγο 1:2, οικογένειες ορθογωνίων των οποίων η μια διάσταση δίνεται από το μαθητή κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με το πρόγραμμα και οικογένειες ισοδυνάμων παραλληλογράμμων και τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη. Κάθε οικογένεια αποτελείται από μια πληθώρα ισοδυνάμων σχημάτων και δημιουργείται με βάση το μήκος της βάσης τους το οποίο σχεδιάζεται από το μαθητή κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με το πρόγραμμα. Για κάθε διαφορετικό μήκος το οποίο σχεδιάζεται από το μαθητή μια νέα οικογένεια-κλάση ισοδυναμίας παραλληλογράμμων ή τριγώνων μπορεί να δημιουργηθεί διότι με το πάτημα του αριστερού πλήκτρου του ποντικιού στην κατάλληλη επιλογή ένα νέο ισοδύναμο σχήμα εμφανίζεται κάθε φορά στην οθόνη του υπολογιστή. Στην εικόνα 1 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα από τους αυτόματους μετασχηματισμούς που μπορούν να πραγματοποιηθούν στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME.



Εικόνα 1. Αυτόματοι μετασχηματισμοί σε ισοδύναμο ως προς την επιφάνεια σχήματα που δημιουργήθηκαν στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME.

Για την υλοποίηση των παραπάνω λειτουργιών υπολογίζεται το εμβαδόν του αρχικού σχήματος με τη μέθοδο των τραπεζίων το οποίο εξισώνεται με το εμβαδόν του τετραγώνου. Στη συνέχεια υπολογίζεται η τετραγωνική ρίζα του εμβαδού η οποία αποτελεί το μήκος της πλευράς του ισοδύναμου τετραγώνου με βάση την οποία σχεδιάζεται αυτόματα το σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή. Το ίδιο εμβαδόν διαιρείται με το μήκος της βάσης την οποία σχεδιάζει ο μαθητής στην οθόνη του υπολογιστή το οποίο μετρείται αυτόματα και προκύπτει η άλλη διάσταση ενός ισοδύναμου ορθογωνίου όπως και το ύψος των οικογενειών των ισοδυνάμων παραλληλογράμμων και τριγώνων που προαναφέρθηκαν. Με βάση αυτές τις διαστάσεις σχεδιάζονται κάθε φορά αυτόματα τα σχήματα ενώ στην περίπτωση των οικογενειών των ισοδυνάμων σχημάτων κάθε φορά μετατοπίζεται η οριζόντια συντεταγμένη του ύψους με σταθερό βήμα προς τα δεξιά της οθόνης του υπολογιστή ώστε να μπορεί να σχεδιάζεται αυτόματα ένα νέο ισοδύναμο σχήμα. Οι συντεταγμένες των κορυφών των σχημάτων

αποθηκεύονται σε πίνακες ενώ τα γραμμικά στοιχεία των σχημάτων είναι προσπελάσιμα για μελέτη από το μαθητή.

Λειτουργίες για τη μέτρηση της επιφάνειας. Ως εργαλεία για τη μέτρηση επιφανειών παρέχονται από το περιβάλλον του μικρόκοσμου μια ποικιλία μονάδων και καρτέ, η λειτουργία της επικάλυψης με τη μονάδα όπως και της καταμέτρησης των μονάδων που επικαλύπτουν το προς μέτρηση σχήμα. Αυτά είναι η τετραγωνική και η ορθογώνια μονάδα και τα αντίστοιχα καρτέ καθώς και η δυνατότητα σχεδίασης μονάδας οποιουδήποτε σχήματος όπως και η δημιουργία καρτέ με διαστάσεις που σχεδιάζονται από το μαθητή κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με το πρόγραμμα. Τα παραπάνω εργαλεία σχεδιάστηκαν προκειμένου να δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάσουν την έννοια της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από τις έννοιες που τη συνθέτουν και να κατανοήσουν την έννοια της μονάδας σε μια εξελικτική πορεία από τις μη τυπικές μονάδες στις τυποποιημένες μονάδες μέτρησης της επιφάνειας (Inskoop, 1976). Τα εργαλεία που περιγράφηκαν παραπάνω παρουσιάζονται στην 5^η στήλη του πίνακα 1.

Για την κατασκευή των παραπάνω εργαλείων χρησιμοποιήθηκαν : α) οι τύποι της Αναλυτικής Γεωμετρίας για την παράλληλη μεταφορά πολυγώνων σε σημείο με γνωστές συντεταγμένες προκειμένου για την επικάλυψη μιας επιφάνειας με τη μονάδα μέτρησης της επιφάνειας, β) η μέθοδος των τραπεζίων για τον υπολογισμό της προς μέτρηση επιφάνειας και της μονάδας μέτρησής της. Στη συνέχεια ακολουθεί διαίρεση των υπολογισθέντων εμβαδών και προκύπτει αυτόματα ο αριθμός των αναγκαίων μονάδων μέτρησης για την καταμέτρηση των μονάδων που απαιτούνται για την επικάλυψη της επιφάνειας ενός σχήματος χωρίς κενά και επικαλύψεις.

4. Συμπεράσματα

Από την παραπάνω μελέτη προέκυψε ότι μαθηματικές έννοιες και μέθοδοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της Τεχνολογίας και ειδικότερα στην ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού. Οι γραφικές αναπαραστασιακές δυνατότητες των υπολογιστικών τεχνολογιών όπως και οι υπολογιστικές τους ικανότητες συνδυάστηκαν με μαθηματικά εργαλεία και μεθόδους όπως οι πίνακες, οι βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, οι τύποι υπολογισμού εμβαδών, μηκών και γωνιών. Ο συνδυασμός αυτός έδωσε μια δυναμική διάσταση στις μαθηματικές έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από τις γραφικές αναπαραστάσεις των πολλαπλών μορφών τους κάτι το οποίο είναι δύσκολα πραγματοποιήσιμο στο περιβάλλον χαρτί-

μολύβι. Επιπλέον μέσα από τις δυνατότητες γραφικής επεξεργασίας επιφανειών δόθηκε μια ποιοτική διάσταση στις έννοιες που προαναφέρθηκαν κάτι ιδιαίτερα σημαντικό για το ξεπέρασμα των δυσκολιών των μαθητών που αφορά σε αυτές τις έννοιες. Το περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. το οποίο δημιουργήθηκε από συνδυασμό Μαθηματικών και Τεχνολογίας χρησιμοποιούμενο ως περιβάλλον μάθησης αναμένεται να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάσουν ποιοτικές και δυναμικές σημασίες Μαθηματικών εννοιών.

Αναφορές

- ACM, (1991). *Computing Curricula 1991. Report of the ACM/IEEE-CS Joint Curriculum Task Force*. [Http://www.acm.org/education/cc91/eab1.Htm9](http://www.acm.org/education/cc91/eab1.Htm9)
- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop, K. Klements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds), *International Handbook on Mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer.
- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge: Alternative perspectives for Mathematics Education. In D. A. Grows, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds), *Effective Mathematics Teaching* (pp.27-46). Hillsdale, New Jersey: N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates.
- Beattys, B. C. & Maher A.C. (1985). Approaches to learn area measurement and its relation to spatial skill. *Proceedings of the 7th PME N.A* (pp. 2-7). Columbus Ohio.
- Confrey, J. (1995). How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?. In L.P. Steffe & J. Gale (Eds), *Constructivism in Education* (pp. 185-226). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Chapra, S. C., & Canale, P. R. (1990). *Numerical Methods for Engineers* (2nd ed.). Singapore: McGraw-Hill.
- Hillel, J. (1992). The Notion of Variable in the Context of Turtle Graphics. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 11-36). Cambridge, Ma: MIT Press.

- Hirstein, J., Lamb, C. E., & Osborn, A. (1978). Student Misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.
- Hoyles, C. (1993). Microworlds/ schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp.1-17). Berlin: Springer-Verlag.
- Inskeep, J-J. E. (1976). Teaching Measurement to Elementary School Children. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics* (pp. 60-86). Reston, VA: N.C.T.M.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. A. Grouws (Eds), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Kidman, G., & Cooper, T. J. (1997). Area integration rules for grades 4, 6, and 8 students. *Proceedings of the 21st of PME Conference*, 3 (pp.136-143). Lathi, Finland.
- Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education*, 31, 405-422.
- Κορδάκη, Μ. (1999). Προσεγγίσεις μαθητών στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε σχήματα της ίδιας μορφής. Θα δημοσιευτεί στα πρακτικά του 4^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Γεωμετρίας ' Η έρευνα στη Γεωμετρία και στη Διδακτική της στο κατώφλι του 21^{ου} αιώνα '. Πάτρα, Μάιος 1999.
- Klotz, E. A., & Jakiw, N. (1988). *The Geometer's Sketchpad* (Software). Berkley, CA: Key Curriculum Press.
- Laborde, J-M., and Strasser, R. (1990). Cabri-Geometre: A microworld of geometry for guided discovery learning. *ZDM*, 5, 171-177.
- Maher, C.A., & Beattys, C. B. (1986). Examining the Construction of area and its Measurement by Ten to Fourteen Year old Children. In E. Lansing, G. Lappan, R. Even (Eds). *Proceedings of 8th PME Conference*, (pp. 163-168). N. A.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. N.Y: Norton & Company.
- Rahim, M. H., & Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(2), 303-308.