

Η μελέτη μη κυρτών πολυγώνων από μαθητές στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME.

Μαρία Κορδάκη

Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, e-mail: kordaki@cti.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή γίνεται παρουσίαση των στρατηγικών προετοιμασίας για μετασχηματισμό και σύγκριση ενός μη κυρτού πολυγώνου οι οποίες δημιουργήθηκαν από μαθητές με τη χρήση των εργαλείων του μικρόκοσμου C.AR.ME ο οποίος αφορά στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (Kordaki & Potari, 1998). Στους μαθητές δόθηκε το πρόβλημα του μετασχηματισμού του μη κυρτού πολυγώνου σε ισοδύναμο ως προς την επιφάνεια σχήμα και το πρόβλημα της σύγκρισής του με ένα τετράγωνο. Το μη κυρτό πολύγωνο είναι ένα σχήμα η μελέτη του οποίου από τους μαθητές έχει ενδιαφέρον λόγω του ότι αποτελεί ένα ζήτημα το οποίο δεν έχει διερευνηθεί ως τα σήμερα από ερευνητές. Από την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων προέκυψε ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν το μη κυρτό πολύγωνο ως ένωση ξένων μεταξύ τους κυρτών πολυγώνων και ως διαφορά ενός κυρτού υπερσύνολου του μη κυρτού πολυγώνου και του συμπληρώματός του ως προς αυτό το υπερσύνολο. Το κυρτό υπερσύνολο αποτέλεσε η κυρτή θήκη του μη κυρτού πολυγώνου, ένα ελάχιστο τετράγωνο και ένα ελάχιστο ορθογώνιο στα οποία εγγράφηκε το μη κυρτό πολύγωνο. Επιπλέον οι μαθητές μετασχημάτισαν αυτόματα το μη κυρτό πολύγωνο σε κυρτά γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση εργαλείων του μικροκόσμου. Οι στρατηγικές προετοιμασίας που δημιουργήθηκαν συνδέονται με τα εργαλεία τα οποία οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους καθώς και με τις μεθόδους μετασχηματισμού και σύγκρισης τις οποίες ανέπτυξαν.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της μέτρησης της επιφάνειας είναι σημαντική σε όλους τους πολιτισμούς λόγω της σχέσης της με την επιστήμη, την τεχνολογία, τον πολιτισμό αλλά και με την καθημερινή ζωή των ατόμων (Hirstein, Lamb & Osborne, 1978; Bishop, 1988). Επιπλέον χρησιμοποιείται ως μέσο για την κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών όπως η έννοια του αριθμού και συνδέει τον αφηρημένο κόσμο των αριθμών με τον συγκεκριμένο κόσμο των φυσικών αντικειμένων (Hirstein, et all 1978; Hiebert, 1981). Βασική προαπαιτούμενη έννοια της μέτρησης της επιφάνειας αποτελεί η έννοια της διατήρησης (Piaget, et al., 1981; Hiebert, 1981; Hart, 1984). Ως έννοια της διατήρησης ορίζεται 'η δυνατότητα μιας επιφάνειας να μεταβάλλεται ως προς το σχήμα χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι μεταβάλλεται και ποσοτικά' (Piaget, et all 1981; Hughes & Rogers, 1979). Η κατανόηση της μέτρησης της επιφάνειας ξεκινά από την κατανόηση της έννοιας της διατήρησης προχωρά στην κατανόηση της έννοιας της μονάδας, της επικάλυψης με

τη μονάδα και της καταμέτρησης των μονάδων με σύνθεση από τα μέρη τους όποτε αυτό απαιτείται και καταλήγει στην κατανόηση των τύπων υπολογισμού (Piaget, et all 1981; Hirstein, et all 1978; Maher & Beattys, 1986). Οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας (Baturo & Nason, 1996; Osborne, 1976). Οι δυσκολίες αυτές αφορούν σε θέματα κατανόησης των εννοιών που συνθέτουν την έννοια της μέτρησης της επιφάνειας όπως η έννοια της διατήρησης, η έννοια της μονάδας, της επικάλυψης με τη μονάδα, της σύνθεσης της μονάδας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση, της σχέσης επιφάνειας και περιμέτρου, των τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, των τύπων υπολογισμού όπως και των μετρικών συστημάτων (Hiebert, 1981; Menon, 1996; Duady & Perrin, 1986). Οι δυσκολίες των μαθητών αποδίδονται στο ότι δεν δίνεται έμφαση κατά τη διάρκεια των σχολικών πρακτικών στις έννοιες που συνθέτουν την μέτρηση της επιφάνειας αλλά γίνεται πρόωρη εισαγωγή τους στους τύπους υπολογισμού των εμβαδών (Maher & Beattys, 1986; Osborne, 1976; Menon, 1996). Με τη διαδικασία αυτή δεν δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τη διαισθητική τους γνώση για την έννοια της επιφάνειας ώστε να περάσουν ομαλά στη χρήση των τύπων υπολογισμού, με αποτέλεσμα να καταφεύγουν στην απομνημόνευσή τους. Επιπλέον, σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των εννοιών που συνθέτουν τη μέτρηση της επιφάνειας παίζει και το σχήμα το οποίο κάθε φορά μελετάται (Outhret & Mitchelmore, 1996; Liebeck, 1987; Maher & Beattys, 1986). Οι δυσκολίες των μαθητών διαφοροποιούνται ανάλογα και με το σχήμα το οποίο καλούνται να μελετήσουν. Αναφέρεται ότι οι μαθητές συναντούν πολύ μεγάλες δυσκολίες προκειμένου να μελετήσουν ακανόνιστα γεωμετρικά σχήματα (Liebeck, 1987; Maher & Beattys, 1986). Πιο συγκεκριμένα μαθητές προκειμένου να μελετήσουν επιφάνειες ακανόνιστων γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποίησαν την περίμετρο ή αριθμούς οι οποίοι αφορούσαν πλευρές αλλά και γωνίες των σχημάτων με κάθε τρόπο (Maher & Beattys, 1986). Το μη κυρτό πολύγωνο είναι ένα σχήμα του οποίου η μελέτη από τους μαθητές ως προς την επιφάνεια δεν έχει αναφερθεί από ερευνητές. Επιπλέον η μελέτη σχημάτων της μορφής αυτής αποκτά ενδιαφέρον διότι είναι μια μορφή ακανόνιστου γεωμετρικού σχήματος η μελέτη του οποίου δεν συνηθίζεται στις σχολικές πρακτικές.

Προκειμένου να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να αντιμετωπίσουν την έννοια της επιφάνειας μέσα από τις έννοιες που τη συνθέτουν όπως και να εκφράσουν τη γνώση τους σε μια ποικιλία διαφορετικών αναπαραστασιακών συστημάτων κατασκευάστηκε ο μικρόκοσμος C.AR.ME (Kordaki & Potari, 1998). Ο μικρόκοσμος αυτός αποτελεί ένα αλληλεπιδραστικό δυναμικό περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Ο σχεδιασμός του έγινε με βάση το γνωσιοθεωρητικό πλαίσιο του εποικοδομισμού σε συνδυασμό με την κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση για τη γνώση (Bauersfeld, 1988; Confrey, 1995). Στο

περιβάλλον αυτό υπάρχουν μια σειρά εργαλεία για την ποιοτική, την δυναμική, και την αριθμητική μελέτη εννοιών που αφορούν στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (Kordaki & Potari, 1998).

Σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία του παραπάνω μικρόκοσμου ζητήθηκε από τους μαθητές να μετασχηματίσουν ένα μη κυρτό πολύγωνο σε άλλο σχήμα με το ίδιο ποσό επιφάνειας καθώς και να το συγκρίνουν με ένα τετράγωνο. Τα σχήματα ήταν τέτοια ώστε η σύγκριση με το μάτι να μην είναι εύκολη. Και τα δύο προβλήματα κλήθηκαν να επιλύσουν οι μαθητές με όλους τους δυνατούς τρόπους. Τα παραπάνω προβλήματα δεν έχουν χρησιμοποιηθεί σε άλλες έρευνες. Γενικά τα προβλήματα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης αναφέρονται ως κατάλληλα προβλήματα προκειμένου να δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν ή να κατασκευάσουν έννοιες που αφορούν στη διατήρηση ή στη μέτρηση της επιφάνειας (Carpenter, Coburn, Reys & Wilson, 1975; Hiebert, 1981). Επιπλέον η επίλυση ενός προβλήματος με όλους τους δυνατούς τρόπους δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τις εσωτερικές τους διαφοροποιήσεις που αφορούν στις έννοιες που συνθέτουν το πρόβλημα (Weir, 1992; Lemerise, 1992).

Η μεθοδολογία και τα ερωτήματα της έρευνας

Η έρευνα αυτή αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Cohen & Manion, 1989; Stenhouse, 1989) στην οποία διερευνάται το είδος των στρατηγικών κυρτοποίησης ενός μη κυρτού πολυγώνου τις οποίες κατασκευάζουν οι μαθητές σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία του μικρόκοσμου C.AR.ME. και αποτελεί μέρος της συνολικής έρευνας αξιολόγησής του (Κορδάκη, 1999). Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολείο της Πάτρας. Συμμετείχαν σε αυτήν τα παιδιά μιας τάξης της Β' γυμνασίου (29 παιδιά). Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τα ηλεκτρονικά αρχεία καταγραφής των δράσεων των μαθητών με το λογισμικό (log. files), οι ηλεκτρονικές εικόνες των μετασχηματισμών και των συγκρίσεων που πραγματοποίησαν, τα χειρόγραφα πρωτόκολλα καθώς και οι κασέτες μαγνητοφώνου στις οποίες καταγράφηκε οτιδήποτε ειπώθηκε από τους μαθητές ή την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της έρευνας. Η ερευνήτρια συμμετείχε ως παρατηρητής με την ελάχιστη δυνατή συμμετοχή.

Ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων

Οι μαθητές προκειμένου να μελετήσουν το μη κυρτό πολύγωνο χρησιμοποίησαν στρατηγικές κυρτοποίησης οι οποίες εντάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες

Κατηγορία 1. Κυρτοποίηση ύστερα από τεμαχισμό του μη κυρτού πολυγώνου σε κυρτά μέρη. Οι μαθητές προκειμένου να μελετήσουν το μη κυρτό πολύγωνο ως προς την επιφάνεια το χώρισαν σε ξένα μεταξύ τους κυρτά σχήματα. Τα σχήματα αυτά στις

περισσότερες περιπτώσεις ήταν μόνο τρίγωνα ορισμένες φορές όμως ήταν συνδυασμός τριγώνου και τραπεζίου. Οι λόγοι για τους οποίους έγινε αυτός ο τεμαχισμός ήταν :

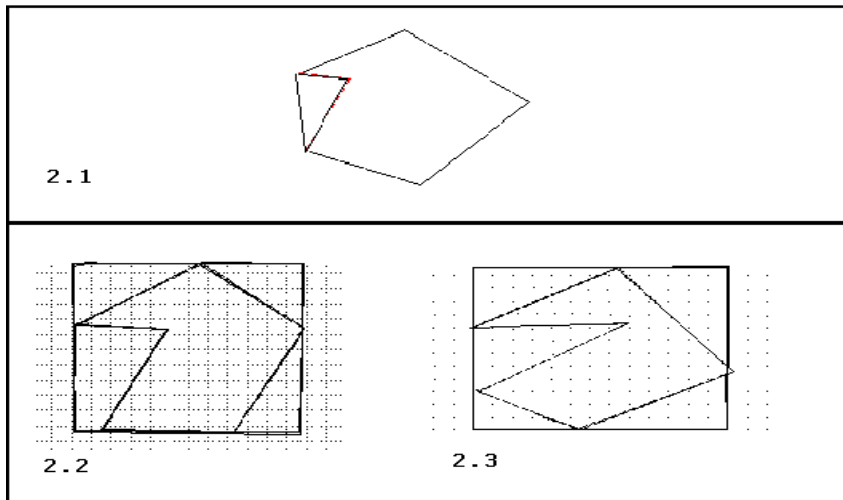
Α) Ο υπολογισμός του εμβαδού του μη κυρτού πολυγώνου ως άθροισμα των εμβαδών των μερών του. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν διαφορετικά εργαλεία προκειμένου να μετρήσουν τα κυρτά μέρη του μη κυρτού πολυγώνου και στη συνέχεια να το μετασχηματίσουν σε ισοδύναμο σχήμα ή να το συγκρίνουν με το προς σύγκριση τετράγωνο. Μέτρησαν τα μέρη με τη χρήση της αυτόματης λειτουργίας της μέτρησης, με τη χρήση της λειτουργίας της μέτρησης (τετραγωνικό ή και ορθογώνιο καρέ) που διατίθεται από το μικρόκοσμο, με τους τύπους υπολογισμού των εμβαδών (τριγώνου και τραπεζίου) καθώς και με συνδυασμό λειτουργίας της μέτρησης (τετραγωνικού καρέ) ή αυτόματης μέτρησης και τύπων υπολογισμού. Ο συνδυασμός λειτουργίας της μέτρησης και τύπων υπολογισμού παρατηρήθηκε μόνον κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος του μετασχηματισμού ενώ όλες οι υπόλοιπες στρατηγικές μέτρησης που προαναφέρθηκαν χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση και των δύο προβλημάτων.

β) Ο μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου ως σύνθεση των μετασχηματισμένων κυρτών μερών του. Τα μέρη στα οποία είχε αρχικά τεμαχιστεί το μη κυρτό πολύγωνο μετασχηματίστηκαν αυτόματα σε καθιερωμένα γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνα και ορθογώνια) με τη χρήση των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο. Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία θεωρούν το μη κυρτό πολύγωνο ως ένωση μεταξύ τους κυρτών υποσυνόλων του.

Κατηγορία 2. Κυρτοποίηση ύστερα από διαδικασίες εγκλεισμού του μη κυρτού πολυγώνου σε ένα ελάχιστο κυρτό υπερσύνολο

2.1. Κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου με τη δημιουργία της κυρτής θήκης του και αφαίρεση από αυτήν του συμπληρώματός του ως προς την κυρτή θήκη. Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να εκφράζουν μια διαισθητική προσέγγιση της επιφάνειας ενός μη κυρτού πολυγώνου ως αφαίρεσης δύο κυρτών πολυγώνων. Της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου και του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή του θήκη. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε με τη χρήση των εργαλείων που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες του παιδιού σε συνδυασμό με τις λειτουργίες σχεδίασης που διατίθενται από το περιβάλλον του μικρόκοσμου (Κορδάκη, 1999). Στο σχήμα 2 παρατίθενται σχήματα των μαθητών τα οποία αναφέρονται στο είδος της κυρτοποίησης που προαναφέρθηκε.

2.2. Κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου με εγκλεισμό του στο ελάχιστο τετράγωνο, και αφαίρεση από αυτό του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς το αυτό το τετράγωνο. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές σε συνδυασμό με τη λειτουργία της μέτρησης αλλά και με την αυτόματη μέτρηση προκειμένου να υπολογισθούν τα εμβαδά των δύο συνόλων.



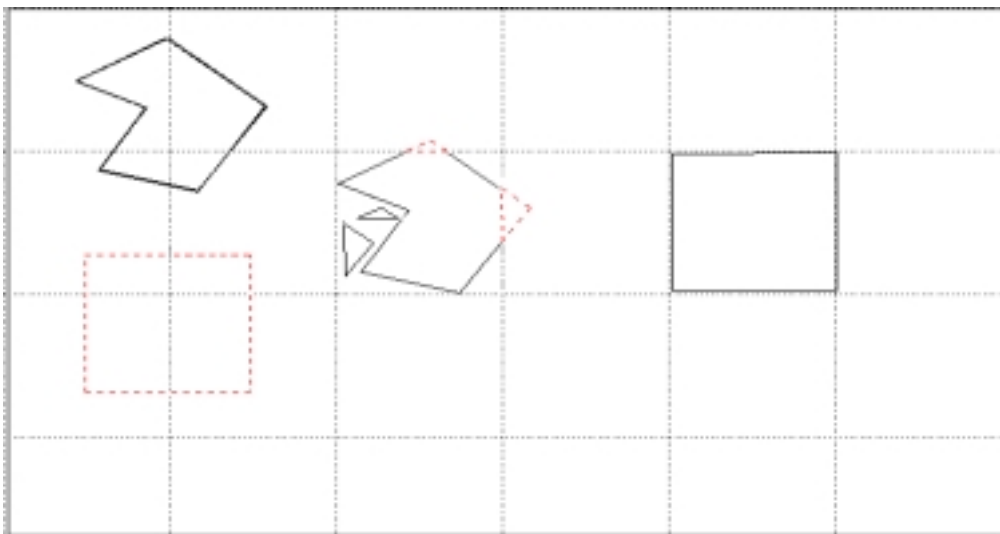
Σχήμα 2. Εικόνες στρατηγικών κυρτοποίησης που εντάχθηκαν στην κατηγορία 2

2.3 Κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου με εγκλεισμό του στο ελάχιστο ορθογώνιο, και αφαίρεση από αυτό του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς το αυτό το ορθογώνιο. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές σε συνδυασμό με τη λειτουργία της μέτρησης. Η λειτουργία της μέτρησης χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές προκειμένου να υπολογίσουν τα εμβαδά των δύο συνόλων και χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση και των δύο προβλημάτων που τέθηκαν. Για τη λειτουργία της μέτρησης χρησιμοποιήθηκε ο τετραγωνικός καμβάς ο οποίος επίσης χρησιμοποιήθηκε και ως εργαλείο σχεδίασης καθέτων και παραλλήλων ευθ. τμημάτων.

Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις δύο τελευταίες στρατηγικές φαίνεται να έχουν κατανοήσει: α) την επιφάνεια ως τη διαφορά του συμπληρώματός της ως προς ένα ελάχιστο τετράγωνο ή ορθογώνιο υπερσύνολο από αυτό το υπερσύνολο β) την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό σε μέρη και ανασύνθεση των μερών. Στο σχήμα 2 παρατίθενται σχήματα μαθητών που αναφέρονται στις δύο στρατηγικές κυρτοποίησης που προαναφέρθηκαν.

2.4. Εγκλεισμός του μη κυρτού πολυγώνου και του τετραγώνου στα κελία του "καρέ του μαθητή". Σύγκριση μέσω της σύγκρισης των συμπληρωμάτων των δύο σχημάτων ως προς αυτά τα κελία. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται. α) Χρήση του "καρέ του μαθητή" που διατίθεται από το μικρόκοσμο. Η μονάδα του καρέ κατασκευάστηκε έτσι, ώστε να αποτελεί μια καλή προσέγγιση του τετραγώνου. β) Τοποθέτηση του τετραγώνου και του μη κυρτού πολυγώνου σε χωριστά κελία του καρέ. γ) Κοπή των εξεχόντων μερών του μη κυρτού πολυγώνου και επικόλλησή τους στο κελίο του καρέ. Η τοποθέτηση των σχημάτων και η κοπή των εξεχόντων μερών πραγματοποιήθηκε με τη χρήση των εργαλείων που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών στο περιβάλλον του μικρόκοσμου δ) Σύγκριση των παραπάνω επιφανειών μέσω της σύγκρισης των συμπληρωμάτων τους ως προς τα κελία του "καρέ του μαθητή".

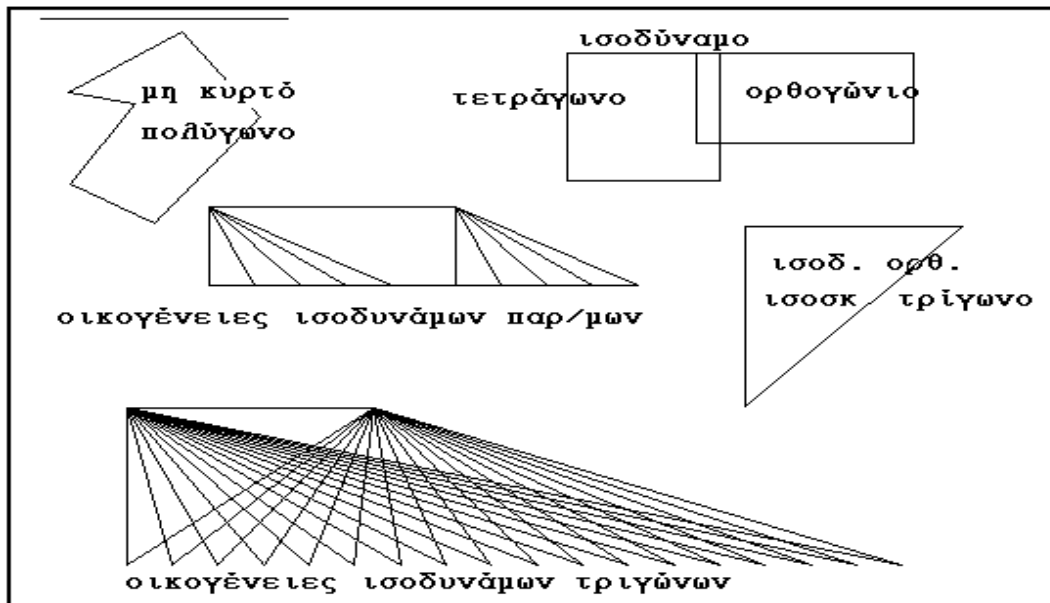
Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να έχουν κατανοήσει: α) την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση. β) τη σχέση μεγέθους επιφανειών ως αντίστροφη σχέση των μεγεθών των συμπληρωμάτων τους ως προς μια περικλείουσα επιφάνεια. Στο σχήμα 3 παρατίθεται σχήμα μαθητή που αναφέρεται στην παραπάνω στρατηγική κυρτοποίησης



Σχήμα 3. Στρατηγικές κυρτοποίησης που εντάχθηκαν στην κατηγορία 2

Κατηγορία 3. Αυτόματη κυρτοποίηση

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις αυτόματες λειτουργίες μετασχηματισμού του μη κυρτού πολυγώνου σε κυρτά γεωμετρικά σχήματα καθιερωμένης μορφής (τετράγωνο, ορθογώνιο, ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο, οικογένειες παραλληλογράμμων και τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη) προκειμένου να μετασχηματίσουν το μη κυρτό πολύγωνο σε άλλα ισοδύναμα ως προς την επιφάνεια σχήματα. Οι ίδιες λειτουργίες χρησιμοποιήθηκαν και στην επίλυση του προβλήματος της σύγκρισης. Στην περίπτωση αυτή το μη κυρτό πολύγωνο μετασχηματίστηκε αυτόματα σε συνδυασμό και με τον αυτόματο μετασχηματισμό του τετραγώνου σε σχήματα της ίδιας μορφής προκειμένου να γίνει σύγκριση ομοίων σχημάτων ύστερα από επίθεση με χρήση των προσομοιωμένων αισθησιοκινητικών ενεργειών των παιδιών στο μικρόκοσμο καθώς και ύστερα από αυτόματη επίθεση. Η αυτόματη επίθεση πραγματοποιείται έτσι ώστε η μια κορυφή του ενός σχήματος και οι προσκείμενες πλευρές της να εφάπτονται με μια κορυφή και τις αντίστοιχες προσκείμενες πλευρές του άλλου σχήματος. Επιπλέον το μη κυρτό πολύγωνο μετασχηματίστηκε αυτόματα σε καθιερωμένα γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνο, ορθογώνιο ή ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο) τα οποία στη συνέχεια μετρήθηκαν με τη χρήση μονάδων μέτρησης (τετραγωνική και ορθογώνια μονάδα ή καρτέ αντίστοιχα) με επικάλυψή τους καθώς επίσης και με τη χρήση της αυτόματης λειτουργίας της μέτρησης που διατίθεται από το μικρόκοσμο. Στο σχήμα 4 παρατίθενται σχήματα μαθητών που αναφέρονται στις παραπάνω στρατηγικές κυρτοποίησης



Σχήμα 4. Στρατηγικές κυρτοποίησης που εντάχθηκαν στην κατηγορία 3.

Κατηγορία 4. Μελέτη του μη κυρτού πολυγώνου χωρίς διαδικασίες κυρτοποίησης

Οι μαθητές μελέτησαν το μη κυρτό πολύγωνο χωρίς να το μετασχηματίσουν με κάποιο τρόπο σε κυρτό σχήμα στις περιπτώσεις όπου χρησιμοποίησαν τις παρακάτω στρατηγικές μετασχηματισμού και σύγκρισης.

A) *Μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με το 'μάτι'*. Οι μαθητές κατασκεύασαν ένα σχήμα κατά τη γνώμη τους ισοδύναμο με το μη κυρτό πολύγωνο και με το 'μάτι' αιτιολόγησαν την ισοδυναμία των σχημάτων. Η ίδια αιτιολόγηση χρησιμοποιήθηκε και σε ορισμένες στρατηγικές σύγκρισης που ακολουθήθηκαν. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί μια πρωταρχική προσέγγιση στην έννοια της επιφάνειας και υπονοεί αδυναμία δημιουργίας οποιασδήποτε μεθόδου σύγκρισης ή μετασχηματισμού (Carpenter, 1975)

B) *Μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με βάση την περίμετρο*. Οι μαθητές κατασκεύασαν ένα σχήμα με την ίδια περίμετρο με το μη κυρτό πολύγωνο και θεώρησαν ότι τα δύο σχήματα είναι ισοδύναμα ως προς την επιφάνεια. Στο πρόβλημα της σύγκρισης οι μαθητές μέτρησαν τις περιμέτρους των δύο σχημάτων και με βάση τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων αποφάσισαν για το πιο σχήμα είναι το μεγαλύτερο. Οι προσεγγίσεις με βάση την περίμετρο υπονοούν σύγκριση μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου ή μια προσπάθεια ατελούς προσέγγισης στους τύπους υπολογισμού των εμβαδών (Κορδάκη, 1999; Baturu & Nason, 1996; Hart, 1984).

Γ) *Μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με χρήση της λειτουργίας της μέτρησης*. Οι μαθητές δεν προχώρησαν σε διαδικασίες κυρτοποίησης του μη κυρτού πολυγώνου στις περιπτώσεις όπου το μέτρησαν με τη χρήση μιας μονάδας μέτρησης. Στις περιπτώσεις αυτές η μονάδα χρησιμοποιήθηκε για την επικάλυψη του μη κυρτού πολυγώνου χωρίς κενά και επικαλύψεις και έγινε καταμέτρηση των μονάδων με σύνθεσή τους από τα μέρη τους όπου αυτό ήταν αναγκαίο.

Δ) *Μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με τη χρήση των προσομοιωμένων αισθησιοκινητικών ενεργειών των παιδιών στο περιβάλλον του μικρόκοσμου*. Οι μαθητές μετασχημάτισαν το μη κυρτό πολύγωνο σε ισοδύναμο σχήμα ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση χρησιμοποιώντας τις λειτουργίες της παράλληλης μετατόπισης, της στροφής ως προς γωνία και σημείο στροφής, καθώς και με την κατασκευή του συμμετρικού του ως προς άξονα συμμετρίας. Επιπλέον οι μαθητές σύγκριναν το μη κυρτό πολύγωνο με το τετράγωνο με επίθεση του ενός πάνω στο άλλο με τις ενέργειες που προαναφέρθηκαν.

E) *Μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με χρήση της αυτόματης λειτουργίας της μέτρησης*.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται συνοπτικά οι στρατηγικές κυρτοποίησης που πραγματοποιήθηκαν από τους μαθητές σε συνδυασμό με τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για το μετασχηματισμό ή τη σύγκριση επιφανειών

Στρατηγικές κυρτοποίησης ενός μη κυρτού πολυγώνου	Μέθοδοι μετασχηματισμού ή σύγκρισης
Τεμαχισμός	<ul style="list-style-type: none"> • Αυτ. Μέτρηση • Λειτουργία μέτρησης • Τύποι υπολογισμού • Συνδυασμοί μεθόδων μέτρησης • Αυτόματος μετασχ/μός των μερών
Εγκλεισμός	<ul style="list-style-type: none"> • Στην κυρτή θήκη & αισθ. ενέργειες • Στο ελάχιστο τετράγωνο & μετρήσεις • Στο ελάχιστο ορθογώνιο & μετρήσεις • Στα κελλία του 'καρέ του μαθητή' & αισθ.ενέργειες
Αυτόματη κυρτοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> • Επίθεση με αισθ/κές ενέργειες • Αυτόματη επίθεση • Λειτουργία μέτρησης • Αυτ. μέτρηση
Χωρίς κυρτοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> • Με το 'μάτι' • Με την περίμετρο • Με τις προσομ. Αισθ/κές ενέργειες • Με τη λειτουργία της μέτρησης • Με την αυτ. Λειτουργία της μέτρησης

Πίνακας 1. Η επεξεργασία ενός μη κυρτού πολυγώνου

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων προέκυψε ότι το μη κυρτό πολύγωνο είναι ένα σύνθετο σχήμα το οποίο οι μαθητές αντιμετώπισαν με μια ποικιλία από μεθόδους. Οι μέθοδοι αυτές συνδέθηκαν με το είδος των εργαλείων τα οποία είχαν στη διάθεσή τους καθώς και με το είδος των στρατηγικών επίλυσης τις οποίες κατασκεύασαν προκειμένου να το μετασχηματίσουν σε άλλο ισοδύναμο σχήμα ή και να το συγκρίνουν με άλλο σχήμα καθιερωμένης γεωμετρικής μορφής. Η ανάγκη για τη θεώρηση του μη κυρτού πολυγώνου ως ένωση σχημάτων συνδέθηκε με την ανάγκη της μέτρησής του.

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκαν όλοι οι δυνατοί τρόποι μέτρησης. Οι διαδικασίες εγκλεισμού συνδέθηκαν με προσεγγίσεις διαισθητικού περιεχομένου όπως και με τη λειτουργία της μέτρησης. Η αυτόματη κυρτοποίηση συνδέθηκε με διαισθητικές προσεγγίσεις όπως η επίθεση, με την αυτόματη μέτρηση και τη λειτουργία της μέτρησης. Οι μαθητές αντιμετώπισαν το μη κυρτό πολύγωνο ως έχει στην περίπτωση που χρησιμοποίησαν μεθόδους που στηρίζονταν στην οπτική τους αντίληψη όπως συγκρίσεις και μετασχηματισμοί με το 'μάτι', στα γραμμικά στοιχεία των σχημάτων όπως η περίμετρος, στη διαισθητική τους γνώση με τη χρήση των αισθησιοκινητικών τους ενεργειών και στη λειτουργία της μέτρησης με την επικάλυψη με τη μονάδα.

Αναφορές

- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge: Alternative perspectives for Mathematics Education. In D. A. Grows, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds), *Effective Mathematics Teaching* (pp.27-46). Hillsdale, New Jersey: N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Carpenter, T. P. (1975). Measurement concepts of first-and second-grade students. *Journal for research in Mathematics Education*, 6(1), 3-13.
- Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W., (1975). Notes from National Assessment: basic concepts of area and volume. *Arithmetic Teacher*, 22 (6), 501-507.
- Confrey, J. (1995). How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?. In L.P. Steffe & J. Gale (Eds), *Constructivism in Education* (pp. 185-226). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cohen, L., & Manion, L. (1989). *Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Douady, R., & Perrin, M-J (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of 10 PME Conference*, (pp. 253-258). London, England.
- Hart, K. (1984). Which comes first - Length, Area, or Volume?. *Arithmetic Teacher*, 31(9), 16-18, 26-27.
- Hiebert, J. (1981). Units of measure: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28 (6), 38-43.
- Hirstein, J., Lamb, C. E., & Osborn, A. (1978). Student Misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.

- Hughes, E. R., & Rogers, J., (1979). The concept of area. In Macmillan Education (Eds), *Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science* (pp. 78-135). Schools Council Research Studies.
- Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education*, 31, 405-422.
- Κορδάκη, Μ. (1999). *Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού*. Διδακτορική διατριβή, Πάτρα, Μάιος, 1999.
- Lemerise, T. (1992). On Intra Interindividual Differences in Children's Learning Styles. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 191-222). Cambridge, Ma: MIT Press.
- Liebeck, P. (1987). Measurement. In *How children learn mathematics*, (pp. 125-220). Middlesex: Penguin books Ltd.
- Maher, C.A., & Beattys, C. B. (1986). Examining the Construction of area and its Measurement by Ten to Fourteen Year old Children. In E. Lansing, G. Lappan, R. Even (Eds). *Proceedings of 8th PME Conference*, (pp. 163-168). N. A.
- Menon, R. (1996). Assessing preservice teachers' conceptual understanding of perimeter and area. In *Proceedings of the 20th of PME Conference*, 1 (pp.184). Valencia, Spain.
- Osborne, A. R. (1976). Mathematical Distinctions in the Teaching of Measure. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics*, (pp. 11-33). Reston, VA: N.C.T.M.
- Outhred, L., & Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. *Proceedings of the 20th of PME Conference*, 4 (pp.91-98). Valencia, Spain.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. N.Y: Norton & Company.
- Stenhouse, L. (1989). *An Introduction to Curriculum Research and Development*. G.B.: Heinemann Educational Books Ltd.
- Weir, S. (1992). LEGO-Logo: A Vehicle for Learning. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 165-190). Cambridge, Ma: MIT Press.

Students strategies to face a non-convex polygon in the C. AR.ME. microworld

Maria Kordaki

Counselor of secondary mathematics teachers

Abstract

In this study students manipulation strategies of a non convex polygon area are presented. These strategies were constructed from the students by using the tools of the C.AR.ME microworld (Kordaki & Potari, 1998). Students developed these methods in order to face two problems. The problem of transformation of a non convex polygon to another shape with equal area and the problem of comparison of the above polygon with a square. The non convex polygon is an interesting shape and there are no literature references for students studies. From the analysis and interpretation of data is concluded that children faced the non convex polygon in different ways: As the union of convex and non-overlapping contiguous regions yields the non convex polygon and as a subtraction from its minimum enclosing convex superset, the polygon's complement of this superset. The convex superset consisted from the minimum convex irregular shape, the minimum square or rectangle which were enclosed the non convex polygon. Another way that children used was the automatic transformation of the non convex polygon by using the tools which are offered from the C. AR. ME microworld for automatic transformations to standard convex geometrical shapes. All these manipulation strategies are related with the tools that were available to the children and with the transformation or comparison strategies which they developed.