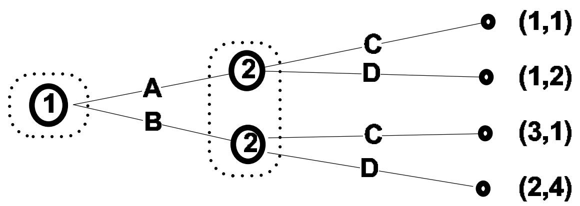
Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι
Εξέταση Φεβρουαρίου 2004

Λ. Κυρούσης Π. Σπυράκης

Θέμα 1 (25%)

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά ένα παίγνιο σε εκτατική (extensive) μορφή. Τα πλαίσια με τις διακεκομμένες γραμμές καθορίζουν τις καταστάσεις πληροφόρησης.



(α) Είναι το παιχνίδι αυτό τέλειας πληροφόρησης και γιατί;

(β) Να αναπαραστήσετε το παίγνιο αυτό σε κανονική (στρατηγική) μορφή.

Θέμα 2 (25%)

Έστω G ένα παίγνιο σε στρατηγική (κανονική) μορφή με παίκτες $\{1, 2, \ldots, n\}$, σύνολα αγνών (pure) στρατηγικών S_i και συναρτήσεις ωφέλειας (κέρδους) u_i για τους παίκτες $i = 1, \ldots, n$, αντίστοιχα.

(α) Να ορίσετε προσεκτικά τις έννοιες κυριαρχούμενης αγνής στρατηγικής (dominated pure strategy) και βέλτιστης αντίδρασης (best response).

Έστω G^* ένα παίγνιο που προκύπτει από το G με αφαίρεση μίας κυριαρχούμενης αγνής στρατηγικής s_{dom} από έναν παίκτη, έστω τον $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Δηλαδή αν $S_i^*, i = 1, \ldots, n$ είναι τα σύνολα στρατηγικών του G^*, τότε $S_i^* = S_i$ για $i \neq i_0$ και $S_{i_0}^* = S_{i_0} - \{s_{\mathrm{dom}}\}$.

(β) Θεωρούμε έναν αυθαίρετο παίκτη $i \in \{1, \ldots, n\}$ (ενδεχομένως $i = i_0$ και ενδεχομένως $i \neq i_0$). Έστω μ_{-i}^* μία εκτίμηση (belief) του παίκτη i για τα περιγράμματα αγνών στρατηγικών των υπολοίπων παικτών (πλην του i) στο παίγνιο G^*. Ορίζουμε την εκτίμηση μ_{-i} στο παίγνιο G ως ακολούθως: οι μ_{-i} και μ_{-i}^* δίνουν την ίδια πιθανότητα για τα περιγράμματα των παικτών $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ τα οποία είναι κοινά στα παίγνια G και G^*, ενώ η μ_{-i} δίνει πιθανότητα 0 σε τυχόν περιγράμματα του G που δεν είναι περιγράμματα του G^* (για τους παίκτες $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$). Να αποδείξετε ότι για κάθε αγνή στρατηγική $s \in S_i^*$, αν η s είναι βέλτιστη αντίδραση του παίκτη i στο παίγνιο G^* για την εκτίμηση μ_{-i}^*, τότε η s είναι βέλτιστη αντίδραση του παίκτη i στο παίγνιο G για την εκίμηση μ_{-i}.

Υπόδειξη: Το ζητούμενο είναι προφανές εάν $i \neq i_0$ (εξηγήστε όμως γιατί). Όταν $i = i_0$ τότε πρέπει επίσης να αποδειχθεί ότι:

$$u_i(s, \mu_{-i}) \geq u_i(s_{\text{dom}}, \mu_{-i}).$$

Αποδείξτε την τελευταία σχέση ερμηνεύοντας τι σημαίνει ότι η στρατηγική s_{dom} είναι κυριαρχούμενη.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε κυριαρχούμενη στρατηγική του G (οποιουδήποτε παίκτη, διαφορετική όμως της s_{dom}) είναι επίσης κυριαρχούμενη στρατηγική του G^*.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα ότι μία στρατηγική είναι κυριαρχούμενη αν και μόνον αν δεν είναι βελτίστη αντίδραση για οποιαδήποτε εκτίμηση.

Θέμα 3

Έστω n παίκτες $(1, \ldots, n)$, ο καθένας έχοντας μία εργασία προς εκτέλεση μεγέθους w_i bytes $(i = 1 \ldots n)$. Έστω m πανομοιότυπες μηχανές $(M_1, \ldots M_m)$. Μία αγνή στρατηγική του κάθε παίκτη είναι η τοποθέτηση της εργασίας του σε κάποια μηχανή. Έστω $\Pi = \{1, \ldots, n\}, M = \{M_1, \ldots, M_m\}$. Μία αγνή (pure) στρατηγική του συνόλου των παικτών είναι μία συνάρτηση

$$A : \Pi \to M$$

έτσι ώστε $\forall i, A(i) = M_j \in M$ για κάποιο j.
Δοθήσης της A, το εγωιστικό κόστος του παίκτη i είναι το άθροισμα $\sum_{A(i)}$ όλων των w_k που έχουν πάει στη μηχανή $A(i)$. Δηλαδή η χρησιμότητα (payoff) του παίκτη i είναι το $-\sum_{A(i)}$.

Ερώτημα 3A (25%)

Για 3 παίκτες και 2 μηχανές αποδείξτε ότι το παίγνιο έχει τουλάχιστον μία *αγνή* (pure) ισορροπία Nash.
Υπόδειξη: Φανταστείτε ότι τοποθετείτε τις εργασίες μία μία.

Ερώτημα 3B (25%)

Για κάθε παίκτη i, μία μικτή στρατηγική είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων

$$p_i^j = \text{Prob}\{\text{ο } i \text{ βάζει την εργασία του στη μηχανή } M_j\}.$$

Το Support του παίκτη i είναι το σύνολο $S_i = \{j : p_i^j > 0\}$.
Δηλαδή, στις μικτές ισορροπίες Nash ο κάθε παίκτης ελαχιστοποιεί το εγωιστικό κόστος του

$$\lambda_i^j = w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j$$

στις μηχανές $M_j : j \in S_i$.

(α) Δείξτε ότι αν $\forall i \quad S_i = \{1, 2, \ldots, m\}$ τότε η στρατηγική

$$\forall i \forall j \quad p_i^j = \frac{1}{m}$$

είναι ισορροπία Nash.

(β) Για 2 παίκτες και 2 μηχανές βρείτε όλες τις ισορροπίες Nash (αγνές και μικτές).

Καλή Επιτυχία