

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι
Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου 2009

Θέμα 1. Θεωρούμε πλειστηριασμό δεύτερης προσφοράς, με δύο παίκτες 1 και 2, όπου η κρυφή υποκειμενική αξία του προς πλειστηριασμό αντικειμένου είναι v_1 και v_2 , για τους παίκτες 1 και 2, αντίστοιχα. Έστω ακόμη u_1 και u_2 οι συναρτήσεις ωφελείας των παικτών. Τέλος, έστω x η προσφορά του παίκτη 1. Να αποδείξετε με προσοχή ότι αν $x > v_1$ τότε για οποιαδήποτε προσφορά b_2 του παίκτη 2 τέτοια ώστε $b_2 < x$ ισχύει ότι $u_1(x, b_2) < u_1(v_1, b_2)$ (ανάλογη σχέση ισχύει και στις άλλες περιπτώσεις, αλλά καλείστε να την αποδείξετε μόνο στην περίπτωση που περιγράφεται).

Θέμα 2. Να αποδείξετε με προσοχή ότι για κάθε συνάρτηση $f(x, y)$ δύο μεταβλητών όπου το x παίρνει τιμές σε ένα σύνολο C_1 και το y σε ένα σύνολο C_2 ισχύει ότι:

$$\max_{x \in C_1} \min_{y \in C_2} f(x, y) \leq \min_{y \in C_2} \max_{x \in C_1} f(x, y) .$$

Θέμα 3. Δύο παίκτες, ο παίκτης 1 και ο παίκτης 2, επιλέγουν ο καθένας από έναν φυσικό αριθμό μεταξύ 1 και K . Αν οι παίκτες επιλέξουν τον ίδιο αριθμό, τότε κερδίζει ο παίκτης 1 και παίρνει 1 ευρώ από τον παίκτη 2. Αν οι παίκτες επιλέξουν διαφορετικούς αριθμούς τότε δεν κερδίζει κανένας.

- (α) Να αποδείξετε ότι το παίγνιο έχει μια μικτή ισορροπία Nash στην οποία κάθε παίκτης επιλέγει με ίση πιθανότητα κάθε αριθμό από 1 έως K .
- (β) Δείξτε ότι το παίγνιο δεν έχει άλλη ισορροπία Nash.

Θέμα 4. Δίνεται ένα δίκτυο με δύο παράλληλες ακμές e_1 και e_2 από έναν κόμβο-πηγή s προς έναν κόμβο-προορισμό t . Η καθυστέρηση στην ακμή e_1 ισούται με το συνολικό φορτίο που διέρχεται από την e_1 , ενώ η καθυστέρηση στην ακμή e_2 ισούται με δύο φορές το συνολικό φορτίο που διέρχεται από την e_2 . Θεωρήστε n χρήστες, κάθε ένας από τους οποίους έχει ένα φορτίο μεγέθους 1, οι οποίοι επιθυμούν να δρομολογήσουν τα φορτία τους από το s στο t . Το κόστος για ένα χρήστη είναι η συνολική καθυστέρηση στην ακμή που επιλέγει.

- (α) Βρείτε μια αγνή ισορροπία Nash και εξηγήστε γιατί είναι ισορροπία.
- (β) Έστω (n_1, n_2) το περίγραμμα αγνών στρατηγικών όπου n_1 παίκτες επιλέγουν την ακμή e_1 και n_2 παίκτες επιλέγουν την ακμή e_2 . Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$\Phi(n_1, n_2) = \frac{n_1^2}{2} + n_2^2 + \frac{n_1}{2} + n_2$$

είναι συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Καλή Επιτυχία.