

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι
Εξεταστική Περίοδος Ιανουαρίου-Φεβρουαρίου 2012

Θέμα 1 (20%) Θεωρήστε το παρακάτω παίγνιο διπύνακα.

	B	S	X
B	4, 2	0, 0	0, 1
S	0, 0	2, 4	1, 3

Να βρείτε όλες τις ισορροπίες Nash στις οποίες το στήριγμα κάθε παίκτη έχει μέγεθος τουλάχιστον 2.

Θέμα 2 (20%) Ένα προϊόν παράγεται από 2 βιομηχανίες B_1 και B_2 . Το κόστος για τη βιομηχανία B_i όταν παράγει q_i μονάδες προϊόντος είναι $C_i(q_i) = q_i^2$. Όλη η ποσότητα προϊόντος Q που παράγεται πωλείται στην τιμή $P(Q) = a - Q$ ανά μονάδα προϊόντος, για κάποια σταθερά a . Να βρείτε τις ποσότητες q_1, q_2 που πρέπει να παράξουν οι δύο βιομηχανίες ώστε να έχουμε ισορροπία.

Θέμα 3 (60%) Θεωρήστε m μηχανές με ταχύτητες επεξεργασίας $s_1, s_2, \dots, s_m$ (σε Mbytes/sec) και n χρήστες με εργασίες μεγέθους $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ (σε Mbytes). Κάθε χρήστης καλείται να επιλέξει μια μηχανή στην οποία θα αναθέσει την εργασία του. Το κόστος για ένα χρήστη είναι η συνολική καθυστέρηση στη μηχανή που επιλέγει, δηλαδή ισούται με το συνολικό φορτίο που ανατίθεται στη μηχανή που επιλέγει διά την ταχύτητα επεξεργασίας της μηχανής αυτής.

- (α) Να αποδείξετε ότι η ανάθεση των εργασιών σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο οδηγεί σε αγνή ισορροπία Nash: Εξετάζουμε τα φορτία από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, και αναθέτουμε το επόμενο φορτίο w_i στη μηχανή που ελαχιστοποιεί το κόστος του χρήστη i . (Υπόδειξη: με επαγωγή στο i .)
- (β) Για την περίπτωση που $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1$, $m = 2$, $s_1 = 1$, και $s_2 = 2$, να εξετάσετε αν υπάρχει ισορροπία Nash όπου όλοι οι χρήστες επιλέγουν με την ίδια πιθανότητα $p_1 > 0$ την πρώτη μηχανή και με την ίδια πιθανότητα $p_2 = 1 - p_1 > 0$ τη δεύτερη μηχανή.
- (γ) Για την περίπτωση που $n = m = 2$, $w_1 = w_2 = 1$, $s_1 = 1$, και $s_2 = 2$, να υπολογίσετε το κόστος της αναρχίας του συστήματος. Ως Κοινωνικό Κόστος θεωρήστε τη μέγιστη καθυστέρηση σε μια μηχανή (makespan).

Καλή επιτυχία