

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι – Εξεταστική Περίοδος Ιουλίου 2007

Θέμα 1. Έστω G ένα παίγνιο σε στρατηγική (κανονική) μορφή με παίκτες $\{1, 2, \dots, n\}$, σύνολα καθαρών (pure) στρατηγικών S_i και συναρτήσεις ωφέλειας (κέρδους) u_i για τους παίκτες $i = 1, \dots, n$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι εάν μία αγνή στρατηγική s ενός παίκτη $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ είναι κυριαρχούμενη, τότε δεν υπάρχει εκτίμηση αλήθειας μ_{-i_0} έτσι ώστε η s να είναι βελτίστη αντίδραση για την μ_{-i_0} .

Θέμα 2. Έστω ότι δύο βιομηχανίες B_1 και B_2 παράγουν το ίδιο προϊόν σε ποσότητες q_1 και q_2 , αντίστοιχα. Έστω ότι η τιμή του προϊόντος ανά μονάδα διαμορφώνεται με βάση τον τύπο $p = 1 - q_1 q_2$. Έστω επίσης ότι το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι $1/2$ και για τις δύο βιομηχανίες B_i , $i = 1, 2$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ζεύγος q_1, q_2 αποτελεί ισορροπία Nash αγνών στρατηγικών αν και μόνον αν $q_1 q_2 = 1/4$.

Θέμα 3. Έστω ένα συμμετρικό παίγνιο 2 παικτών, όπου κάθε παίκτης έχει 2 αγνές στρατηγικές (A και B) και οι ωφέλειες δίνονται από τον παρακάτω διπύνακα:

	A	B
A	a, a	b, c
B	c, b	d, d

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

- (α) Δείξτε ότι το παίγνιο έχει τουλάχιστον μία αγνή ισορροπία Nash.
- (β) Δείξτε ότι το παίγνιο έχει τουλάχιστον μία συμμετρική ισορροπία Nash (δηλαδή μια ισορροπία Nash όπου και οι δύο παίκτες επιλέγουν ακριβώς τις ίδιες στρατηγικές).
- (γ) Βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο.

Υπόδειξη: Μια συνάρτηση $\Phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ αν, για κάθε παίκτη $i \in N$ και για κάθε περίγραμμα αγνών στρατηγικών $s \in C$, ισχύει ότι

$$u_i(s) - u_i(s_{-i}, s'_i) = \Phi(s) - \Phi(s_{-i}, s'_i) \quad \forall s'_i \in C_i.$$

Θέμα 4. Έστω ένα σύνολο n παικτών $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Κάθε παίκτης $i \in N$ έχει μια εργασία μεγέθους w_i και πρέπει να επιλέξει μία από δύο διαθέσιμες μηχανές A και B ώστε να εκτελεστεί η εργασία του. Το κόστος για τον παίκτη i ισούται με το συνολικό μέγεθος των εργασιών στη μηχανή που επιλέγει διὰ το πλήθος τους. Για παράδειγμα, αν οι παίκτες 1 και 2 επιλέξουν την A και οι υπόλοιποι τη B , τότε οι παίκτες 1 και 2 πληρώνουν $\frac{w_1 + w_2}{2}$ ο καθένας, ενώ κάθε ένας από τους υπόλοιπους παίκτες πληρώνει $\frac{\sum_{j=3}^n w_j}{n-2}$. Δείξτε ότι το επαγόμενο παίγνιο έχει αγνή ισορροπία Nash αν και μόνο αν όλες οι εργασίες έχουν το ίδιο μέγεθος (δηλαδή $w_1 = w_2 = \dots = w_n$).

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Καλή Επιτυχία.