Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι

Σεπτέμβριος 2004

Ελ. Κυρούσης   Π. Σπυράκης

Θέμα 1 (10%)

Έστω n παίκτες, όπου ο καθένας έχει ως αγνή στρατηγική να διαλέξει έναν φυσικό αριθμό στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, k\}$. Ένα βραβείο ενός ευρώ μοιράζεται εξ ίσου σε όσους παίκτες έχουν διαλέξει αριθμό ο οποίος είναι ο πλησιέστερος στα 2/3 του μέσου αριθμού που έχει παιχθεί (δηλ. αν ο παίκτης i επιλέγει τον αριθμό x_i τότε ο μέσος αριθμός $x = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Δείξτε ότι το παίγνιο έχει μίαν και μοναδική (μικτή) ισορροπία Nash στην οποία ο κάθε παίκτης έχει αγνή στρατηγική.

Θέμα 2 (40%)

Ένα έγκλημα έχει n μάρτυρες (παίκτες). Κάθε παίκτης έχει κέρδος u αν η αστυνομία ειδοποιηθεί (μέσω τηλεφώνου) αλλά έχει κόστος c $(u > c > 0)$ αν ο ίδιος τηλεφωνήσει. Δηλαδή ο κάθε παίκτης έχει 2 αγνές στρατηγικές (τηλεφωνώ, όχι). Η συνάρτηση των payoffs για τον παίκτη i δίνει 0 στο profile όπου κανείς δεν καλεί, δίνει $u - c$ σε κάθε profile στο οποίο ο i καλεί και δίνει u στο κάθε profile όπου τουλάχιστον κάποιος καλεί αλλά ο παίκτης i δεν καλεί. Επίσης, η συνάρτηση των payoffs είναι η ίδια για όλους.

Ορισμός: Μια ισορροπία Nash καλείται συμμετρική αν ο κάθε παίκτης στην ισορροπία έχει την ίδια (αγνή ή μικτή) στρατηγική.

Δείξτε

(α) (10%) το παίγνιο δεν έχει αγνή συμμετρική ισορροπία Nash.

(β) (10%) το παίγνιο έχει μίαν και μόνο μικτή συμμετρική ισορροπία Nash, E.

(γ) (10%) Βρείτε τις πιθανότητες της E.

(δ) (10%) Δείξτε ότι, στην E, η πιθανότητα κανείς να μην τηλεφωνήσει αυξάνει όταν το n αυξάνει.

(ε) Σχολιάστε, όπως μπορείτε, το συμπέρασμα του (δ) από πλευράς κοινωνικής Ψυχολογίας (π.χ. είναι πιο αδιάφοροι οι μεγάλοι πληθυσμοί;)

Το (ε) έχει extra points 10%.

Θέμα 3 (25%)

(α) (10%) Να δώσετε (συγκεκριμένο) παράδειγμα παιγνίου H σε στρατηγική (κανονική) μορφή τέτοιο ώστε αν $H^{(1)}$ είναι το παίγνιο το οποίο προκύπτει από το H αν από κάθε παίκτη αφαιρέσουμε όλες τις στρατηγικές του οι οποίες είναι κυριαρχούμενες (dominated) ως προς το H, το $H^{(1)}$ εξακολουθεί να έχει κυριαρχούμενη στρατηγική (ως προς το $H^{(1)}$).

(β) (5%) Να περιγράψετε μία επαναληπτική διαδικασία απαλοιφής των κυριαρχούμενων στρατηγικών από τυχόν δοθέν παίγνιο G.

(γ) (10%) Να αποδείξετε (χρησιμοποιώντας σχετικό θεωρήμα από τις σημειώσεις) ότι αν $G^{(\infty)}$ είναι το παίγνιο που λαμβάνουμε από το G ως αποτέλεσμα της εφαρμογής της παραπάνω επαναληπτικής διαδικασίας, τότε κάθε αγνή στρατηγική s_i του $G^{(\infty)}$ είναι βέλτιστη αντίδραση σε μία τουλάχιστον εκτίμηση μ_i.

Θέμα 4 (25%)

Να αποδείξετε ότι μία μικτή στρατηγική σ_i είναι βέλτιστη αντίδραση (best response) σε μία εκτίμηση μ_i αν και μόνον αν κάθε αγνή (pure) στρατηγική στο στήριγμα (support) της σ_i (δηλαδή στο σύνολο των αγνών στρατηγικών του παίκτη i με μη μηδενική πιθανότητα στη σ_i) είναι βέλτιστη αντίδραση στην ίδια εκτίμηση μ_i.

Καλή Επιτυχία