

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι
Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου 2010

Θέμα 1. (50%) Έστω παίγνιο με σύνολο παικτών $\{1, \dots, n\}$ και συναρτήσεις ωφελείας $u_i, i = 1, \dots, n$. Λέμε ότι ένα περίγραμμα στρατηγικών $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ είναι αποδοτικό κατά Pareto αν ΔΕΝ υπάρχει περίγραμμα $s' = (s'_i)_{i=1, \dots, n}$ έτσι ώστε (α) $u_i(s'_i) \geq u_i(s_i), \forall i = 1, \dots, n$ και (β) $\exists j = 1, \dots, n : u_j(s'_j) > u_j(s_j)$. Να δώσετε αντιπαράδειγμα για κάθε μία από τις τέσσερις ακόλουθες προτάσεις:

- (1) Αν το περίγραμμα $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ είναι ισορροπία Nash τότε το s είναι αποδοτικό κατά Pareto.
- (2) Αν το περίγραμμα $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ είναι αποδοτικό κατά Pareto τότε το s είναι ισορροπία Nash.
- (3) Αν για το περίγραμμα $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ ΔΕΝ υπάρχει $j = 1, \dots, n$ τέτοιο ώστε η s_j είναι κυριαρχούμενη (dominated) τότε το s είναι αποδοτικό κατά Pareto.
- (4) Αν το περίγραμμα $s = (s_i)_{i=1, \dots, n}$ είναι αποδοτικό κατά Pareto, τότε ΔΕΝ υπάρχει $j = 1, \dots, n$ τέτοιο ώστε η s_j είναι κυριαρχούμενη (dominated).

Υπόδειξη: Για τα αντιπαράδειγματα (1) - (3) αρκεί να μελετήσετε τα περιγράμματα του παιγνίου του διλήμματος των φυλακισμένων. Για το (4) να κατασκευάσετε παίγνιο δύο παικτών, με δύο στρατηγικές ο καθένας, και κατάλληλες συναρτήσεις ωφελείας.

Θέμα 2. (25%) Τρεις παίκτες επιλέγουν έναν ακέραιο αριθμό μεταξύ 1 και 10. Αν οι τρεις επιλογές είναι ίδιες, τότε όλοι κερδίζουν ποσό ίσο με τον αριθμό που επέλεξαν. Διαφορετικά, καθένας χάνει ποσό ίσο με τον αριθμό που επέλεξε.

1. Να βρείτε όλες τις αγνές ισορροπίες Nash.
2. Να εξετάσετε αν υπάρχει ισορροπία Nash όπου κάθε παίκτης επιλέγει με πιθανότητα $p > 0$ τον αριθμό 1 και με πιθανότητα $1 - p > 0$ τον αριθμό 2.

Θέμα 3. (25%) Θεωρήστε 2 μηχανές με ταχύτητες επεξεργασίας a και b αντίστοιχα, όπου $a > b > 0$ και n χρήστες με εργασίες μεγέθους 1 ο καθένας. Κάθε χρήστης καλείται να επιλέξει μία μηχανή ώστε να εκτελεστεί η εργασία του. Το κόστος για ένα χρήστη είναι η συνολική καθυστέρηση στη μηχανή που επιλέγει. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πάντα συμμετρική ισορροπία Nash, δηλαδή (αγνή ή μίκτη) ισορροπία Nash όπου όλοι οι χρήστες επιλέγουν την ίδια στρατηγική.

Καλή Επιτυχία