

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι
Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου 2007

Θέμα 1.

Έστω G παίγνιο σε στρατηγική (κανονική) μορφή με παίκτες $\{1, 2, \dots, n\}$, σύνολα καθαρών (pure) στρατηγικών S_i και συναρτήσεις ωφέλειας (κέρδους) u_i για τους παίκτες $i = 1, \dots, n$, αντίστοιχα. Να δώσετε αντιπαράδειγμα για (ή εναλλακτικά να αποδείξετε) την ακόλουθη πρόταση: εάν μία αγνή στρατηγική $s \in S_{i_0}$ ενός παίκτη $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ κυριαρχείται από τη μίκτη στρατηγική $\sigma \in \Delta(S_{i_0})$, τότε κάθε αγνή στρατηγική $s' \in S_{i_0}$ η οποία ανήκει στο στήριγμα (support) της σ κυριαρχεί επί της s .

Θέμα 2.

Έστω ότι δύο βιομηχανίες B_1 και B_2 σχεδιάζουν να παραγάγουν το ίδιο προϊόν και ανακοινώνουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη τη δική τους τιμή για τη μονάδα του προϊόντος, έστω p_1, p_2 , αντίστοιχα, όπου $p_1, p_2 \geq 0$. Εάν $p_1 < p_2$, τότε η B_1 δέχεται παραγγελία για ποσότητα $1000 - p_1$, την οποία παράγει και διαθέτει, ενώ η B_2 δεν δέχεται παραγγελία, και επομένως δεν παράγει. Αντιστοίχως εάν $p_2 < p_1$. Τέλος αν $p_1 = p_2$ τότε και οι δύο βιομηχανίες δέχονται παραγγελίες για ποσότητα $(1000 - p_1)/2$, την οποία παράγουν και διαθέτουν. Το κόστος παραγωγής και για τις δύο βιομηχανίες είναι 100 ευρώ ανά μονάδα προϊόντος. Να γραφούν οι συναρτήσεις ωφελείας και να αποδειχθεί ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει ισορροπία Nash στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Εάν μία τουλάχιστον από τις βιομηχανίες ανακοινώσει τιμή γνησίως μικρότερη από 100 ευρώ.
- Εάν μία τουλάχιστον από τις βιομηχανίες ανακοινώσει τιμή γνησίως μεγαλύτερη από 100 ευρώ. Να διακρίνετε εδώ δύο υποπεριπτώσεις: ανακοινώνουν διαφορετικές τιμές και ανακοινώνουν την ίδια τιμή.

Με βάση τα παραπάνω να περιγράψετε μία ισορροπία Nash.

Θέμα 3. Έστω ένα παίγνιο διπίνακα $\Gamma = \langle A, B \rangle$, όπου $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Έστω οι θετικές σταθερές $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1, \lambda_2$. Δείξτε ότι το παίγνιο Γ έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο ισορροπιών Nash με το παίγνιο $\Gamma' = \langle A', B' \rangle$ όπου

$$A' = \kappa_1 \cdot A + \lambda_1$$

και

$$B' = \kappa_2 \cdot B + \lambda_2 .$$

(Δηλαδή ο πίνακας A' προκύπτει από τον A αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του με κ_1 και προσθέσουμε το λ_1 , και αντίστοιχα ο πίνακας B' προκύπτει από τον B αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του με κ_2 και προσθέσουμε το λ_2 .)

Θέμα 4. Θεωρήστε ένα δίκτυο που αποτελείται από 3 παράλληλες ακμές από έναν κόμβο-πηγή προς έναν κόμβο-προορισμό. 6 εγωιστικοί χρήστες με φορτία $w_1 = 4, w_2 = 6, w_3 = 2, w_4 = 3, w_5 = 1$ και $w_6 = 10$ επιθυμούν να δρομολογήσουν τα φορτία τους από την πηγή στον προορισμό. Η καθυστέρηση σε κάθε ακμή ισούται με το συνολικό φορτίο που διέρχεται από την ακμή.

1. Βρείτε, αν υπάρχει, μία αγνή ισορροπία Nash. Περιγράψτε πώς την υπολογίσατε και εξηγήστε γιατί είναι ισορροπία.
2. Υπάρχει ισορροπία Nash στην οποία κάθε χρήστης επιλέγει κάθε ακμή με μη μηδενική πιθανότητα; Αν ναι, υπολογίστε την αναμενόμενη καθυστέρηση για κάθε χρήστη στην ισορροπία αυτή.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Καλή Επιτυχία.