

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι
Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1. Έστω G παίγνιο σε στρατηγική (κανονική) μορφή με παίκτες $\{1, 2, \dots, n\}$, σύνολα αγνών στρατηγικών S_i και συναρτήσεις ωφέλειας (κέρδους) u_i για τους παίκτες $i = 1, \dots, n$, αντίστοιχα. Να δώσετε αντιπαράδειγμα για (ή εναλλακτικά να αποδείξετε) την ακόλουθη πρόταση: εάν μία αγνή στρατηγική $s \in S_{i_0}$ ενός παίκτη $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ κυριαρχείται από τη μικτή στρατηγική $\sigma \in \Delta(S_{i_0})$, τότε κάθε αγνή στρατηγική $s' \in S_{i_0}$ η οποία ανήκει στο στήριγμα (support) της σ κυριαρχεί επί της s .

Θέμα 2. Έστω ότι δύο βιομηχανίες B_1 και B_2 σχεδιάζουν να παραγάγουν το ίδιο προϊόν και ανακοινώνουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη τη δική τους τιμή για τη μονάδα του προϊόντος, έστω p_1, p_2 , αντίστοιχα, όπου $p_1, p_2 \geq 0$. Εάν $p_1 < p_2$, τότε η B_1 δέχεται παραγγελία για ποσότητα $1000 - p_1$, την οποία παράγει και διαθέτει, ενώ η B_2 δεν δέχεται παραγγελία, και επομένως δεν παράγει. Αντιστοίχως εάν $p_2 < p_1$. Τέλος αν $p_1 = p_2$ τότε και οι δύο βιομηχανίες δέχονται παραγγελίες για ποσότητα $(1000 - p_1)/2$, την οποία παράγουν και διαθέτουν. Το κόστος παραγωγής και για τις δύο βιομηχανίες είναι €100 ανά μονάδα προϊόντος. Να γραφούν οι συναρτήσεις ωφελείας και να αποδειχθεί ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει ισορροπία Nash στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Εάν μία τουλάχιστον από τις βιομηχανίες ανακοινώσει τιμή γνησίως μικρότερη από €100.
- Εάν μία τουλάχιστον από τις βιομηχανίες ανακοινώσει τιμή γνησίως μεγαλύτερη από €100. Να διακρίνετε εδώ δύο υποπεριπτώσεις: ανακοινώνουν διαφορετικές τιμές και ανακοινώνουν την ίδια τιμή.

Με βάση τα παραπάνω να περιγράψετε μία ισορροπία Nash.

Θέμα 3. Δίνεται ένα παίγνιο 2 παικτών με σύνολα αγνών στρατηγικών S_1 και S_2 , και δύο περιγράμματα (μικτών) στρατηγικών (a, c) και (b, c) . Έστω d η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 που ορίζεται ως εξής:

$$d(s_1) = \frac{a(s_1) + b(s_1)}{2} \quad \forall s_1 \in S_1 .$$

Να αποδειχθεί ότι αν τα (a, c) και (b, c) είναι ισορροπίες Nash τότε το περίγραμμα (d, c) είναι επίσης ισορροπία Nash.

Θέμα 4. Δίνεται ένα σύνολο N με n παίκτες, κάθε ένας από τους οποίους καλείται να επιλέξει έναν ακέραιο αριθμό από 1 έως K . Για κάθε ζεύγος παικτών i, j δίνεται ένα βάρος $w_{ij} = w_{ji} > 0$. Έστω $s_i \in \{1, \dots, K\}$ η επιλογή του παίκτη i και έστω $s = (s_1, \dots, s_n)$. Ο παίκτης i κερδίζει το άθροισμα των w_{ij} για όλους τους παίκτες j που έχουν επιλέξει τον ίδιο αριθμό με τον i . Να αποδείξετε ότι συνάρτηση

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j: s_i = s_j} w_{ij}$$

είναι συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Καλή Επιτυχία.