

Εργασία Πιθανοτήτων Ακαδημαϊκό Έτος 2012-2013

1. Σε μία σκακιέρα 8×8 τοποθετούμε με τυχαίο τρόπο 8 πύργους.
 - α) Ποιά η πιθανότητα κανένας πύργος να μην απειλείται από κάποιον άλλο πύργο; Με άλλα λόγια, να μην υπάρχει γραμμή ή στήλη με περισσότερους από 1 πύργους.
 - β) Ποιά η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς 2 πύργοι που απειλούνται;
2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν μπαταρίες δύο τύπων. Ο χρόνος διάρκειας (σε ώρες) των μπαταριών τύπου i κατά την χρήση τους ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό $\lambda_i, i = 1, 2$. Η πιθανότητα να επιλέξω μια μπαταρία τύπου i από το δοχείο, επιλέγοντας τυχαία, είναι $p_i, \sum_{i=1}^2 p_i = 1$. Για μια μπαταρία που έχω επιλέξει τυχαία και βρίσκεται σε λειτουργία για t ώρες ποιά η πιθανότητα να συνεχίσει να είναι σε λειτουργία μετά από επιπλέον s ώρες ;
3. Ρίχνουμε ένα νόμισμα, που έχει πιθανότητα να φέρει κεφαλή p , συνεχώς μέχρι να εμφανιστούν και οι δύο πλευρές του. Υπολογίστε
 - α) τον μέσο αριθμό ρίψεων
 - β) την πιθανότητα η τελευταία ρίψη να είναι κεφαλή (ο υπολογισμός να γίνει αναλυτικά και όχι με συνδυαστικό επιχείρημα)
4. Έστω X τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει: $Pr\{0 \leq X \leq c\} = 1$. Να δείξετε ότι $Var(X) \leq \frac{c^2}{4}$.
5. Να βρεθεί η pdf της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X η οποία έχει ροπογεννήτρια την $M(t) = \frac{1}{3} \frac{2}{2-t} + \frac{2}{3} \frac{3}{3-t}$.
6. Κατά την απογραφή του 1891 στην Μεγάλη Βρετανία, βρέθηκε ότι οι μελαχρινοί πατέρες με μελαχρινούς γιούς ανέρχονται στο 5% του πληθυσμού, οι μελαχρινοί πατέρες με ξανθούς γιούς στο 7,9% του πληθυσμού, οι ξανθοί πατέρες με μελαχρινούς γιούς στο 8,9% του πληθυσμού και οι ξανθοί πατέρες με ξανθούς γιούς στο 78,2%. Βρείτε την πιθανότητα να αποκτήσει ξανθό γιό ένας μελαχρινός άνδρας.

7. Έστω (X_1, X_2) τα αποτελέσματα ρίψης δύο ζαριών. Ορίζουμε $Y_1 = X_1 + X_2$ και $Y_2 = X_1 - X_2$. Βρείτε τη συνδιασπορά (covariance) των Y_1 και Y_2 .

8. Μία ρουλέτα έχει 38 υποδοχές αριθμημένες με 0, 00, και 1 έως και 36. Ποντάροντας σε κάποιον αριθμό, αν η μπίλια σταματήσει στην αντίστοιχη υποδοχή κερδίζουμε 35, αλλιώς χάνουμε 1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα παίζοντας συνεχώς:

- α) να κερδίζουμε μετά από 34 πονταρίσματα
- β) να κερδίζουμε μετά από 1000 πονταρίσματα

Υποθέστε ότι η μπίλια σταματάει σε κάθε αριθμό ισοπίθανα.

Η εργασία αυτή είναι προαιρετική και αφορά τους φοιτητές του Β έτους μόνο και εκπονείται από ομάδες το πολύ 3 ατόμων. Οι εργασίες παραδίδονται υποχρεωτικά χειρόγραφες. Επί της τελικής βαθμολογίας συνεισφέρει το πολύ 1.5 μονάδες εφόσον ο βαθμός στην γραπτή εξέταση είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 5. Οι ασκήσεις παραδίδονται μέχρι και την ημερομηνία της εξέτασης του μαθήματος στο γραφείο του Μάριου Αγγελόπουλου στα ΠΡΟΚΑΤ του τμήματος.

Ο διδάσκων: Σ. Νικολετσέας

Επικουρικό: Κ.Μ. Αγγελόπουλος