

---

## 1<sup>η</sup> Θεματική Ενότητα : Δυαδικά Συστήματα

---

### Ψηφιακοί Υπολογιστές

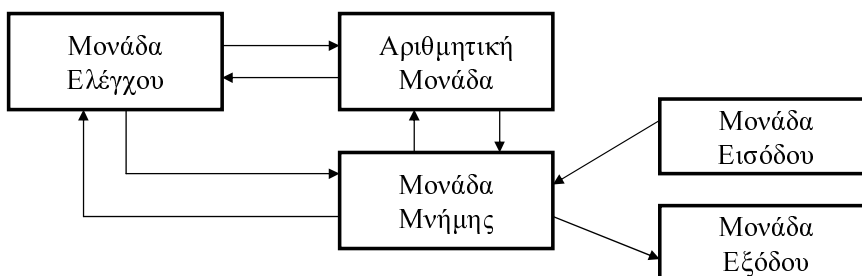
---

Παλαιότερα οι υπολογιστές  
χρησιμοποιούνταν για  
αριθμητικούς υπολογισμούς



Ψηφίο (digit)  
Ψηφιακοί Υπολογιστές

- Σήματα (signals) : διακριτά στοιχεία πληροφορίας (τάση - ένταση ρεύματος)
- Δυαδικά σήματα : παίρνουν δύο διακριτές τιμές (Λόγοι Αξιοπιστίας)
- Κβαντισμός : μετατροπή αναλογικών πληροφοριών σε ψηφιακές
- Analog-to-Digital converters (A/D) : μετατροπείς αναλογικό - ψηφιακό



# Δυαδικοί Αριθμοί

---

Δεκαδικό Σύστημα: Βάση το 10, ψηφία 10 και συντελεστές x δυνάμεις του 10

$$7392.25 = 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \text{ όπου } 0 \leq a_i \leq 9, \dots + a_i \times 10^i + \dots$$

Δυαδικό Σύστημα: Βάση το 2, ψηφία 2 και συντελεστές x δυνάμεις του 2

$$1011.01 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \text{ όπου } 0 \leq a_i \leq 1, \dots + a_i \times 2^i + \dots$$

r-αδικό Σύστημα: Βάση το r, ψηφία r και συντελεστές x δυνάμεις του r

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots + a_{-m} r^{-m}$$

$$\text{όπου } 0 \leq a_i \leq r-1$$

# Δυαδικοί Αριθμοί

---

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1**  
Αριθμοί σε διάφορες βάσεις

Δεκαδικό (βάση 10)	Δυαδικό (βάση 2)	Οκταδικό (βάση 8)	Δεκαεξαδικό (βάση 16)	
				101101
				+ 100111
00	0000	00	0	1010100
01	0001	01	1	
02	0010	02	2	101101
03	0011	03	3	- 100111
04	0100	04	4	000110
05	0101	05	5	
06	0110	06	6	
07	0111	07	7	1011
08	1000	10	8	x 101
09	1001	11	9	1011
10	1010	12	A	0000
11	1011	13	B	1011
12	1100	14	C	0000
13	1101	15	D	1011
14	1110	16	E	110111
15	1111	17	F	

# Μετατροπή Βάσης Αριθμού

## Ακέραιο Μέρος

$$X = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0$$

$$X \bmod r = a_0$$

$$(X / r)_{\text{αποκοπή}} = a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \dots + a_2 r^1 + a_1$$

Διαδοχικές Διαιρέσεις με r

Οι συντελεστές είναι τα υπόλοιπα

## Κλασματικό Μέρος

$$X = a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots + a_m r^{-m}$$

$$X * r = a_{-1} + a_{-2} r^{-1} + \dots + a_m r^{-(m-1)}$$

$$(X * r)_{\text{ακέραιο μέρος}} = a_{-1}$$

$$(X * r)_{\text{χωρίς ακέραιο μέρος}} = a_{-2} r^{-1} + \dots + a_m r^{-(m-1)}$$

Διαδοχικοί Πολλαπλασιασμοί με r

Οι συντελεστές είναι τα ακέραια μέρη

Κάθε οκταδικό/δεκαεξαδικό ψηφίο αντιστοιχεί σε 3/4 δυαδικά ψηφία: *Εύκολη Μετατροπή & Συμπύεση Δεδομένων*

10	110	001	101	011	.111	100	000	110		10	1100	0110	1011	.1111	0000	0110
2	6	1	5	3	.7	4	0	6		2	C	6	B	.F	0	6

Δυαδικά Συστήματα

5

# Συμπληρώματα

Τα συμπληρώματα απλοποιούν την πράξη της αφαίρεσης: α) Συμπλήρωμα ως προς Βάση β) Συμπλήρωμα ως προς Βάση-1

## Συμπλήρωμα ως προς Βάση-1

$A = a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$   $A' = r^n - 1 - A$  π.χ. για 4 ψηφία στο δεκαδικό  $A' = 9999 - A \Rightarrow$  αφαίρεση κάθε ψηφίου του A από το 9 (δεν υπάρχουν κρατούμενα)

Για το δυαδικό  $A' = 11 \dots 1 - A$  ή αντιστροφή κάθε ψηφίου

$$1011010011' = 0100101100$$

## Συμπλήρωμα ως προς Βάση

$$A = a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \quad A_{\sigma r} = r^n - A = r^n - 1 - A + 1 = A' + 1$$

Εύρεση του συμπληρώματος ως προς r-1 και πρόσθεση του 1

$$1011010011_{\sigma 2} = 0100101100 + 1 = 0100101101$$

Δυαδικά Συστήματα

6

## Αφαίρεση με Συμπληρώματα

Η αφαίρεση δύο αριθμών  $M-N$  σε βάση  $r$  και με  $n$  ψηφία γίνεται ως εξής:

1. Προσθέτουμε στο μειωτέο  $M$  το συμπλήρωμα ως προς  $r$  του αφαιρετέου οπότε έχουμε  $M+(r^n-N) = M-N+r^n$
2. Αν  $M \geq N$  το άθροισμα θα έχει τελικό κρατούμενο  $r^n$  το οποίο αγνοούμε
3. Αν  $M < N$  το άθροισμα δεν έχει τελικό κρατούμενο και ισούνται με  $r^n-(N-M)$  το οποίο είναι το συμπλήρωμα ως προς  $r$  του  $N-M$ . Με συμπλήρωμα ως προς  $r$  του αθροίσματος βρίσκουμε το  $N-M$  με πρόσημο (-) μπροστά.

$\begin{array}{r} \underline{M-N = 72532 - 3250} \\ 72532 \\ (\text{Συμπλ. } 10) + 96750 \\ \hline 169282 \\ (\text{Αγνοώ κρατ}) - 100000 \\ \hline 69282 \end{array}$	$\begin{array}{r} \underline{M-N = 3250 - 72532} \\ 3250 \\ (\text{Συμπλ. } 10) + 27468 \\ \hline 30718 \\ (\text{Δεν υπάρχει κρατ}) \quad . \\ \hline -69282 \end{array}$
--	--

## Προσημασμένοι Δυαδικοί Αριθμοί

Το πρόσημο δηλώνεται με την τοποθέτηση ενός bit στην αριστερότερη θέση ( $0=+$ ,  $1=-$ )

Τρόποι Απεικόνισης { **Προσημασμένο Μέτρο:** Το αριστερότερο bit πρόσημο και το υπόλοιπο είναι το μέτρο (απόλυτη τιμή)  
**Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 1:** Το αριστ. bit πρόσημο και όλος ο αριθμός (με το πρόσημο) σε συμπλ. ως προς 1  
**Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2:** Το αριστ. bit πρόσημο και όλος ο αριθμός (με το πρόσημο) σε συμπλ. ως προς 2

Το Προσημασμένο Μέτρο χρησιμοποιείται στην συνηθισμένη αριθμητική αλλά δεν είναι εύχρηστο για τον Η/Υ. Πιο εύκολη αναπαράσταση για τον Η/Υ είναι το Προσημασμένο Συμπλήρωμα ως προς 2.

Απεικόνιση με 8 ψηφία του +9 { **Προσημασμένο Μέτρο:** 10001001  
**Προσημασμένο Συμπλ. Ως προς 1:** 11110110  
**Προσημασμένο Συμπλ. Ως προς 2:** 11110111

# Αριθμητική Πρόσθεση/Αφαίρεση

## Αριθμητική Πρόσθεση (απαιτεί σύγκριση προσήμων)

1. Αν τα πρόσημα είναι ίδια προσθέτουμε τα μέτρα με τελικό πρόσημο το κοινό.
2. Αν τα πρόσημα είναι διαφορετικά αφαιρούμε από τον μεγαλύτερο τον μικρότερο με τελικό πρόσημο αυτό του μεγαλύτερου

## Πρόσθεση Προσημασμένου Συμπληρώματος ως προς 2

Απλή πρόσθεση και το τελικό κρατούμενο αγνοείται. Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό θα είναι σε συμπλήρωμα ως προς 2. Καμία μετατροπή ή σύγκριση δεν απαιτείται.

## Αφαίρεση Προσημασμένου Συμπληρώματος ως προς 2

Προσθέτουμε στον μειωτέο το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου. Τυχόν κρατούμενο αγνοείται. Πχ  $(-6)-(-13) = 1111010-11110011=1111010+00001101=00000111 = 7$

# Δυαδικοί Κώδικες

Είναι τρόποι αναπαράστασης πληροφοριών με χρήση δυαδικών ψηφίων (bits).

### ΠΙΝΑΚΑΣ 1-2

Δυαδικοί κώδικες για τα δεκαδικά ψηφία

Δεκαδικό ψηφίο	(BCD) 8421	Excess-3	84-2-1	2421	(Biquinary) 5043210
0	0000	0011	0000	0000	0100001
1	0001	0100	0111	0001	0100010
2	0010	0101	0110	0010	0100100
3	0011	0110	0101	0011	0101000
4	0100	0111	0100	0100	0110000
5	0101	1000	1011	1011	1000001
6	0110	1001	1010	1100	1000010
7	0111	1010	1001	1101	1000100
8	1000	1011	1000	1110	1001000
9	1001	1100	1111	1111	1010000

Μετατροπή ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα  $\neq$  δυαδική κωδικοποίηση

395 { Δυαδικός : 110001011 (9 bits)  
Δυαδική Κωδικοποίηση BCD :  
0011 1001 0101 (12 bits)

Οι κώδικες excess-3, ο 2 4 2 1, ο 8 4 -2 -1 είναι αυτό-συμπληρωματικοί: το συμπλ. ως προς 9 βγαίνει με αντικατάσταση των 0 - 1.

Ο κώδικας Biquinary ανιχνεύει σφάλματα

## Κώδικες Ανίχνευσης Σφαλμάτων

Τα φυσικά μέσα μετάδοσης επηρεάζονται από **Θόρυβο** και προκαλούν λάθη. Για αυτό χρησιμοποιούνται οι **κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων** (π.χ. parity bits).

Η μέθοδος **ισοτιμίας** ανιχνεύει περιττό αριθμό λαθών

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1-3**  
Bit ισοτιμίας

Περιττή Ισοτιμία		Άρτια ισοτιμία	
Μήνυμα	P	Μήνυμα	P
0000	1	0000	0
0001	0	0001	1
0010	0	0010	1
0011	1	0011	0
0100	0	0100	1
0101	1	0101	0
0110	1	0110	0
0111	0	0111	1
1000	0	1000	1
1001	1	1001	0
1010	1	1010	0
1011	0	1011	1
1100	1	1100	0
1101	0	1101	1
1110	0	1110	1
1111	1	1111	0

## Κώδικας Gray

Οι διαδοχικοί αριθμοί στον κώδικα **gray** μεταβάλλονται κατά ένα μόνο bit.

Χρησιμοποιείται όταν κατά την μετάδοση η μετάβαση γίνεται σε **γειτονικούς** αριθμούς και θέλουμε να μειώσουμε την αβεβαιότητα κατά την εναλλαγή.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1-4**  
Κώδικας Gray τεσσάρων bits

Κώδικας Gray	Ισοδύναμος δεκαδικός
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

# Αλφαριθμητικοί Κώδικες

	$b_4b_3b_2b_1$	$b_7b_6b_5$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
Περιλαμβάνουν τα δεκαδικά ψηφία, τα γράμματα του αλφαβήτου και ειδικούς χαρακτήρες ελέγχου. ASCII 7-bit	0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	'	p
	0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
	0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
	0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
	0100	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
	0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
	0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
	0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
	1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
	1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
	1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
	1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	
	1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
	1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
	1111	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Χαρακτήρες Ελέγχου { Διαμορφωτές Μορφής Κειμένου (backspace, tab)  
 Διαχωριστές Πληροφορίας (Διαχωριστής Αρχείων)  
 Ελέγχου Επικοινωνίας (STX, ETX)

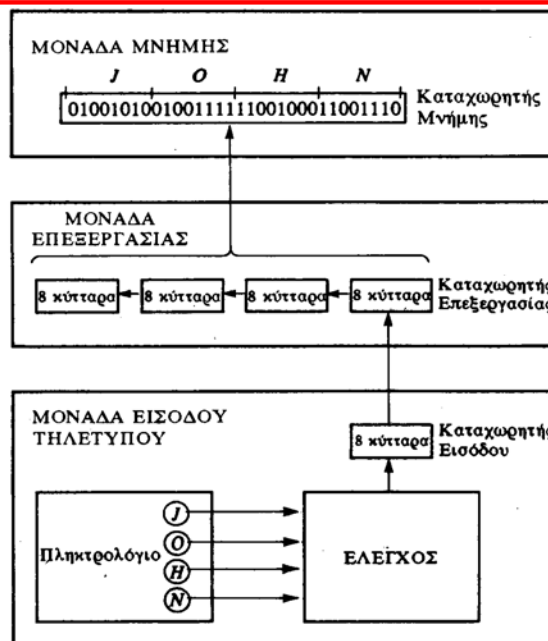
## Δυαδική Αποθήκευση και Καταχωρητές

Τα διακριτά στοιχεία πληροφορίας αποθηκεύονται σε δυαδικά κύτταρα (binary cells).

Καταχωρητής : είναι μία ομάδα από δυαδικά κύτταρα.

0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0

Το περιεχόμενο του καταχωρητή μπορεί να ερμηνευτεί με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους:  
 Ακέραιος: 9829, Αλφαριθμητικά:  
 &ε κλπ



ΣΧΗΜΑ 1-2  
 Μεταφορά πληροφορίας μέσω καταχωρητών

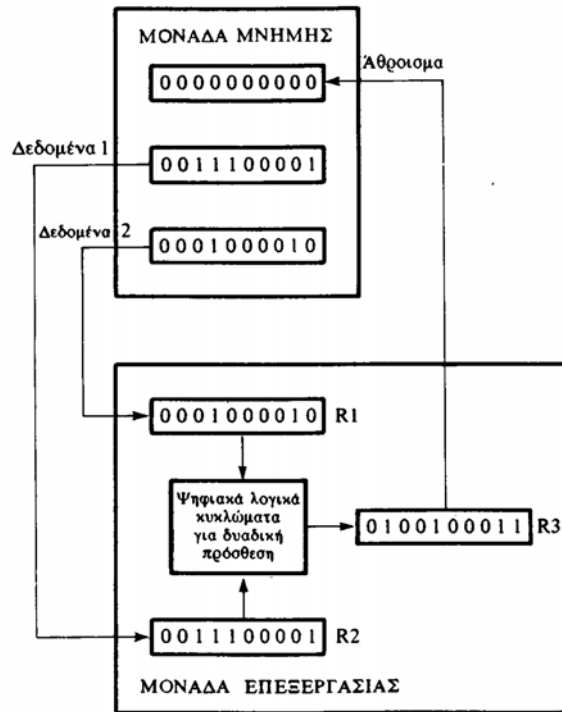
# Διαδική Αποθήκευση και Καταχωρητές

Η επεξεργασία των δεδομένων απαιτεί εκτός από τα **κυκλώματα επεξεργασίας**, **κυκλώματα αποθήκευσης** των πληροφοριών.

Η επεξεργασία γίνεται με ψηφιακά λογικά κυκλώματα, ενώ η **συχνότερα χρησιμοποιούμενη δομή** αποθήκευσης πληροφοριών είναι ο καταχωρητής

Ο καταχωρητής είναι πολύ **πιο γρήγορος** από την μνήμη γιατί είναι κοντά στις μονάδες επεξεργασίας και αποτελείται από ακριβή στατικά στοιχεία.

Η ταχύτητα εκτέλεσης των προγραμμάτων εξαρτάται από την σωστή εκμετάλλευση των καταχωρητών.



# Διαδική Λογική

Ασχολείται με μεταβλητές που μπορούν να έχουν δύο μόνο διακριτές τιμές, και με λογικές πράξεις.

Λογικές Πράξεις:

- KAI (AND):  $X \cdot Y = 1$  όταν  $X=Y=1$
- H' (OR):  $X + Y = 1$  όταν  $X=1$  ή  $Y=1$
- OXI (NOT):  $X' = 1$  όταν  $X=0$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1-6**  
Πίνακες αληθείας των λογικών πράξεων

		ΚΑΙ		Ή		ΟΧΙ	
x	y	$x \cdot y$		x	y	$x + y$	
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Το αριθμητικό  $X+Y$  είναι διαφορετικό από το λογικό  $X+Y$ :

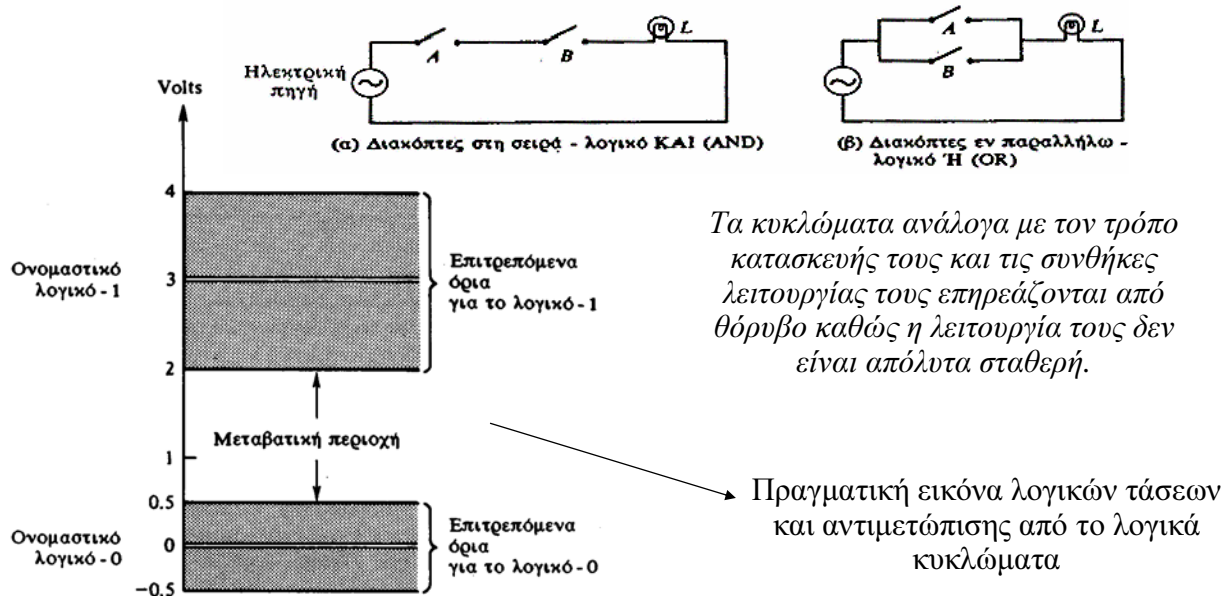
$$1+1=10 \text{ (αριθμ)}, 1+1=1 \text{ (λογικό)}$$



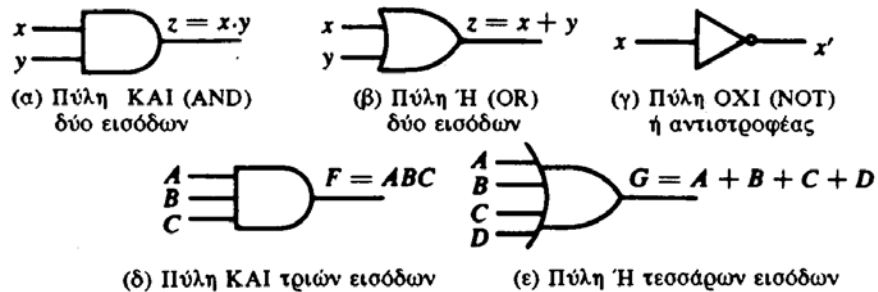
# Κυκλώματα Διακοπών και Δυαδικά Σήματα

$L = A \cdot B$  για το κύκλωμα του Σχήματος 1-4(α)

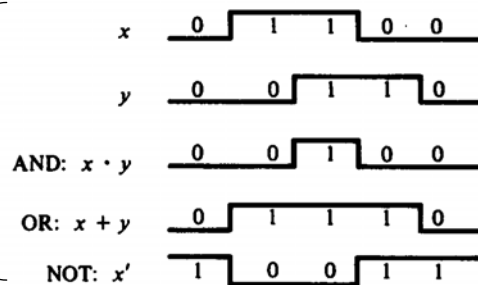
$L = A + B$  για το κύκλωμα του Σχήματος 1-4(β)



# Λογικές Πύλες



Διαγράμματα Λογικής συμπεριφοράς σημάτων στον άξονα του χρόνου.



ΣΧΗΜΑ 1-7

Σήματα εισόδου-εξόδου για τις πύλες (α), (β), (γ) του Σχήματος 1-6.