

Ο ρόλος των ανοικτών περιβαλλόντων μάθησης σε υπολογιστή στην έκφραση των ατομικών και ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών στη μάθηση γεωμετρικών εννοιών

Μαρία Κορδάκη
Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών
Διδ. Επ. καθ. (ΠΔ 407) τμήμα Μηχ. Ηλ/κών Υπολογιστών
& Πληροφορικής Παν/μίου Πατρών

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στο ρόλο των ανοικτών περιβαλλόντων μάθησης σε υπολογιστή στην έκφραση των ατομικών και ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών στη μάθηση γεωμετρικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνεται η έκφραση των ατομικών και ενδο-ατομικών διαφορών 30 μαθητών της Β' Γυμνασίου για τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας ενός μη κανονικού πολυγώνου στο ανοικτό περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME (Kordaki & Potari, 1998) και στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα κλήθηκαν να φέρουν σε πέρας 'με κάθε δυνατό τρόπο' τις δραστηριότητες που τους τέθηκαν οι οποίες ήταν ίδιες και στα δύο περιβάλλοντα που προαναφέρθηκαν. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι, οι μαθητές στο ανοικτό περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME εξέφρασαν τις ατομικές και ενδο-ατομικές τους διαφορές στη μάθηση των παραπάνω εννοιών καλλίτερα από ότι στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές επέλεξαν από την ποικιλία των εργαλείων του μικρόκοσμου C.AR.ME αυτά που ταίριαζαν περισσότερο στη γνωστική τους ανάπτυξη και εξέφρασαν τις ατομικές τους διαφορές μέσα από 20 διαφορετικές προσεγγίσεις. Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι οι ατομικές διαφορές των μαθητών περιορίστηκαν στο να εκφραστούν μόνον μέσα από 4 διαφορετικές προσεγγίσεις οι οποίες κυρίως εστιάστηκαν στην ατελή χρήση των τύπων υπολογισμού επιφανειών. Επιπλέον, στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME κάθε μαθητής εξέφρασε τις ενδο-ατομικές του διαφορές στις προς μάθηση έννοιες πραγματοποιώντας κατά μέσον όρο 5 διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης για κάθε δραστηριότητα. Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι ο μέσος όρος στρατηγικών επίλυσης ανά μαθητή και δραστηριότητα δεν ξεπέρασε τη μονάδα ενώ υπήρξαν και μαθητές που δεν μπόρεσαν να πραγματοποιήσουν καμμία στρατηγική επίλυσης.

Ακόμη, οι ανοικτού τύπου δραστηριότητες που δόθηκαν, παρείχαν την ευκαιρία στους μαθητές να εκμεταλλευτούν την ποικιλία των διαφορετικών εργαλείων του μικρόκοσμου C.A.R.M.E. και να εκφράσουν τις ατομικές και ενδο-ατομικές τους διαφορές στη μάθηση των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας.

Εισαγωγή

Οι ατομικές διαφορές των παιδιών στη μάθηση έχουν στενά συνδεθεί με τις διαφορές τους στη σχολική επιτυχία. Η σύνδεση αυτή περιλαμβάνει μια σειρά από παράγοντες όπως πχ. νοητικές ικανότητες, ψυχοκινητικές δεξιότητες, κίνητρα και ενδιαφέρον, προηγούμενη εμπειρία, πολιτισμικό επίπεδο κ.α. Η διαφοροποίηση των μαθητών σε αυτούς τους παράγοντες από την αρχή της σχολικής τους ζωής δημιουργεί ανισότητες μεταξύ τους στις γνωστικές τους αφετηρίες και επομένως στη σχολική τους επίδοση (Snow, 1986; Schmeck, 1988). Για παράδειγμα, ένα παιδί που προσέρχεται στο σχολείο επιδεικνύοντας λογικό, αναστοχαστικό, αναλυτικό και αφαιρετικό στυλ μάθησης παρουσιάζεται να έχει μεγαλύτερες ευκαιρίες για επιτυχία στο σχολείο από ένα παιδί που εμφανίζεται να έχει διαισθητικό, ολιστικό και συγκεκριμένο στυλ μάθησης. Οι προσεγγίσεις στην επίλυση στο πρόβλημα αυτής της διαφορετικότητας-ανισότητας έχουν ενταχθεί σε τρεις κατηγορίες α) προσπάθεια αλλαγής του μαθησιακού στυλ των μαθητών ώστε να εντάσσονται καλλίτερα στο υπάρχον σχολικό σύστημα και αναλυτικό πρόγραμμα (Corno & Snow, 1984; Bradley, 1985) β) αλλαγή των μεθόδων διδασκαλίας και αξιολόγησης ώστε να ταιριάζουν στις ιδιαιτερότητες των μαθητών στη μάθηση (Joyce & Weil, 1972; Bennett, 1977) και γ) αλλαγή στις διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζονται ώστε το παιδί αφ ενός μεν να μπορεί να εκφράσει τις ιδιαιτερότητές του στη μάθηση και αφ ετέρου, να εξελιχτεί αποκτώντας και άλλα μαθησιακά στυλ για το συγκεκριμένο αντικείμενο μάθησης (Lemerise, 1992).

Οι υποστηρικτές της πρώτης προσέγγισης θεωρούν ότι το παιδί που έχει διαισθητικό, ολιστικό και συγκεκριμένο στυλ μάθησης μειονεκτεί ως προς το παιδί που έχει λογικό, αναστοχαστικό, αναλυτικό και αφαιρετικό στυλ το οποίο και αξιολογείται ως στυλ υπεροχής (Bradley, 1985). Από αυτή την προσέγγιση οι ατομικές διαφορές των παιδιών θεωρούνται εμπόδιο το οποίο πρέπει να καταργηθεί. Ως μέσο κατάργησης του μειονεκτικού στυλ προτείνεται η μίμηση από τους μαθητές

του στυλ υπεροχής το οποίο παρουσιάζεται από το δάσκαλο μέσω της άμεσης δασκαλοκεντρικής προσέγγισης που στηρίζεται στην παρουσίαση της γνώσης.

Οι υποστηρικτές της δεύτερης προσέγγισης δίνουν έμφαση στην ισότητα των ευκαιριών για μάθηση από όλους τους μαθητές και προτείνουν ένα πλουραλιστικό εκπαιδευτικό σύστημα το οποίο θα λαμβάνει υπόψη του τις ατομικές διαφορές στη μάθηση των παιδιών. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση τα διαφορετικά μαθησιακά στυλ των παιδιών αναγνωρίζονται ως ισότιμα. Παρόλα αυτά, οι αλλαγές που προτείνονται αφορούν αποκλειστικά στον τρόπο διδασκαλίας ο οποίος θεωρείται ότι πρέπει να εμπλουτιστεί ώστε να ανταποκρίνεται στον τρόπο που κάθε ένας μαθητής μαθαίνει ενώ παραγνωρίζονται οι αλλαγές οι οποίες πρέπει να συντελεστούν στον ίδιο το μαθητή.

Οι υποστηρικτές της τρίτης προσέγγισης δίνουν έμφαση στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης όπου κάθε μαθητής θα πρέπει αφ ενός μεν να μπορεί να εκφράσει τις ιδιαιτερότητές του στη μάθηση και αφ ετέρου, να μπορεί να εξελιχθεί αποκτώντας περισσότερα του ενός στυλ μάθησης. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση η έμφαση δίνεται στην εξέλιξη του μαθητή μέσα από τη διεύρυνση των ενδο-ατομικών του διαφορών στη μάθηση. Οι ιδιαιτερότητες των μαθητών δεν μπορούν να καταργούνται, απλά προσεγγίζονται από μια διαφορετική οπτική που εξαρτάται από τις διαφορετικές ευκαιρίες που τους παρέχονται στο να αποκτήσουν περισσότερα στυλ μάθησης για το συγκεκριμένο αντικείμενο. Σε κάθε μαθητή αυτά τα διαφορετικά στυλ μπορούν να οργανωθούν με διαφορετικό τρόπο. Οι αλλαγές που προτείνονται αφορούν στον εμπλουτισμό του μαθησιακού πλαισίου συμφραζομένων:

- α) με διαφορετικές προσεγγίσεις στη γνώση του μαθησιακού αντικειμένου οι οποίες μπορούν να εκφραστούν από το δάσκαλο και τους μαθητές μέσω της επικοινωνίας και της συνεργασίας (Vygotsky, 1978), β) με τη διάθεση μιας ποικιλίας εργαλείων στους μαθητές και γ) με τη διαθεση πολλαπλών αναπαραστασιακών συστημάτων για την έκφραση διαφορετικών ειδών μαθηματικής γνώσης για την ίδια μαθησιακή έννοια (Kaput, 1987).

Οι υπολογιστές δίνουν ευκαιρίες αναπαράστασης μιας έννοιας ή/και μιας σχέσης σε πολλαπλά και διασυνδεδεμένα αναπαραστασιακά συστήματα όπως πχ. εικόνες, διαγράμματα, πίνακες, αριθμητικές αναπαραστάσεις, γραφικές παραστάσεις, αναπαραστάσεις σε φυσική γλώσσα, σε γλώσσες προγραμματισμού, σε κινούμενη εικόνα, σε προσομοίωση (Kaput, 1994). Οι μεταβάσεις και οι μετασχηματισμοί μεταξύ διαφορετικών αναπαραστασιακών συστημάτων αλλά και μέσα στο ίδιο

αναπαραστασιακό σύστημα αποκτούν μεγάλη σημασία στην οικοδόμηση, στην κατανόηση και στη χρήση μαθηματικών εννοιών (Lesh, Mehr & Post, 1987; Janvier, 1987; Borba & Confrey, 1996). Ακόμη, οι δυσκολίες των μαθητών έχουν συνδεθεί με το μεγάλο κενό ανάμεσα στα συμβολικά κυρίως αναπαραστασιακά συστήματα στα οποία καλούνται από τις σχολικές πρακτικές για να εκφράσουν τη γνώση τους και τα αναπαραστασιακά συστήματα τα οποία τους είναι πιο οικεία και τους επιτρέπουν να εκφράσουν τη διαισθητική τους γνώση (Janvier, 1987).

Σημαντικό ρόλο στην έκφραση των ατομικών αλλά και των ενδο-ατομικών διαφορών των παιδιών στα μαθηματικά παίζουν τα ανοικτά περιβάλλοντα πολλαπλών αναπαραστάσεων γνώσης σε υπολογιστή (Rampy, 1984; Weir, 1992; Lemerise, 1992). Με τον όρο ανοικτά περιβάλλοντα μάθησης σε υπολογιστή εδώ εννοούμε περιβάλλοντα τα οποία επιτρέπουν αφ ενός μεν την επίλυση μιας ποικιλίας κλάσεων ισοδυναμίας προβλημάτων και αφ ετέρου την κατασκευή μιας ποικιλίας στρατηγικών επίλυσης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων περιβαλλόντων μάθησης αποτελούν: το περιβάλλον της γλώσσας Logo, τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας όπως το Cabri-Geometry II και το Geometers' Scetch Pad κα.

Στην παρούσα μελέτη παρουσιάζεται ο ρόλος της ποικιλίας εργαλείων και ειδικότερα των πολλαπλών αναπαραστασιακών συστημάτων στην έκφραση των ατομικών και ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών για τη μάθηση εννοιών που αφορούν στη διατήρηση και στη μέτρηση της επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα συγκρίνονται το πλήθος και η διαφορετικότητα των μαθησιακών προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές αλλά και κάθε μαθητής ξεχωριστά, σε δύο διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης: α) το παραδοσιακό, στατικό περιβάλλον χαρτί-μολύβι και β) ένα ανοικτό περιβάλλον μάθησης πολλαπλών αναπαραστάσεων σε υπολογιστή. Το περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι ο μικρόκοσμος C.AR.ME. (Kordaki & Potari, 1998), ο οποίος έχει σχεδιαστεί ειδικά για τη μάθηση των παραπάνω εννοιών. Ερευνητικές μελέτες που συγκρίνουν το ρόλο ανοικτών περιβαλλόντων μάθησης πολλαπλών αναπαραστάσεων με τα παραδοσιακά μέσα στην έκφραση των ατομικών και των ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών για τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας ως σήμερα δεν έχουν αναφερθεί.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται η βασική φιλοσοφία, τα εργαλεία και τα αναπαραστασιακά συστήματα του μικρόκοσμου C.AR.ME. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το πλαίσιο της έρευνας και ακολουθούν τα αποτελέσματα της

πειραματικής διαδικασίας. Η εργασία ολοκληρώνεται με τη συζήτηση των αποτελεσμάτων και τη διεξαγωγή συμπερασμάτων.

Το περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME.

Ο μικρόκοσμος C.AR.ME. (The Conservation of Area and its Measurement microworld, Kordaki & Potari, 1998) σχεδιάστηκε προκειμένου να αποτελέσει ένα πιθανό ανοικτό περιβάλλον μάθησης των εννοιών που αφορούν στη διατήρηση και στη μέτρηση της επιφάνειας. Ο σχεδιασμός του μικρόκοσμου C.AR.ME. ήταν αποτέλεσμα μοντελοποίησης. Η μοντελοποίηση αφορούσε στο σχεδιασμό τριών μοντέλων: α) το μοντέλο της μάθησης β) το μοντέλο του αντικειμένου μάθησης και γ) το μοντέλο των πιθανών ενεργειών του μαθητή προκειμένου να επιλύσει βασικές κλάσεις ισοδυναμίας προβλημάτων που κρίνονται ουσιαστικές για τη μάθηση του μαθησιακού αντικειμένου. Προκειμένου για τη σχεδίαση του μοντέλου μάθησης εποικοδομιστικές (von Glasersfeld, 1990) και κοινωνικές θεωρήσεις (Noss & Hoyles, 1996; Crawford, 1996a; Crawford, 1996b) σχετικά με τη γνώση και τη μάθηση πάρθηκαν υπόψη οι οποίες στη συνέχεια μεταφράστηκαν σε λειτουργικές προδιαγραφές υλοποίησης (Κορδάκη, 1999; Kordaki & Anouris, 2002). Το μοντέλο του αντικειμένου μάθησης σχεδιάστηκε με βάση τη βιβλιογραφία από τα μαθηματικά αλλά και από την ψυχολογία της μαθηματικής εκπαίδευσης για το πώς αναλύονται οι μαθησιακές έννοιες. Το μοντέλο των πιθανών ενεργειών των μαθητών σχεδιάστηκε με βάση τη βιβλιογραφία για το πώς μαθαίνουν οι μαθητές τις έννοιες που προαναφέρθηκαν (Kordaki & Potari, 1998). Η σχεδίαση του μοντέλου του μαθητή πήρε σοβαρά υπόψη την αναγκαιότητα να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν τις ατομικές αλλά και τις ενδο-ατομικές τους διαφορές στη μάθηση των παραπάνω εννοιών δηλαδή να ξεκινήσουν από τις δικές τους γνωστικές αφετηρίες και να φτάσουν στους δικούς τους προσωπικούς γνωστικούς προορισμούς. Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε αφ ενός να τους δοθεί η δυνατότητα να σχεδιάζουν τα δικά τους γεωμετρικά σχήματα και αφ ετέρου να μπορούν να τα μελετήσουν ως προς τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας σε διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα με χρήση ποικιλίας εργαλείων. Τα διαφορετικά αυτά συστήματα προσεγγίζονται από το μαθητή μέσω των εργαλείων τα οποία βρίσκονται στο περιβάλλον διεπαφής του μικρόκοσμου το οποίο παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 (3^η, 4^η, 5^η και 6^η στήλη), τέσσερις ομάδες εργαλείων τα οποία υλοποιούν τέσσερα διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα προσφέρονται στους μαθητές. Με τη χρήση αυτών των συστημάτων οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας.

Αρχείο	Σχεδίαση	Επεξεργασία	Αυτόματες μετρήσεις	Αυτόματοι μετασχηματισμοί	Εργαλεία μέτρησης	Βοήθεια
Ανοιγμα	Τετραγωνικό καρέ	Επιλογή μέρους	Επιφανειών	Τετράγωνο	Τετραγωνική μονάδα	
Ανοιγμα τελευταίου	Τριγωνικό καρέ	Επιλογή όλου	Γωνιών	Rectangles	Ορθογώνια μονάδα	
Αποθήκευση τελευταίου	Σχεδίαση πολυγώνων	Κοπή	Ευθ. τμημάτων	Οικογένειες ισοδ. ορθογώνιων	Μονάδα μαθητή	
Αποθήκευση ως	Τέλος σχεδίασης	Επικόλληση	Σχεδίαση γωνίας στροφής	Παραλληλόγραμμα	Επικάλυψη με μονάδες	
Εκτύπωση		Στροφή	Σχεδίαση Άξονα συμμετρίας	Οικογένειες ισοδ. παραλληλογράμμων	Καταμέτρηση μονάδων	
Έξοδος	Σχεδίαση Ευθ. τμημάτων	Στροφή	Σχεδίαση Άξονα συμμετρίας	Τρίγωνα	Τετραγωνικό καρέ	
	Καθάρισμα οθόνης	Συμμετρία ως προς άξονα	Συμμετρία ως προς άξονα	Οικογένειες ισοδ. τριγώνων	Ορθογώνιο καρέ	
		Σβυστήρες		Αριθμ. στοιχεία σχημάτων	Καρέ μαθητή	

Πίνακας 1. Το περιβάλλον διεπαφής του μικρόκοσμου C.AR.ME.

1. *Το διαισθητικό σύστημα.* Με την ομάδα εργαλείων τα οποία βρίσκονται στην τρίτη στήλη του Πίνακα 1, οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν τις παραπάνω έννοιες με διαισθητικό τρόπο, δηλαδή ύστερα από επίθεση επιφανειών ή/και τεμαχισμό και ανασύνθεση.
2. *Το σύστημα μέτρησης που δίνει έμφαση στη χρήση χωρικών μονάδων.* Με την ομάδα εργαλείων τα οποία βρίσκονται στην έκτη στήλη του Πίνακα 1, οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν τις προς μάθηση έννοιες με γεωμετρικό εικονικό τρόπο ο οποίος δίνει έμφαση στη μέτρηση μιας επιφάνειας μέσω επικάλυψής της με χωρικές μονάδες.
3. *Το δυναμικό σύστημα.* Με την ομάδα εργαλείων τα οποία βρίσκονται στην πέμπτη στήλη του Πίνακα 1, οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν τις προς μάθηση έννοιες σε σχήματα των οποίων η μορφή μεταβάλλεται δυναμικά ενώ η επιφάνειά τους παραμένει σταθερή.
4. *Το αριθμητικό σύστημα* Με την ομάδα εργαλείων τα οποία βρίσκονται στην τέταρτη στήλη του Πίνακα 1, οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν σχήματα με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μέτρηση επιφανειών,

όπως και σημαντικά γραμμικά στοιχεία των προς μελέτη σχημάτων πχ. περίμετρος, πλευρές, ύψη.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας προβλημάτων τα οποία μπορούν να επιλυθούν με τα εργαλεία που προσφέρονται είναι συγκρίσεις, και μετασχηματισμοί οποιουδήποτε επίπεδου γεωμετρικού σχήματος με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους: διαισθητικό, με χρήση χωρικών μονάδων, αυτόματο-δυναμικό και αυτόματο-αριθμητικό.

Οι συνθήκες της έρευνας

Το θεωρητικό πλαίσιο και ο στόχος της έρευνας

Η μελέτη αυτή εστιάζει στη σύγκριση των προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές για τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας προκειμένου να επιλύσουν τα προβλήματα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης επιφανειών σε δύο περιβάλλοντα μάθησης που παρέχουν διαφορετικά εργαλεία στους μαθητές. Τα περιβάλλοντα αυτά είναι το περιβάλλον χαρτί-μολύβι και το περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. Η μελέτη αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας αξιολόγησης του παραπάνω μικρόκοσμου, η οποία σχεδιάστηκε προκειμένου να διερευνηθούν οι στρατηγικές των μαθητών σχετικά με τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (Κορδάκη, 1999). Η έρευνα αξιολόγησης πραγματοποιήθηκε σε τάξη με μαθητές και εστιάστηκε στις μαθησιακές διαδικασίες που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές μέσα από τις στρατηγικές επίλυσης που κατασκεύασαν και όχι αποκλειστικά στα μαθησιακά αποτελέσματα. Από μεθοδολογική άποψη η μελέτη αυτή αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Cohen and Manion, 1989) που αποδέχεται τη φαινομενογραφική προσέγγιση (Marton, 1988). Με βάση αυτή την προσέγγιση, η έρευνα εστιάζει στις αλληλεπιδράσεις των μαθητών με τα εργαλεία του μικρόκοσμου και στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας χρησιμοποιώντας τα διαφορετικά εργαλεία που τους παρέχονται. Το μέρος της έρευνας που αφορά στις στρατηγικές που κατασκεύασαν οι μαθητές για τις έννοιες της μέτρησης και της διατήρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. έχει αναφερθεί αναλυτικά στις εργασίες των Kordaki & Potari (2002) και Kordaki (2003) αντίστοιχα.

Το πείραμα μάθησης

Το πείραμα μάθησης πραγματοποιήθηκε σε ένα τυπικό Γυμνάσιο της Πάτρας στην Ελλάδα. Ένα τμήμα 30 μαθητών της Β' Γυμνασίου (14 ετών) συμμετείχε σε μια μαθησιακή δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος. Η δραστηριότητα αυτή σχετιζόταν με τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας και δεν αποτελούσε μέρος της καθημερινής σχολικής δραστηριότητας των μαθητών. Κατά τη διάρκεια του πειράματος μάθησης, οι μαθητές κλήθηκαν να φέρουν σε πέρας δύο δραστηριότητες σε δύο διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης: αρχικά στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και στη συνέχεια στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. Στους μαθητές αφιερώθηκε τόσος χρόνος όσος ήταν αναγκαίος προκειμένου να επιλύσουν τα δύο προβλήματα. Κάθε μαθητής χρειάστηκε περίπου 1 ώρα για κάθε δραστηριότητα στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και 2 περίπου ώρες για κάθε δραστηριότητα στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. Μια φάση εξοικείωσης των μαθητών με τα παρεχόμενα εργαλεία και τις λειτουργίες του μικρόκοσμου C.AR.ME. προηγήθηκε της κύριας φάσης της έρευνας στο περιβάλλον αυτό. Η φάση εξοικείωσης διήρκεσε περίπου 2 ώρες.

Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι οι μαθητές δούλεψαν σε μια τυπική τάξη προκειμένου να φέρουν σε πέρας τις δραστηριότητες που τους δόθηκαν. Στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME οι μαθητές εργάστηκαν κυκλικά σε ένα εργαστήριο υπολογιστών που αποτελούνταν από 3 υπολογιστές. Οι μαθητές δούλεψαν ατομικά εκτός από τη φάση εξοικείωσης όπου δούλεψαν σε δυάδες. Η ερευνήτρια συμμετείχε ως παρατηρητής με την ελάχιστη συμμετοχή προκειμένου να μην επηρεάσει τις στρατηγικές επίλυσης των μαθητών.

Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν: α) τα φύλλα εργασίας των μαθητών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και β) το ιστορικό των ενεργειών των μαθητών (log files) στο περιβάλλον C.AR.ME., οι ηλεκτρονικές εικόνες των γεωμετρικών σχεδίων των μαθητών, οι κασσέτες μαγνητοφώνου με οτιδήποτε ειπώθηκε κατά τη διάρκεια της έρευνας και οι σημειώσεις πεδίου της ερευνήτριας.

Οι δραστηριότητες

Οι μαθητές κατά τη διάρκεια της έρευνας αξιολόγησης κλήθηκαν να φέρουν σε πέρας δύο δραστηριότητες οι οποίες ήταν ίδιες στα δύο περιβάλλοντα μάθησης. Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε στο μετασχηματισμό ενός μη κυρτού πολυγώνου σε άλλο σχήμα με την ίδια επιφάνεια και η δεύτερη δραστηριότητα αφορούσε στη σύγκριση

ενός μη κυρτού πολυγώνου με ένα τετράγωνο. Τα δύο σχήματα δεν ήταν εύκολο να συγκριθούν με το μάτι. Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι τα προς μελέτη σχήματα δόθηκαν σχεδιασμένα στο φύλλο εργασίας των μαθητών ενώ στο περιβάλλον C.A.R.M.E. αυτά τα σχήματα σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια στην οθόνη του υπολογιστή. Η διατύπωση της πρώτης δραστηριότητας ήταν: *‘να μετασχηματίσετε αυτό το πολύγωνο σε άλλο με την ίδια επιφάνεια με κάθε δυνατό τρόπο’* ενώ η διατύπωση της δεύτερης ήταν: *‘να συγκρίνετε αυτά τα δύο σχήματα με κάθε δυνατό τρόπο’*. Οι δραστηριότητες του μετασχηματισμού και της σύγκρισης έχουν αναγνωριστεί ως σημαντικές για την ανάπτυξη ποιοτικών προσεγγίσεων στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (Carpenter, Coburn, Reys and Wilson, 1975; Hiebert, 1981). Επιπλέον, καλώντας τους μαθητές να κατασκευάσουν μια ποικιλία στρατηγικών επίλυσης, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να προσεγγίσουν τις έννοιες που προαναφέρθηκαν από διαφορετικές οπτικές, να εκφράσουν διαφορετικά είδη γνώσης, όπως και να εκφράσουν ο καθένας τις ατομικές αλλά και τις ενδο-ατομικές του διαφορές στη μάθηση των εννοιών αυτών (Weir, 1992; Lemerise, 1992; Kordaki & Potari, 2002; Kordaki, 2003). Κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να ζητήσουν από την ερευνήτρια οποιαδήποτε εργαλεία τα οποία θα έκριναν ως χρήσιμα για την κατασκευή στρατηγικών επίλυσης των προβλημάτων που τους δόθηκαν.

Η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων

Αρχικά οι διάφορες μορφές δεδομένων οργανώθηκαν ανά περιβάλλον μάθησης. Στη συνέχεια σε κάθε περιβάλλον μάθησης τα δεδομένα οργανώθηκαν ανά δραστηριότητα. Για κάθε δραστηριότητα καταγράφηκαν οι στρατηγικές που κατασκεύασε κάθε μαθητής. Οι στρατηγικές αυτές στη συνέχεια χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες για κάθε περιβάλλον μάθησης: αυτές που αφορούσαν στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας και αυτές που αφορούσαν στην έννοια της μέτρησης της επιφάνειας. Στη συνέχεια αυτές οι κατηγορίες στρατηγικών χωρίστηκαν σε υπο-κατηγορίες με κριτήριο το είδος των εργαλείων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την κατασκευή κάθε στρατηγικής επίλυσης.

Αποτελέσματα

Οι μαθητές προκειμένου να φέρουν σε πέρας τις δραστηριότητες του μετασχηματισμού και της σύγκρισης κατασκεύασαν μια ποικιλία στρατηγικών

επίλυσης για τα προβλήματα που τους τέθηκαν στα περιβάλλοντα χαρτί-μολύβι και C.AR.ME. αντίστοιχα. Οι στρατηγικές αυτές κατηγοριοποιήθηκαν για κάθε περιβάλλον. Οι κατηγορίες που διαμορφώθηκαν σε κάθε περιβάλλον μάθησης δείχνουν τις δυνατότητες που κάθε ένα δίνει στην έκφραση των ατομικών διαφορών των μαθητών στη μάθηση των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Επιπλέον, το σύνολο των διαφορετικών στρατηγικών που κατασκεύασε κάθε μαθητής σε κάθε ένα από τα δύο περιβάλλοντα μάθησης δείχνει τις ευκαιρίες που αυτά δίνουν στην έκφραση των ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών για τη μάθηση των παραπάνω εννοιών.

Με βάση τα παραπάνω, στην παρακάτω ενότητα παρουσιάζεται: α) η έκφραση των ατομικών και β) των ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών, στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και στο μικρόκοσμο C.AR.ME.

A) Η έκφραση των ατομικών διαφορών των μαθητών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και στο μικρόκοσμο C.AR.ME.

Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Οι μαθητές κατασκεύασαν συνολικά 63 στρατηγικές επίλυσης στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Αυτές κατηγοριοποιήθηκαν με κριτήριο το είδος των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή τους σε 6 κατηγορίες, 3 για τη δραστηριότητα του μετασχηματισμού και 3 για τη δραστηριότητα της σύγκρισης. Από αυτές τις κατηγορίες οι 4 είναι διαφορετικές και παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. Η αναλυτική περιγραφή, οι ερμηνείες, και οι δυσκολίες των μαθητών συζητούνται ευρύτερα στο Κορδάκη (1999).

Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης μαθητών για τα προβλήματα του μετασχηματισμού (Μ) και της σύγκρισης (Σ) επιφανειών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι			Αριθμός Μαθητών
Κατηγορίες που πραγματοποιήθηκαν με..	Μ	Σ	
το "μάτι"		C1	1(Σ)
την περίμετρο	C2	C2	1(Μ), 4(Σ)
διατήρηση του σχήματος και αλλαγή της θέσης του ή ύστερα από τεμαχισμό του σε μέρη και ανασύνθεση των μερών	G2		5(Μ)
τους τύπους υπολογισμού επιφανειών	C8	C8	24(Μ), 28(Σ)

Πίνακας 2. Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης μαθητών για τα προβλήματα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης επιφανειών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι.

Οι μαθητές εξέφρασαν τις ατομικές τους διαφορές στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από 4 διαφορετικές προσεγγίσεις α) με την οπτική τους αντίληψη (κατηγορία C1), β) με την περίμετρο (κατηγορία C2), γ) με διαισθητικές προσεγγίσεις (κατηγορία G2) και δ) με τους τύπους υπολογισμού επιφανειών (κατηγορία C8). Η κυρίαρχη προσέγγιση των μαθητών στο πρόβλημα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης επιφανειών επικεντρώνεται στη χρήση των τύπων υπολογισμού (24 μαθητές στο πρόβλημα του μετασχηματισμού και 28 μαθητές στο πρόβλημα της σύγκρισης επιφανειών). Παρά το ότι η πλειοψηφία των μαθητών πραγματοποίησαν στρατηγικές με χρήση των τύπων υπολογισμού επιφανειών και στα δύο προβλήματα, οι 16 μαθητές και στις δύο δραστηριότητες τους χρησιμοποίησαν με λάθος τρόπο. Διαισθητικές προσεγγίσεις εκφράστηκαν από ελάχιστους μαθητές (5 μαθητές στο πρόβλημα του μετασχηματισμού) ενώ εμφανίσθηκαν και προσεγγίσεις (1 μαθητής) που στηρίζονται στην οπτική αντίληψη για τη σύγκριση επιφανειών. Ακόμη, λίγοι μαθητές (1 μαθητής στο πρόβλημα του μετασχηματισμού και 4 μαθητές στο πρόβλημα της σύγκρισης) φάνηκε ότι μπερδεύουν την επιφάνεια με την περίμετρο.

Στο περιβάλλον C.AR.ME. Οι μαθητές κατασκεύασαν 328 στρατηγικές επίλυσης στο περιβάλλον C.AR.ME. Αυτές κατηγοριοποιήθηκαν με κριτήριο το είδος των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή τους σε 28 κατηγορίες, 14 για κάθε δραστηριότητα. Οι 20 από αυτές τις κατηγορίες είναι διαφορετικές. Οι κατηγορίες αυτές περιγράφονται στον Πίνακα 3 ενώ συζητούνται και ερμηνεύονται αναλυτικότερα, στα Kordaki & Potari (2002) και Kordaki (2003).

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3, το περιβάλλον C.AR.ME. έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τις ατομικές τους διαφορές στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από 20 διαφορετικές προσεγγίσεις. Οι προσεγγίσεις των μαθητών στηρίχθηκαν: α) στην οπτική τους αντίληψη (κατηγορία C1) β) στην περίμετρο (κατηγορία C2) γ) σε αυτόματες μετρήσεις επιφανειών (κατηγορία C3) δ) σε αυτόματους δυναμικούς μετασχηματισμούς επιφανειών (κατηγορία G1) ε) σε διαισθητικές προσεγγίσεις (κατηγορία G2) ζ) στη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων (κατηγορία C6) η) στους τύπους υπολογισμού (κατηγορία C8) και θ) σε συνθετικές προσεγγίσεις (κατηγορίες C4, C5, C7, C9, C10, C11, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9).

Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης των μαθητών για τις δραστηριότητες του μετασχηματισμού (Δ. Μ.Ε.) και της σύγκρισης (Δ.Σ.Ε) επιφανειών στο περιβάλλον C.AR.ME.			Αριθμός μαθητών
Κατηγορίες που πραγματοποιήθηκαν με	Δ.Μ.Ε.	Δ.Σ.Ε.	
το 'μάτι'	C1	C1	1T, 1C
την περίμετρο	C2	C2	4T, 2C
τα εργαλεία για αυτόματους δυναμικούς μετασχηματισμούς	G1	G1	28T, 10C
τα εργαλεία που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών	G2	G2	27T, 14C
τα εργαλεία για τη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων	C6	C6	19T, 25C
τα εργαλεία που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών σε συνδυασμό με τους αυτόματους μετασχηματισμούς	G3	G3	8T, 16C
τα εργαλεία για τη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων σε συνδυασμό με τα εργαλεία για τους αυτόματους μετασχηματισμούς	G4	C7	1T, 9 C
εγκλεισμό του μη κυρτού πολυγώνου σε ένα ελάχιστο υπερσύνολο σε συνδυασμό με τα εργαλεία που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών	G5	-	1T
εγκλεισμό του μη κυρτού πολυγώνου σε ένα ελάχιστο υπερσύνολο σε συνδυασμό με τα εργαλεία που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών και τους αυτόματους μετασχηματισμούς	G6	-	2T
εγκλεισμό του μη κυρτού πολυγώνου σε ένα ελάχιστο υπερσύνολο σε συνδυασμό με τα εργαλεία για τη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων	-	G7	2C
εγκλεισμό του μη κυρτού πολυγώνου σε ένα ελάχιστο υπερσύνολο σε συνδυασμό με τα εργαλεία για τη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων και τους τύπους υπολογισμού επιφανειών	G8	G8	2T, 2C
τους τύπους υπολογισμού επιφανειών	C8	-	1 T, 1C
το εργαλείο για αυτόματη μέτρηση επιφανειών σε συνδυασμό με τους τύπους υπολογισμού επιφανειών	C10	C10	1T, 1 C
το εργαλείο για αυτόματη μέτρηση επιφανειών σε συνδυασμό με τους τύπους υπολογισμού επιφανειών και τους αυτόματους μετασχηματισμούς	G9	-	5T
το εργαλείο για αυτόματη μέτρηση επιφανειών	-	C3	23 C
το εργαλείο για αυτόματη μέτρηση επιφανειών σε συνδυασμό με τα εργαλεία που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών	-	C4	4 C
το εργαλείο για αυτόματη μέτρηση επιφανειών σε συνδυασμό με αυτόματους μετασχηματισμούς	-	C5	5 C
τους τύπους υπολογισμού επιφανειών σε συνδυασμό με τα εργαλεία που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών	-	C9	1 C
τα εργαλεία για τη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων σε συνδυασμό με τους τύπους υπολογισμού επιφανειών	C11	-	2 T
	Sum = 14 cat.	Sum = 14 cat	

Πίνακας 3. Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης μαθητών για τα προβλήματα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης επιφανειών στο περιβάλλον C.AR.ME..

B) Οι ενδο-ατομικές διαφορές των μαθητών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και στο μικρόκοσμο C.AR.ME.

Ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας, 4) δείχνει την έκφραση των ενδο-ατομικών διαφορών των μαθητών στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και στο μικρόκοσμο C.AR.ME. για τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Οι διαφορές αυτές παρουσιάζονται μέσα από το πλήθος και το είδος των στρατηγικών που κατασκεύασε κάθε μαθητής προκειμένου να φέρει σε πέρας τις δραστηριότητες που του δόθηκαν στα πλαίσια της έρευνας.

Το πλήθος (Π.Σ) και το είδος (Ε.Σ) των στρατηγικών που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές στα περιβάλλοντα: C.AR.ME και χαρτί μολύβι (χ-μ)								
Μαθητές	Η δραστηριότητα της σύγκρισης				Η δραστηριότητα του μετασχηματισμού			
	C.AR.ME		χ-μ		C.AR.ME		χ-μ	
	Π.Σ	Ε.Σ	Π.Σ	Ε.Σ	Π.Σ	Ε.Σ	Π.Σ	Ε.Σ
M1	3	C1,C3,C6	1	C2	5	C6, G1, 3*G2	1	G2
M2	6	2*C6, G1, 3*G2	1	C8	7	2*C6, G1, 4*G2	1	G2
M3	3	2*C7, G3	1	C8	5	G1, 2*G2,G3, G5	1	C8
M4	10	C3, 3*C6,G1,5*G2	1	C8	8	2*C6,G1,5*G2	2	C8
M5	4	2*C3, C5,C6	1	1	7	C2,G1, 3*G2,G3,G6	1	C8
M6	7	C3, C4,3*C6,G2,G3	1	C8	7	C8, 3*C6,G1, 2*G2	1	C8
M7	6	C3, 5*C6	1	1	6	2*C6, G1, 3*G2	0	
M8	5	C3, C6, C10,G2,G3	1	C8	7	3*C6,G1, 3*G2	1	C8
M9	6	2*C6,G1, 2*G2,G3	2	C2, C8	7	3*C6,G1, G2,G3,G9	1	C8
M10	5	C5, 2*C7, 2*G1	1	E	6	C6,G1, 3*G2, G3	1	C8
M11	5	C3, 2*C6,G2, G3	1	C8	6	G1, 5*G2	0	
M12	5	C2,C3, C5, 2*C6	1	C8	5	C6,G1, 3*G2	1	C8
M13	4	C3,C6,C7,G2	1	C8	6	2*C6,G1, 3*G2	1	C8
M14	7	C3, C4,2*C6, C7,G1,G3	2	C8, C2	8	C6, C11,G1,G3,G4,G8,2*G9	3	C8
M15	5	2*C6,2*G2, G3	1	C2	8	4*C6,2*G1,G2,G3	0	0
M16	3	3*C6	1	C1	6	2*C6, G1, 3*G2	0	0
M17	7	C3, 2*C6,C7,G2, 2*G3	1	C8	3	G2, 2*G3	2	C8
M18	3	C2, C3,C6	1	C8	3	G1, 2*G3	0	
M19	5	2*C3, C6, G2,G7	1	C8	6	2*C6, G1, 3*G2	1	C8
M20	7	C3, C6, C7,2*G1, 2*G3	1	C8	6	C2,G1,G2, 3*G3	0	0
M21	5	C3, C5,C6,2*G2	1	C8	5	C1,G1, 3*G2	1	C8
M22	4	C3, 2*C7,G1	1	C8	4	C2,G1, 2*G2	2	G2,C8
M23	5	C3,C7,2*G1, G3	1	C8	2	G1, G9	1	C8
M24	7	2*C3, C5, 2*C6,G2, G3	1	C8	3	C2,G1, G2	0	
M25	7	2*C3,C4, 2*C6, G3, G8	1	C8	6	5*C6,G2	2	C8
M26	5	2*C3,C7,G2, G3	2	C8, C8	6	4*C11,G2, G6	1	C8
M27	3	C3,C9,G3	1	C8	3	2*C6, G1	1	C8
M28	6	C3,3*C6,G1, G2	0		5	C6, G1, 3*G3	1	G2
M29	6	2*C3, C4, 2*C6,G3	2	C8, C8	5	C6,G1, G2, G3, G9	1	C8
M30	5	C3, 2*C6,G1, G2	1	C8	8	2*C6,G1, 4*G2, G8	2	C2, G2
Σύνσρατ	159		33		169		30	

Πίνακας 4. Οι ενδο-ατομικές διαφορές των μαθητών για τις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας στα περιβάλλοντα: χαρτί-μολύβι και C.AR.ME.

Για παράδειγμα, στη γραμμή 8 του Πίνακα 4 φαίνεται ότι ο μαθητής M4 κατασκεύασε στο περιβάλλον C.AR.ME. 10 στρατηγικές για το πρόβλημα του μετασχηματισμού (στήλη 2). Οι στρατηγικές αυτές είναι: 1 στρατηγική της κατηγορίας C3, 3 στρατηγικές της κατηγορίας C6 (3* C6), 1 στρατηγική της κατηγορίας G1 και 5 στρατηγικές της κατηγορίας G2 (στήλη 3). Ο ίδιος μαθητής για το πρόβλημα του μετασχηματισμού στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι κατασκεύασε 1 στρατηγική (στήλη 4) της κατηγορίας C8 (στήλη 5). Αντίστοιχα ο ίδιος μαθητής κατασκεύασε στο περιβάλλον C.AR.ME. 8 στρατηγικές για το πρόβλημα της σύγκρισης (στήλη 6). Οι στρατηγικές αυτές είναι: 2 στρατηγικές της κατηγορίας C6, 1 στρατηγική της κατηγορίας G1 και 5 στρατηγικές της κατηγορίας G2 (στήλη 7). Για

το ίδιο πρόβλημα στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι αυτός ο μαθητής κατασκεύασε 2 στρατηγικές (στήλη 8) της κατηγορίας C8 (στήλη 9).

Περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4, (στήλες 4 και 8) το σύνολο σχεδόν των μαθητών πραγματοποίησε μόνο μια στρατηγική επίλυσης για κάθε πρόβλημα που τους δόθηκε στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Ελάχιστοι μαθητές πραγματοποίησαν δύο στρατηγικές επίλυσης στο πρόβλημα του μετασχηματισμού (οι μαθητές M30, M25, M22, M17, M4) και της σύγκρισης (οι μαθητές M9, M14, M26, M29). Μόνον ο μαθητής M14 πραγματοποίησε τρεις στρατηγικές επίλυσης στο πρόβλημα του μετασχηματισμού. Επιπλέον, 7 μαθητές (οι μαθητές M7, M11, M15, M16, M18, M20 και M24) δεν πραγματοποίησαν καμμία στρατηγική επίλυσης για το πρόβλημα του μετασχηματισμού και ένας μαθητής (ο μαθητής M28) δεν πραγματοποίησε καμμία στρατηγική επίλυσης για το πρόβλημα της σύγκρισης.

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, μόνον ένας στους έξι μαθητές (10/60) εκφράζει ενδο-ατομικές διαφορές στη μάθηση των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας ενώ περίπου ένας στους 7 μαθητές (8/60) δεν καταφέρνει να εκφράσει κανενός είδους γνώση σχετικά με αυτές τις έννοιες.

Στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME.. Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα (στήλες 2 και 6), όλοι οι μαθητές πραγματοποίησαν τη δραστηριότητα της σύγκρισης επιφανειών με τουλάχιστον τρεις διαφορετικούς τρόπους και τη δραστηριότητα του μετασχηματισμού με τουλάχιστον δύο τρόπους στο περιβάλλον C.AR.ME. Επιπλέον, η πλειοψηφία των μαθητών (20 μαθητές) κατασκεύασαν τουλάχιστον 5 διαφορετικές προσεγγίσεις (στήλη, 6) στο πρόβλημα του μετασχηματισμού. Ακόμη, η πλειοψηφία των μαθητών (25 μαθητές) κατασκεύασαν τουλάχιστον 4 διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα της σύγκρισης (στήλη 2).

Σχεδόν όλοι οι μαθητές δοκίμασαν να κατασκευάσουν διαισθητικές και δυναμικές προσεγγίσεις στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας (27 και 28 μαθητές αντίστοιχα) μέσα από τη δραστηριότητα του μετασχηματισμού (στήλη, 7). Για την ίδια έννοια - στα πλαίσια της ίδιας δραστηριότητας- οι μισοί μαθητές κατάφεραν να κατασκευάσουν τουλάχιστον μία συνδυαστική προσέγγιση (στήλη, 7).

Στα πλαίσια της δραστηριότητας της σύγκρισης, η πλειοψηφία των μαθητών (23 μαθητές), δοκίμασε να κατασκευάσει αυτόματες προσεγγίσεις στην έννοια της μέτρησης της επιφάνειας (στήλη, 3). Επιπρόσθετα, η πλειοψηφία των μαθητών (23

και 25 μαθητές στο πρόβλημα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης αντίστοιχα) κατασκεύασε προσεγγίσεις που εστιάζονταν στη μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων (στήλες, 3 και 7). Σχεδόν δύο στους τρεις μαθητές (18/30), κατάφεραν να κατασκευάσουν τουλάχιστον μία συνδυαστική προσέγγιση στο πρόβλημα της σύγκρισης (στήλη, 3).

Λαθεμένες (στρατηγικές της κατηγορίας C2) και σωστές προσεγγίσεις φάνηκαν να συνυπάρχουν στη σκέψη των μαθητών (οι μαθητές M12 και M18 στο πρόβλημα της σύγκρισης και οι μαθητές M5, M20 και M22 στο πρόβλημα του μετασχηματισμού).

Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκαν οι ατομικές και ενδο-ατομικές διαφορές των μαθητών για τη μάθηση των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και στο περιβάλλον C.AR.ME. Οι ατομικές διαφορές των μαθητών εκφράστηκαν μέσω των διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης που κατασκεύασαν για κάθε δραστηριότητα σε κάθε περιβάλλον. Οι ενδο-ατομικές διαφορές κάθε μαθητή εκφράστηκαν από το σύνολο των διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης που κάθε ένας μαθητής κατασκεύασε στα δύο διαφορετικά περιβάλλοντα.

Οι ατομικές διαφορές των μαθητών. Από την ανάλυση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι, οι μαθητές εκμεταλλεύτηκαν την ποικιλία των παρεχομένων εργαλείων που παρέχει το περιβάλλον C.AR.ME. και τα χρησιμοποίησαν ανεξάρτητα και σε συνδυασμό προκειμένου να κατασκευάσουν μια ποικιλία στρατηγικών επίλυσης οι οποίες εντάχθηκαν σε 20 διαφορετικές κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές εκφράζουν προσεγγίσεις που στηρίζονται: α) στην αισθητηριακή αντίληψη των μαθητών, β) στην περίμετρο γ) σε διαισθητικές προσεγγίσεις δ) αυτόματες μετρήσεις ε) στην γεωμετρική οπτική μέτρηση της επιφάνειας με χρήση χωρικών μονάδων μέτρησης στ) σε δυναμικές προσεγγίσεις μεταβολής μιας επιφάνειας σε ποικιλία γεωμετρικών σχημάτων ζ) στους τύπους υπολογισμού και η) σε προσεγγίσεις που στηρίζονται σε συνδυασμό των προσεγγίσεων που προαναφέρθηκαν. Από τις προσεγγίσεις αυτές μόνον μία περιλαμβάνει λάθος στρατηγικές (μετασχηματισμός επιφανειών σε ισοδύναμες με βάση την περίμετρο, κατηγορία C2). Η ποικιλία των παρεχομένων εργαλείων έδωσε την ευκαιρία σε κάθε μαθητή να επιλέξει αυτά που ταίριαζαν στη γνωστική του ανάπτυξη και επομένως να

εκφράσει τις ατομικές του διαφορές στη μάθηση των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Το γεγονός αυτό κατά την άποψή μου σημαίνει ότι, ο σχεδιασμός των εργαλείων σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία για το πώς ο μαθητής μαθαίνει τις προς μάθηση έννοιες έδωσε τη δυνατότητα της επιλογής που προαναφέρθηκε στους μαθητές.

Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν άλλα εργαλεία πέραν των τύπων υπολογισμού τους οποίους ανακάλεσαν από τη σχολική γνώση και κατασκεύασαν μόνον 4 τύπους στρατηγικών επίλυσης. Από αυτούς μόνον οι δύο τύποι ήταν ορθοί (μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με χρήση των τύπων υπολογισμού και μετασχηματισμός ενός μη κυρτού πολυγώνου ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση). Παρόλα αυτά, ενώ οι τύποι υπολογισμού χρησιμοποιήθηκαν από την πλειοψηφία των μαθητών και στις δύο δραστηριότητες (24 μαθητές στη δραστηριότητα του μετασχηματισμού και 28 μαθητές στη δραστηριότητα της σύγκρισης), οι 16 μαθητές τους χρησιμοποίησαν με λάθος τρόπο. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι οι τύποι υπολογισμού αποτελούν εργαλεία τα οποία παρά το ότι διδάσκονται από το Δημοτικό σχολείο δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά από τους μαθητές. Η ατελής χρήση των τύπων υπολογισμού από τους μαθητές έχει ερμηνευτεί από το ότι οι τύποι εισάγονται πρόωρα χωρίς να στηρίζονται στη διαισθητική εμπειρία των μαθητών σχετικά με την έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (Piaget, Inhelder and Sheminska, 1981; Rahim & Sawada, 1990).

Και στα δύο περιβάλλοντα εκφράστηκαν πρωταρχικές προσεγγίσεις στις έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (μετασχηματισμοί και συγκρίσεις με το μάτι, κατηγορία C1).

Οι ενδο-ατομικές διαφορές των μαθητών. Η φύση των δραστηριοτήτων που καλούσε τους μαθητές να κατασκευάσουν μετασχηματισμούς και συγκρίσεις με όλους τους δυνατούς τρόπους επέτρεψε στους μαθητές να εκμεταλλευτούν την ποικιλία των εργαλείων που τους παρέχονταν από το περιβάλλον C.AR.ME. και να εκφράσουν τις ενδο-ατομικές τους διαφορές στη μάθηση των παραπάνω εννοιών. Έτσι στο περιβάλλον αυτό και για κάθε δραστηριότητα κάθε μαθητής κατασκεύασε κατά μέσον όρο 6 στρατηγικές επίλυσης ενώ όλοι οι μαθητές κατασκεύασαν τουλάχιστον δύο ορθές στρατηγικές. Με αυτό τον τρόπο όλοι οι μαθητές από τη μια μεριά εμπλούτισαν τα στυλ μάθησής τους σχετικά με τις παραπάνω έννοιες και από την

άλλη τους δόθηκε η ευκαιρία να εκφράσουν και να διορθώσουν λαθεμένες προσεγγίσεις που αφορούσαν σε αυτές τις έννοιες.

Στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι η πλειοψηφία των μαθητών εξέφρασε μόνον μία προσέγγιση για κάθε μαθησική δραστηριότητα. Ελάχιστοι μαθητές εξέφρασαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις ενώ υπήρξαν αρκετοί μαθητές που δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν καμία στρατηγική επίλυσης.

Συμπεράσματα

Από την παρούσα μελέτη προέκυψε ότι τα περιβάλλοντα μάθησης πολλαπλών αναπαραστάσεων δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν καλλίτερα τις ατομικές και ενδο-ατομικές τους διαφορές στη μάθηση των εννοιών της διατήρησης και της μάτρησης της επιφάνειας από ότι φτωχά και στατικά περιβάλλοντα όπως το περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές εκμεταλλεύτηκαν την ποικιλία των παρεχομένων εργαλείων από το περιβάλλον C.AR.ME. προκειμένου να εκφράσουν διαφορετικά είδη γνώσης για τις παραπάνω έννοιες. Κάθε μαθητής επέλεξε τα εργαλεία που ταίριαζαν στη γνωστική του ανάπτυξη και κατασκεύασε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης στα προβλήματα που του δόθηκαν. Έτσι οι μαθητές εξέφρασαν τις ατομικές τους διαφορές στη μάθηση των παραπάνω εννοιών με 20 διαφορετικούς τρόπους ενώ στο στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι οι ατομικές διαφορές των μαθητών περιορίστηκαν στο να εκφραστούν με 4 μόνον διαφορετικούς τρόπους.

Επιπλέον, κάθε μαθητής εκμεταλλεύτηκε την ποικιλία των παρεχομένων εργαλείων από το περιβάλλον C.AR.ME. προκειμένου να φέρει σε πέρας με κάθε δυνατό τρόπο τις δραστηριότητες που του δόθηκαν. Στο περιβάλλον αυτό όλοι οι μαθητές έφεραν σε πέρας επιτυχώς και τις δύο δραστηριότητες και κατασκεύασαν περισσότερες από δύο ορθές προσεγγίσεις στις προς μάθηση έννοιες. Με αυτό τον τρόπο όλοι οι μαθητές διεύρυναν το στυλ μάθησής τους αποκτώντας επίσης μια ερύτερη αντίληψη για τις παραπάνω έννοιες. Αντίθετα, στο περιβάλλον χαρτί μολύβι οι πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε ατελώς την καθιερωμένη στις σχολικές πρακτικές προσέγγιση στην έννοια της μέτρησης της επιφάνειας που στηρίζεται στη χρήση των τύπων υπολογισμού.

Αξιοποίηση της εμπειρίας από την παρούσα έρευνα στη διδακτική πράξη

Οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μπορούν να αξιοποιήσουν στη διδακτική τους πράξη τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εμπλέκουν τους μαθητές τους σε ανοικτού τύπου δραστηριότητες για τη μάθηση γεωμετρικών εννοιών οι οποίες θα πραγματοποιούνται σε ανοικτά υπολογιστικά περιβάλλοντα μάθησης.

Ενδεικτικές δραστηριότητες ανοικτού τύπου οι οποίες μπορούν να πραγματοποιηθούν στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. μπορεί να είναι: Α) Να μετασχηματίσετε με όλους τους δυνατούς τρόπους σε ένα άλλο ισοδύναμο σχήμα οποιασδήποτε μορφής: ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο, ένα τρίγωνο, ένα ακανόνιστο κυρτό πολύγωνο, ένα μη κυρτό πολύγωνο. Β) Να μετασχηματίσετε με όλους τους δυνατούς τρόπους σε ένα άλλο ισοδύναμο σχήμα της ίδιας μορφής: ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο, ένα τρίγωνο. Γ) Να συγκρίνετε με όλους τους δυνατούς τρόπους ένα ορθογώνιο, ή ένα τρίγωνο, ή ένα κυρτό πολύγωνο, ή ένα μη κυρτό πολύγωνο με ένα τετράγωνο τα οποία δεν είναι εύκολο να συγκριθούν με το μάτι. Δ) Να συγκρίνετε με όλους τους δυνατούς τρόπους ένα ορθογώνιο, ή ένα τρίγωνο, ή ένα κυρτό πολύγωνο, ή ένα μη κυρτό πολύγωνο με ένα ορθογώνιο τα οποία δεν είναι εύκολο να συγκριθούν με το μάτι. Ε) Να συγκρίνετε με όλους τους δυνατούς τρόπους ένα ορθογώνιο, ή ένα τρίγωνο, ή ένα κυρτό πολύγωνο, ή ένα μη κυρτό πολύγωνο με ένα τρίγωνο τα οποία δεν είναι εύκολο να συγκριθούν με το μάτι.

Εκτός από το μικρόκοσμο C.AR.ME. που αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης της παρούσας έρευνας και αφορά στη μάθηση της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας υπάρχουν πολύ γνωστά αξιολογικά ανοικτά περιβάλλοντα για τη μάθηση της Ευκλείδιας γεωμετρίας όπως το *‘Cabri-Geometry II’* (Laborde, 1990) και το *‘The Geometer's Sketchpad’* (Klotz, & Jakiw, 1988). Στα περιβάλλοντα αυτά μπορούν επίσης να λάβουν χώρα δραστηριότητες που καλούν τους μαθητές να τις επιλύσουν με όλους τους δυνατούς τρόπους. Οι μαθητές λόγω του ότι έχουν στη διάθεσή τους μια ποικιλία εργαλείων που αφορούν σε μεγάλο εύρος εννοιών της Ευκλείδιας γεωμετρίας μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικά εργαλεία και να προσεγγίσουν γεωμετρικές έννοιες σε συσχέτιση με ένα ευρύτερο πλαίσιο γεωμετρικών εννοιών. Ως παράδειγμα αναφέρεται η δραστηριότητα που τέθηκε σε μαθητές Γυμνασίου στο περιβάλλον Cabri-Geometry II: *‘να κατασκευάσετε με όλους τους δυνατούς τρόπους ισοδύναμα τρίγωνα’*. Οι μαθητές συνέδεσαν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας στα τρίγωνα α) με την έννοια της περιμέτρου, β) με τις έννοιες των

βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών (παράλληλη μεταφορά, συμμετρία και στροφή), γ) με την έννοια της ευθείας (παράλληλες, κάθετες και τεμνόμενες ευθείες), και γ) με την έννοια του κανονικού πολυγώνου (κανονικό εξάγωνο, τετράγωνο) (Kordaki & Balomenou, 2004). Με βάση τα παραπάνω μπορεί κανείς με ασφάλεια να προτείνει τη χρήση ανοικτών υπολογιστικών περιβαλλόντων μάθησης για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών σε συνδυασμό με τις δραστηριότητες ανοικτού τύπου που προαναφέρθηκαν. Με αυτό τον τρόπο θα δοθούν ευκαιρίες στους μαθητές να επιλέξουν τα εργαλεία που ταιριάζουν στη γνωστική τους ανάπτυξη και να κατασκευάσουν μια ευρύτερη αντίληψη για τις προς μάθηση έννοιες.

Αναφορές

- Bennett, N. (1977). *Teaching styles and Pupil Progress*. Cambridge: Harvard University Press.
- Borba, M. & Confrey, G. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multirepresentational environment. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 319-337.
- Bradley, C. A. (1985). The relationship between students' information processing styles and Logo programming. *Journal of Educational Computing Research*, 1, 427-433.
- Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E. and Wilson, J. W., (1975). Notes from National Assessment: basic concepts of area and volume. *Arithmetic Teacher*, 22 (6), 501-507.
- Cohen, L. & Manion, L. (1989). *Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Corno, L. & Snow, R. E. (1984). Adapting Teaching to individual differences among students. In M. Wittrock (ed.), *Third Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan, pp.605-629.
- Crawford, K. (1996a). Vygotskian Approaches in Human Development in the Information Era. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 43-62.
- Crawford, K. (1996b). Distributed cognition, Technology and Change. *Proceedings of the 20th of PME Conference, I* (pp.81-112). Valencia, Spain.
- Hiebert, J. (1981). Units of measure: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28 (6), 38-43.

- Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 67-72). London: Lawrence erlbaum associates.
- Joyce, B. & Weil, M. (1972). *Models of Teaching*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Kaput, J.J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). London: Lawrence erlbaum associates.
- Kaput, J. J. (1994). The Representational Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, B., Winkelman (Eds), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline: The state of the art* (pp. 379- 397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Klotz, E. A., & Jakiw, N. (1988). *The Geometer's Sketchpad* (Software). Berkley, CA: Key Curriculum Press.
- Kordaki, M. & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education*, 31, 405-422.
- Kopδάκη, M. (1999). 'Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό, την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού'. Αδημοσίευτη Διδακτορική διατριβή, ΠΤΔΕ, Παν/μιο Πάτρας, Ελλάδα.
- Kordaki, M. & Avouris, N. (2002). Essential issues for the Design of Open Learning Environments emerging from a field evaluation study. *Journal for Applications in Information Technology*, 1(1), Special Issue for e-learning.
- Kordaki, M. & Potari, D. (2002). The effect of tools of area measurement on students strategies : The case of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100.
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 177-209.
- Kordaki, M. & Balomenou, A. (2004, under revision). Challenging students to view the concept of conservation of area in triangles in a broader context: exploiting the tools of Cabri II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.
- Laborde, J-M. (1990). Cabri-Geometry [Software]. France: Universite de Grenoble.
- Lemerise, T. (1992). On Intra Interindividual Differences in Children's Learning

- Styles. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 191-222). Cambridge, Ma: MIT Press.
- Lesh, R., Mehr, M. & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. (1988). Phenomenography: Exploring Different Conceptions of Reality. In D.M. Fetterman (Eds). *Qualitative Approaches to Evaluation in Education: The Silent Scientific Revolution*, (pp. 176-205). New York: Praeger.
- Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Piaget, J., Inhelder, B. and Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. N.Y: Norton & Company.
- Rahim, M. H. and Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(2), 303-308.
- Ramby, L. M. (1984). The problem-solving style of fifth graders using Logo. Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting. New Orleans, LA.
- Schmeck, R. R. (1988). *Learning Strategies and Learning Styles*. New York: Plenum.
- Snow, R. E. (1986). Individual differences and the design of Educational programs. *American Psychologist*, 41, 1029-1039.
- von Glasersfeld, E. (1990). An Exposition of Constructivism: Why Some Like It Radical. In R. B. Davis, C. A. Maher, and N. Noddings (Eds), *Constructivist views on the teaching and Learning of Mathematics* (pp. 1-3). Reston VA: N.C.T.M.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society*. Cambridge: Harvard University Press.
- Weir, S. (1992). LEGO-Logo: A Vehicle for Learning. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 165-190). Cambridge, Ma: MIT Press.