Προσεγγίσεις μαθητών στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε σχήματα της ίδιας μορφής

Δρ. Μαρία Κορδάκη
Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, e-mail: kordaki@cti.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή γίνεται μελέτη των προσεγγίσεων μαθητών μιας τάξης (της Β΄ Γυμνασίου) στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σχημάτων της ίδιας μορφής στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και με τα συνήθη γεωμετρικά όργανα. Τα σχήματα που μελετώνται είναι τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με κοινή βάση και ίσα ύψη. Η μελέτη της διατήρησης σε σχήματα της ίδιας μορφής έχει ενδιαφέρον και δεν έχει δοθεί μεγάλη έμφαση από τους ερευνητές. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι οι περισσότεροι μαθητές αναγνωρίζουν τη δυνατότητα διατήρησης της επιφάνειας σε παραλληλόγραμμα ενώ λιγότεροι είναι αυτοί που την αναγνωρίζουν σε τρίγωνα. Οι περισσότεροι μαθητές προσπάθησαν να προσεγγίσουν τη διατήρηση με αισθητηριακά κριτήρια, ενώ άλλοι με αυτοσχέδιους κανόνες και τύπους, με βάση την περίμετρο, με βάση την αισθητηριακή ισότητα των μη κοινών μερών των σχημάτων όπως και με τους τύπους υπολογισμού των εμβαδών. Η χρήση των τύπων υπολογισμού πραγματοποιήθηκε με ατελή τρόπο από τους μαθητές παρά το ότι αποτελεί την κυρίαρχη προσέγγιση στην έννοια της επιφάνειας η οποία αρχίζει να διδάσκεται από το δημοτικό σχολείο.

Εισαγωγή

Η διατήρηση της επιφάνειας αποτελεί σημαντική προαπαιτούμενη έννοια για την κατανόηση της λειτουργίας της μέτρησης της επιφάνειας (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981; Hart, 1984). Η μέτρηση της επιφάνειας αποτελεί μέρος του πολιτισμού των κοινωνιών, της επιστήμης, της τεχνολογίας, της καθημερινής ζωής των ανθρώπων γενικά αλλά και του κάθε ατόμου ειδικότερα (Sanders, 1976; Bishop, 1988a; Bishop, 1988b; Inskeep, 1976). Ως έννοια της διατήρησης ορίζεται ‘η δυνατότητα μιας επιφάνειας να μεταβάλλεται ως προς το

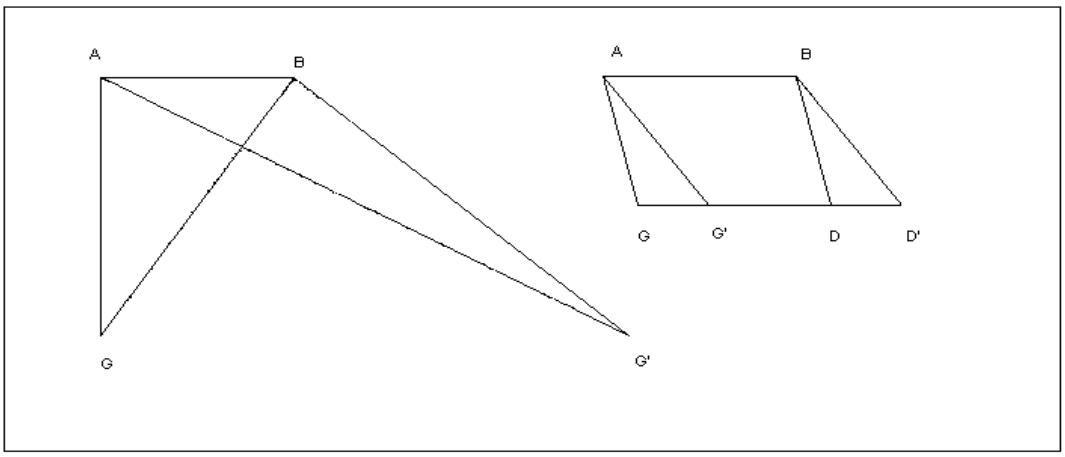
σχήμα χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μεταβάλλεται και ποσοτικά' (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981, 3; Huges & Rogers, 1979). Η κατανόηση της έννοιας της διατήρησης στηρίζεται στην κατανόηση της έννοιας της εξισορρόπησης και της αντιστάθμισης (Piaget, et all., 1981; Carpenter & Lewis, 1976). Για την κατανόηση αυτών των εννοιών είναι απαραίτητη η κατανόηση της αντιστρεψιμότητας (Piaget, et all., 1981; σελ. 268), της αντιμεταθετικής και της μεταβατικής ιδιότητας (Piaget, et all., 1981; Steffe, 1971; Steffe & Hirstein, 1976). Πρωταρχική μορφή κατανόησης της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας θεωρήθηκε η κατανόηση του ότι η επιφάνεια παραμένει αμετάβλητη ύστερα από μετακίνηση (Douady & Perrin, 1986). Ως εξέλιξη της κατανόησης της διατήρησης μιας επιφάνειας θεωρήθηκε η κατανόηση της διατήρησής της ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση η οποία θεωρήθηκε βασική και προαπαιτούμενη για την κατανόηση της λειτουργίας της μέτρησης της επιφάνειας (Douady & Perrin, 1986; Beattys & Maher, 1985; Hirstein, Lamb & Osborne, 1978). Κατά τη διάρκεια της λειτουγίας της μέτρησης η επιφάνεια θεωρείται ότι διατηρείται ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση των ισοδυνάμων μερών της (μονάδων) (Piaget, et all., 1981). Επιπλέον, η επιφάνεια δύναται να διατηρείται κατά τους μετασχηματισμούς της σε ισοδύναμα σχήματα με τη χρήση των τύπων υπολογισμού. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να λαμβάνεται υπ όψιν ο προσεγγιστικός χαρακτήρας της μέτρησης του μήκους όπως και των αριθμητικών πράξεων οι οποίες υπεισέρχονται στους τύπους υπολογισμού. Οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της μέτρησης της επιφάνειας (Tierney, Boyd & Davis, 1986; Menon, 1996) οι οποίες συνδέονται με την έλλειψη κατανόησης της έννοιας της διατήρησης καθώς και με την έλλειψη έμφασης στη μελέτη της επιφάνειας σε αλληλεπίδραση με την περίμετρό της (Baturo & Nason, 1996). Στη σχολική γνώση δεν δίνεται έμφαση στην έννοια της διατήρησης (Κορδάκη, 1999). Επιπλέον δεν δίνεται έμφαση στην πραγματοποίηση της λειτουργίας της μέτρησης της επιφάνειας με ενεργητικό τρόπο δηλαδή στην επικάλυψή της με μονάδες χωρίς κενά και επικαλύψεις, ούτε και στην αναγκαιότητα της οικοδόμησης της έννοιας της μονάδας μέτρησης της επιφάνειας στο μαθητή. Αυτό συμβαίνει στο Δημοτικό αλλά και στο Γυμνάσιο ενώ οι μαθητές εισάγονται πρόωρα στους τύπους υπολογισμού των εμβαδών οι οποίοι αποτελούν και τα μοναδικά εργαλεία τα οποία διαθέτουν για τη μελέτη επιφανειών. Επιπλέον η έννοια της διατήρησης σε σχήματα της

ίδιας μορφής όπως τα παραλληλόγραμμα ή τα τρίγωνα δεν αντιμετωπίζεται στη σχολική γνώση ούτε έχει μελετηθεί από τους ερευνητές μέχρι σήμερα. Ειδικότερα δεν έχει μελετηθεί η έννοια της διατήρησης σε κλάσεις ισοδυναμίας σχημάτων της ίδιας μορφής όπως οι οικογένειες των τριγώνων και των παραλληλογράμμων με κοινή βάση και ίσα ύψη. Η έννοια της διατήρησης της επιφάνειας έχει σημασία για κάθε ηλικία ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο δύναται να αντιμετωπισθεί. Με βάση τα παραπάνω αναμένεται ότι η έννοια αυτή θα δημιουργεί προβλήματα κατανόησης στους μαθητές ακόμα και στο Γυμνάσιο. Στην παρούσα μελέτη διερευνώνται οι προσεγγίσεις μαθητών της Β΄ Γυμνασίου στην έννοια της διατήρησης σε σχήματα της ίδιας μορφής όπως τα παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα με κοινή βάση και ίσα ύψη.

Μεθοδολογία

Η έρευνα αυτή αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Cohen & Manion, 1989; Stenhouse, 1989). Πραγματοποιήθηκε σε σχολείο της Πάτρας και συμμετείχαν οι 29 μαθητές μιας τάξης της Β΄ Γυμνασίου. Η δραστηριότητα που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε τη σύγκριση ως προς την επιφάνεια και με όλους τους δυνατούς τρόπους 2 ομάδων σχημάτων. Τα σχήματα αυτά ήταν 2 παραλληλόγραμμα και 2 τρίγωνα με κοινή βάση και ίσα ύψη τα οποία τους δόθηκαν σε φωτοαντίγραφο και παρουσιάζονται στο σχήμα 1. Στις πλευρές των σχημάτων δεν δόθηκαν αριθμητικά μεγέθη προκειμένου να μην κατευθύνουν τους μαθητές σε συγκρίσεις με την αποκλειστική χρήση των τύπων υπολογισμού αλλά να τους αφήσουν το περιθώριο ανάπτυξης και άλλων διαφορετικών προσεγγίσεων. Τέτοιες προσεγγίσεις θα μπορούσαν να έχουν διαισθητικό ή γενικότερα μη τυπικό (formal) αλλά ποιοτικό περιεχόμενο. Η σημασία της ποιοτικής προσέγγισης των εννοιών που αφορούν στην επιφάνεια έχει υπογραμμισθεί (Rahim & Sawada, 1990) ενώ η αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας από μια γενικότερη οπτική έχει αμφισβητηθεί (Patronis & Thomaidis, 1997). Η δραστηριότητα της σύγκρισης επιφανειών αναφέρεται ως κατάλληλη για την έκφραση ή την κατασκευή εννοιών οι οποίες σχετίζονται με τις έννοιες της διατήρησης ή και της μέτρησης της επιφάνειας (Driscoll, 1981; Osborne, 1976; Steffe, 1971). Η επίλυση προβλημάτων με όλους τους δυνατούς τρόπους δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τις εσωτερικές τους διαφοροποιήσεις που αφορούν στις έννοιες τις οποίες

μελετούν (Lemerise, 1992; Weir, 1992). Πηγές των δεδομένων της έρευνας αποτέλεσαν τα γραπτά των μαθητών σε κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα.



Σχήμα1. Οι ομάδες σχημάτων οι οποίες δόθηκαν στους μαθητές προς σύγκριση

Ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων

Οι προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές όπως αυτές προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων παρατίθενται παρακάτω και αφορούν στα παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα με κοινή βάση και ίσα ύψη

A) <u>Στα παραληλόγραμμα</u>

1) *καμμία προσπάθεια.*

2) Εκτίμηση των επιφανειών *με το 'μάτι'* και σύγκριση. Ορισμένοι μαθητές εκτίμησαν με το μάτι τις δύο επιφάνειες προκειμένου να αποφασίσουν πια είναι η μεγαλύτερη ενώ άλλοι εκτίμησαν με το μάτι

τα μη κοινά μέρη τους και με βάση αυτή την εκτίμηση έκαναν τη σύγκριση. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί μια πρώτη αισθητηριακή προσέγγιση στο πρόβλημα της σύγκρισης (Jones, 1974, ό. π. ο Bishop, 1988) και εκφράζει το ότι οι μαθητές βρίσκονται σε ένα στάδιο πριν τη μέτρηση (Piaget, et all., 1981).

3) Σύγκριση των επιφανειών *με βάση την περίμετρο*. Η προσέγγιση αυτή πιθανό να εκφράζει α) έλλειψη κατανόησης της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας (Kidman & Kooper, 1997) β) σύγχιση μεταξύ περιμέτρου και επιφάνειας (Hart, 1989; Κορδάκη, 1999) γ) ανάγκη έκφρασης με ένα γενικό προσθετικό κανόνα (Cuneo, 1980, ό. π. ο Miller, 1984) δ) ατελή μίμηση των τύπων υπολογισμού των εμβαδών (Menon, 1996; Κορδάκη, 1999).

4) *Με αυτοσχέδιες αιτιάσεις*. Χρησιμοποιήθηκαν αιτιάσεις της μορφής *'τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα διότι σχηματίζουν ορθή γωνία'* καθώς επίσης και *' είναι ίσα διότι έχουν ίσες πλευρές και 2 ορθές γωνίες'*. Οι αιτιάσεις αυτές δεν ήταν ορθές, είναι πιθανό όμως να αποτελούν προσπάθεια δημιουργίας μιας απάντησης με οποιοδήποτε τρόπο (Douady & Perrin, 1986).

5) *Με τους τύπους υπολογισμού.* Για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραλληλογράμμου χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι υπολογισμού του παραλληλογράμμου, του τραπεζίου και του τριγώνου. Η χρήση διαφορετικών τύπων υπολογισμού του εμβαδού του παραλληλογράμμου πιθανό υποννοεί ότι οι μαθητές δεν έχουν ξεκάθαρες τις ιδιότητες των σχημάτων που προαναφέρθηκαν και ως εκ τούτου συγχέουν τα σχήματα αυτά μεταξύ τους. Ορισμένοι μαθητές χρησιμοποίησαν τον τύπο υπολογισμού του τριγώνου με λάθη, προκειμένου να υπολογίσουν τα μη κοινά μέρη των προς σύγκριση παραλληλογράμμων. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις προσεγγίσεις που προαναφέρθηκαν, τη συχνότητα με την οποία εμφανίσθηκαν και το αν πραγματοποιήθηκαν σωστά ή λάθος.

Προσεγγίσεις		Πλήθος μαθητών
Καμμία προσπάθεια		3
Εκτίμηση με το 'μάτι'	Του όλου	4 (3 σωστά)
	Των μη κοινών μερών	4 (σωστά)
Με την περίμετρο		2
Με αυτοσχέδιες αιτιάσεις	διότι σχηματίζουν ορθή γωνία	1
	Ως έχοντα ίσες πλευρές & 2 ορθές γωνίες	1
Με τους τύπους υπολογισμού	Του παρ/μου	10 (σωστά)
	Του τραπεζίου	2 (σωστά)
	Του τριγώνου	1 (λάθος)
	Των μη κοινών μερών	1 (λάθος)

Πίνακας 1. Προσεγγίσεις μαθητών στην έννοια της διατήρησης σε παραλλλόγραμμα με κοινή βάση και ίσα ύψη.

Β) Στα τρίγωνα

1) *Καμμία προσπάθεια.*

2) Εκτίμηση των επιφανειών *με εκτίμηση της περιμέτρου με το 'μάτι'* και σύγκριση. Οι μαθητές θεώρησαν ότι το τρίγωνο το οποίο φαινόταν μακρύτερο λόγω του ότι είχε αισθητά μεγαλύτερη περίμετρο είχε και τη μεγαλύτερη επιφάνεια.. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί μια αισθητηριακή προσέγγιση στο πρόβλημα της σύγκρισης (Jones, 1974, ό. π. ο Bishop, 1988) και επιπλέον εκφράζει σύγχιση μεταξύ περιμέτρου και επιφάνειας (Piaget, et all., 1981).

3) *Με αυτοσχέδιες αιτιάσεις*. Χρησιμοποιήθηκαν αιτιάσεις της μορφής τα τρίγωνα είναι ίσα 'ως έχοντα ίσα τα μη κοινά τους μέρη', 'ως απέναντι από διαγώνιο' και 'ως απέναντι τρίγωνα παραλληλογράμμου'. Οι αιτιάσεις αυτές δεν ήταν ορθές.

4) *Με τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου*. Από τους 15 μαθητές που χρησιμοποίσαν τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου οι 9 μαθητές έκαναν λάθη. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις

προσεγγίσεις που προαναφέρθηκαν, τη συχνότητα με την οποία εμφανίσθηκαν και το αν πραγματοποιήθηκαν σωστά ή λάθος.

Προσεγγίσεις		Πλήθος μαθητών
Καμμία		4
Με το 'μάτι' εκτίμηση της περιμέτρου	Εκτίμηση των τριγώνων	5 (λάθος)
	Ίσα ως έχοντα ίσες πλευρές	1
Με αυτοσχέδιες αιτιάσεις	Ίσα ως έχοντα ίσα τα μη κοινά τους μέρη	1
	Ίσα ως απέναντι από διαγώνιο	1
	Ίσα ως απέναντι τρίγωνα παρ/μου	2
Με τους τύπους υπολ/μού		15 (9 λάθος)

Πίνακας 2. Προσεγγίσεις μαθητών στην έννοια της διατήρησης σε τρίγωνα με κοινή βάση και ίσα ύψη.

<u>Οι δυσκολίες που παρατηρήθηκαν κατά τη χρήση των τύπων υπολογισμού</u>

Κατά τη χρήση των τύπων υπολογισμού από τους μαθητές παρατηρήθηκαν δυσκολίες:

Προσοχής. Οι μαθητές έκαναν λάθη στις αντικαταστάσεις των μηκών των γραμμικών στοιχείων τα οποία υπεισέρχονται στους τύπους υπολογισμού. Για παράδειγμα στη θέση του ύψους το οποίο υπάρχει στους τύπους υπολογισμού δεν τοποθετούσαν τα μεγέθη τα οποία είχαν μετρήσει με το χάρακα για το ύψος αλλά διαφορετικά ή/και αυθαίρετα μεγέθη. Η αδυναμία αυτή των μαθητών πιθανό να σημαίνει ότι βρίσκονταν σε κατάσταση άγχους προκειμένου να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα που τους δόθηκαν με τη χρήση των τύπων υπολογισμού.

Κατανόησης της χρήσης των οργάνων μέτρησης του μήκους. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν το χάρακα τοποθετώντας την αρχή του ή και ένα

τυχαίο σημείο του στην αρχή του προς μέτρηση γραμμικού στοιχείου και όχι την ένδειξη μηδέν.

Κατανόησης των εννοιών που αφορούν στα γραμμικά στοιχεία τα οποία υπεισέρχονται στους τύπους υπολογισμού. Παρατηρήθηκε πρόβλημα στην κατανόηση του ύψους ενός τριγώνου ως το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μια κορυφή προς την απέναντι πλευρά. Οι μαθητές σχεδίαζαν ως ύψος ένα τυχαίο μη κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που συνέδεε δύο πλευρές του τριγώνου.

Ατελούς προσέγγισης στους τύπους υπολογισμού. Χρησιμοποιήθηκαν αυτοσχέδιοι τύποι για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τυχαίου τριγώνου (το εμβαδόν είναι ίσο με το γινόμενο των 2 πλευρών του τριγώνου). Παρατηρήθηκε επίσης αναντιστοιχία βάσης και ύψους στη χρήση του τύπου υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου. Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι υπολογίστηκαν εμβαδά διαφορετικών τριγώνων από τα προς σύγκριση.

Αναγνώρισης των ίσων γραμμικών στοιχείων των προς σύγκριση τριγώνων από τις εικονικές τους αναπαραστάσεις. Οι μαθητές δεν αναγνώρισαν τις κοινές ίσες βάσεις των προς σύγκριση τριγώνων και τα αντίστοιχα προς αυτές ίσα ύψη.

Συνολικά 6/29 μαθητές δεν βλέπουν να διατηρείται η επιφάνεια στα παραλληλόγραμμα ενώ 14/29 είναι εκείνοι που δεν βλέπουν να διατηρείται στα τρίγωνα. Λίγοι μαθητές (12/29) μπορούν να αιτιολογήσουν σωστά τη διατήρηση στα παραλληλόγραμμα ενώ πολύ λίγοι (6/29) στα τρίγωνα. Επιπλέον κανείς μαθητής δεν μπόρεσε να κατασκευάσει δεύτερη προσέγγιση στο πρόβλημα της διατήρησης της επιφάνειας και για τις δύο κατηγορίες σχημάτων. Η αδυναμία αναγνώρισης της διατήρησης σε σχήματα της ίδιας μορφής όπως αυτά τα οποία προαναφέρθηκαν πιθανό να οφείλεται :

1. Στην ελλιπή αντιμετώπιση της έννοιας της διατήρησης στις σχολικές πρακτικές γενικότερα και ειδικότερα σε σχήματα της ίδιας μορφής με έμφαση τα τρίγωνα.
2. Στην έλλειψη κατανόησης του προσεγγιστικού χαρακτήρα της μέτρησης του μήκους.
3. Στην ατελή κατανόηση των τύπων υπολογισμού των εμβαδών.

Συζήτηση – συμπεράσματα

Από την ανάλυση και την ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας προέκυψε ότι οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και προκειμένου για την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε σχήματα της ίδιας μορφής όπως τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα με κοινή βάση και ίσα ύψη :

- Χρησιμοποίησαν ατελώς τη σχολική γνώση στην οποία κυριαρχούν οι τύποι υπολογισμού των εμβαδών. Οι δυσκολίες εμφανίσθηκαν εντονότερα στον υπολογισμό του εμβαδού ενός τυχαίου τριγώνου.
- Η μοναδική προσέγγιση στη διατήρηση της επιφάνειας που αναπτύχθηκε χρησιμοποιεί τους τύπους υπολογισμού. Οι μαθητές δεν ανέπτυξαν και άλλες διαφορετικές προσεγγίσεις προκειμένου να επιλύσουν το πρόβλημα της σύγκρισης επιφανειών.
- Ορισμένοι μαθητές δεν μπόρεσαν να αναπτύξουν καμμία προσέγγιση στη διατήρηση.
- Αρκετοί είναι οι μαθητές οι οποίοι παρουσίασαν πρόβλημα στην κατανόηση της διατήρησης της επιφάνειας στα παραλληλόγραμμα, ενώ περισσότεροι δεν κατανοούν την έννοια στα τρίγωνα. Επιπλέον πολύ λίγοι είναι αυτοί που μπορούσαν να αιτιολογήσουν την ισοδυναμία των επιφανειών των σχημάτων τα οποία τους δόθηκε να μελετήσουν.
- Μεγάλες δυσκολίες παρατηρήθηκαν στους μαθητές προκειμένου να ερμηνεύσουν εικονικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης σε προτασιακά συστήματα αναπαραστάσεων όπως είναι οι τύποι υπολογισμού.
- Η μέτρηση δεν αντιμετωπίστηκε ως μια προσεγγιστική λειτουργία με αποτέλεσμα να οδηγούνται οι μαθητές στο χάσιμο της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας.

Προτάσεις για τη διδασκαλία

Με βάση τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας προκύπτει η ανάγκη στο να δίνεται
έμφαση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών :

- Στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε οποιοδήποτε σχήματα

- Στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε κλάσεις ισοδυναμίας σχημάτων της ίδιας μορφής,
- Στην ερμηνεία της διαλεκτικής σχέσης των εικονικών και των προτασιακών αναπαραστάσεων των κλάσεων ισοδυναμίας σχημάτων της ίδιας μορφής όπως και
- Στον προσεγγιστικό χαρακτήρα της μέτρησης στο Δημοτικό σχολείο αλλά και στο Γυμνάσιο.

Αναφορές

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowldge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics,* 31, 235-268.

Beattys, C. B., & Maher C. A., (1985). Approaches to learning area measurement and its relation to spatial skill. *Proceedings of the* 7th *PME Conference*, (pp. 2-7). Colombus, Ohio.

Bishop, A. J. (1988a). *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J., (1988b). *Mathematics Education and culture.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T. P., & Lewis, R. (1976). The development of the concept of a standard unit of measure in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7,* 53-58.

Cohen, L., & Manion, L. (1989). *Research Methods in Education.* London: Routledge.

Douady, R., & Perrin, M-J (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of 10 PME Conference,* (pp. 253-258). London, England.

Driscoll, M. J., (1981). Measurement in Elementary school Mathematics. In *Research Within Reach* (pp. 29-36). Reston, VA: CEMREL, Inc., N.C.T.M.

Hart, K. (1984). Which comes first - Length, Area, or Volume?. *Arithmetic Teacher,* 31(9), 16-18, 26-27.

Hart, K-M. (1989). Measurement. In John Murray (Eds), *Childrens Understanding of Mathematics*: 11-16, (pp. 9-22). G. Britain: Athenaeum Press Ltd.

Hirstein, J., Lamb, C. E., & Osborn, A. (1978). Student Misconceptions about area measure *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.

Hughes, E. R., & Rogers, J., (1979). The concept of area. In Macmillan Education (Eds), *Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science* (pp. 78-135). Schools Council Research Studies.

Inskeep, J-J. E. (1976). Teaching Measurement to Elementary School Children. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics* (pp. 60-86). Reston, VA: N.C.T.M.

Κορδάκη, Μ. (1999). *Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού*. Διδακτορική διατριβή, Πάτρα, Απρίλιος 1999.

Kidman, G., & Cooper, T. J. (1997). Area integration rules for grades 4, 6, and 8 students. *Proceedings of the* 21st of *PME Conference, 3* (pp.136-143). Lathi, Finland.

Lemerise, T. (1992). On Intra Interindividual Differences in Children's Learning Styles. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 191-222). Cambridge, Ma: MIT Press.

Menon, R. (1996). Assesing preservice teachers' conceptual understanding of perimeter and area. In *Proceedings of the* 20th of *PME Conference,* 1 (pp.184). Valencia, Spain.

Miller, K. (1984). Child as the Measurer of all things: Measurement Procedures and the development of quantitative Concepts. In Sophian (Eds), *Origins of cognitive skills* (193-228). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Osborne, A. R. (1976). Mathematical Distinctions in the Teaching of Measure. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics*, (pp. 11-33). Reston, VA: N.C.T.M.

Patronis, T., & Thomaidis, Y. (1997). On Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics, *Science and Education,* 6, 273-290.

Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry.* N.Y: Norton & Company.

Rahim, M. H., & Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowwing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology,* 21(2), 303-308.

Sanders, W. J. (1976). Why measure?. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics* (pp. 1-9). Reston, VA: N.C.T.M.

Stenhouse, L. (1989). *An Introduction to Curriculum Research and Development.* G.B.: Heinemann Educational Books Ltd.

Steffe, L.P. (1971). Thinking about measurement. *Arithmetic Teacher*, May 1971, 332-338.

Steffe, L.P., & Hirstein, J.J. (1976). Childrens' thinking in measurement situations. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics* (pp. 35-59). Reston, VA: N.C.T.M.

Tierney, C., Boyd, C., & Davis, G., (1986). Prospective primary teachers' conceptions of area. *10th PME Conference*, (pp. 307-315).

Weir, S. (1992). LEGO-Logo: A Vehicle for Learning. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 165-190). Cambridge, Ma: MIT Press.