

Δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον ενός μικρόκοσμου και ο ρόλος τους στους μετασχηματισμούς που αναπτύχθηκαν από μαθητές

Μαρία Κορδάκη

Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, e-mail : kordaki@cti.gr

Περίληψη

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος της ποιοτικής αξιολόγησης του μικρόκοσμου C.AR.ME. (Kordaki & Potari, 1998) ο οποίος κατασκευάστηκε προκειμένου να αποτελέσει ένα περιβάλλον μάθησης των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Στη μελέτη αυτή παρουσιάζονται οι κατηγορίες των μετασχηματισμών που πραγματοποίησαν οι μαθητές μιας τάξης της Β' Γυμνασίου σε αλληλεπίδραση με ορισμένα από τα εργαλεία του μικρόκοσμου. Με τη χρήση των εργαλείων αυτών είναι δυνατή η κατασκευή δυναμικών αναπαραστάσεων της έννοιας της διατήρησης. Από την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων προέκυψε ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν αυτά τα εργαλεία ανεξάρτητα αλλά και σε συνδυασμό με άλλα. Ορισμένα από αυτά προέρχονταν από το περιβάλλον του μικρόκοσμου άλλα από τη σχολική γνώση και άλλα ήταν επινοήσεις των μαθητών. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας συνδυασμούς εργαλείων δημιούργησαν νέες στρατηγικές επίλυσης στο πρόβλημα του μετασχηματισμού οι οποίες σε όλες τις περιπτώσεις ήταν μια αλληλουχία διατηρήσεων. Στην περίπτωση που οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης ανεξάρτητα τους δόθηκε η ευκαιρία να διερευνήσουν την έννοια της διατήρησης γενικά σε μια ποικιλία σχημάτων και ειδικότερα σε σχήματα κλάσεων ισοδυναμίας της ίδιας μορφής.

Λέξεις κλειδιά : μικρόκοσμος, δυναμικές αναπαραστάσεις, διατήρηση, μέτρηση, επιφάνεια.

Abstract

This study is a part of the qualitative evaluation of the C.AR.ME. microworld (Kordaki & Potari, 1998) which has been developed in order to be a possible learning environment of the concepts of conservation and the measurement of area. In this study the categories of transformations which the students of a B' class High School developed, are presented in interaction with certain tools of the microworld. With the use of such tools it is possible to construct dynamic representations of the concept of conservation. From the analysis and interpretation of the data it's concluded that students used these tools independently and in combination with others. Some of them included in the microworld, others came from the school practices and others were students evretics. Students by using combinations of the above tools created new strategic solutions which in all cases were a sequence of conservations. In the case which dynamic representations were used independently students had the opportunity to search the concept of conservation generally in a variety of shapes and especially in classes of equivalent shapes of the same form.

Τα θέματα του συνεδρίου στα οποία εμπίπτει η εργασία : Διδακτική των Μαθηματικών και εκπ/κό λογισμικό για τα Μαθηματικά, Αξιολόγηση εκπ/κού λογισμικού

Επίπεδο εκπ/σης : Τάξη Β' Γυμνασίου Η κατηγορία της εργασίας : ποιοτική, ερμηνευτική μελέτη

Εισαγωγή

Η έννοια της μέτρησης της επιφάνειας συναντάται σε όλους τους λαούς και είναι σημαντική για τον πολιτισμό, την επιστήμη, την τεχνολογία αλλά και την καθημερινή ζωή των ανθρώπων (Hirstein, Lamb & Osborn, 1978; Bishop, 1988). Επιπλέον, αποτελεί σημαντική έννοια των μαθηματικών, συνδέεται με άλλες μαθηματικές έννοιες όπως με την έννοια του αριθμού (Skemp, 1986) την κατανόηση των πολλαπλασιαστικών δομών (Duady & Perrin, 1986) και συνδέει τον αφηρημένο κόσμο των αριθμών με τον κόσμο των φυσικών αντικειμένων (Hiebert, 1981). Η έννοια της μέτρησης της επιφάνειας αποτελεί μια σύνθετη έννοια. Η κατανόησή της στηρίζεται στην έννοια της διατήρησης, εξελίσσεται στην ενεργητική πραγματοποίηση της μέτρησης με μια ποικιλία μονάδων και καταλήγει στη χρήση των τύπων υπολογισμού (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981; Hart, 1984). Η έννοια της διατήρησης ορίζεται ως "η δυνατότητα μιας επιφάνειας να μεταβάλλεται ως προς το σχήμα χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι μεταβάλλεται και ποσοτικά" (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981, σελ. 3 ; Huges & Rogers, 1979). Οι μαθητές αλλά και οι ενήλικες συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της μέτρησης της επιφάνειας οι οποίες αποδίδονται στην έλλειψη κατανόησης των εννοιών που τη συνθέτουν (Maher & Beattys, 1986; Osborne, 1976). Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται ότι η έλλειψη έμφασης στην κατανόηση της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση (Hiebert, 1981; Menon, 1996), ως προϋπόθεση της κατανόησης του ενεργητικού χαρακτήρα της μέτρησης (Carpenter, Coburn, Reys & Wilson, 1975; Johnson, 1986) και η απουσία μελέτης της επιφάνειας σε δυναμική αλληλεπίδραση με το γραμμικό της περίβλημα (Baturo & Nason, 1996) αποτελούν σημαντικούς παράγοντες που επιδρούν στην έλλειψη κατανόησης της έννοιας της μέτρησης της επιφάνειας.

Προκειμένου να είναι δυνατή η μελέτη αυτής της αλληλεπίδρασης από τους μαθητές καθώς και η κατανόηση της εξέλιξης της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από τις έννοιες που τη συνθέτουν κατασκευάστηκε ένας μικρόκοσμος (The C.AR.ME. microworld) με τη βοήθεια των τεχνολογιών της πληροφορικής (Kordaki & Potari, 1988). Ο μικρόκοσμος αυτός υλοποιήθηκε σε γλώσσα Visual Basic για περιβάλλον Windows σε προσωπικό υπολογιστή. Αποτελεί περιβάλλον αλληλεπίδρασης (interactive), και εικονικής ανατροφοδότησης δίνει όμως επιπλέον τη δυνατότητα στο μαθητή να μελετήσει και αριθμητικά στοιχεία των σχημάτων. Οι λειτουργίες του σχεδιάστηκαν ώστε να έχουν μεγάλο βαθμό ανεξαρτησίας στη χρήση. Το περιβάλλον αυτού του μικρόκοσμου διαθέτει στο μαθητή εργαλεία με τα οποία μπορεί να μελετήσει την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση, μέσα από δυναμικούς μετασχηματισμούς σε πολλαπλές αναπαραστάσεις της, όπως και την έννοια της μέτρησης της επιφάνειας με ενεργητικό τρόπο χρησιμοποιώντας μια ποικιλία μονάδων ή/και καρέ όπως επίσης και αυτόματα με τη χρήση των τυποποιημένων μονάδων μέτρησης. Ο σχεδιασμός του μικρόκοσμου ήταν αποτέλεσμα μοντελοποίησης η οποία στηρίχθηκε στη γνωσιοθεωρητική τοποθέτηση του εποικοδομισμού σε συνδυασμό με

την κοινωνικοπολιτισμική διάσταση της γνώσης (Confrey, 1995; Bauersfeld, 1981) και σε αποτελέσματα ερευνών που αφορούν στην κατανόηση της έννοιας της μέτρησης και της διατήρησης της επιφάνειας από τους μαθητές καθώς και στις πιθανές τους ενέργειες προκειμένου να αντιμετωπίσουν προβλήματα που αφορούν σε αυτές τις έννοιες. Ο υπολογιστής χρησιμοποιήθηκε λόγω της δυνατότητας εξεικόνισης (visualization) πολλαπλών εξωτερικών και δυναμικών αναπαραστάσεων των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας καθώς και της εικονικής ανατροφοδότησης που δύναται να παρέχει (Κορδάκη, 1999). Επιπλέον χρησιμοποιήθηκε λόγω της ευκολίας με την οποία μπορεί να πραγματοποιείται από το μαθητή η λειτουργία της μέτρησης με μια ποικιλία μονάδων όπως και η διατήρηση της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν φυσική συνέχεια των μαθηματικών (Karut, 1987) και ιδιαίτερα στη γεωμετρία όπου το σχήμα με την έννοια βρίσκονται σε διαλεκτική σχέση και δύσκολα διαχωρίζονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής λογικής (Mariotti, 1995). Οι νοητικές εικόνες συνδέονται με ερμηνείες της εικονικής πληροφορίας (Pylyshyn, 1984, ο.π. ο Dreyfus, 1995). Η δυνατότητα συγκράτησης τους βοηθιέται σημαντικά από την εξωτερική εικονική υποστήριξη (Dreyfus, 1995). Επιπλέον τα παιδιά μπορούν να εκφράσουν τις σκέψεις τους ευκολότερα σε εικονικά απ' ό,τι σε προτασιακά συστήματα αναπαραστάσεων (Sutherland, 1995). Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν την έννοια ως όλο μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της όπως και να συνειδητοποιήσουν τις κοινές ιδιότητές της και να εξάγουν τη δομή της. (Lesh, Post, & Mehr, 1987). Με τη βοήθεια των δυναμικών αναπαραστάσεων το σχήμα μπορεί να μεταβάλλεται αλλά η εσωτερική λογική με βάση την οποία κατασκευάστηκε ενώ δεν εμφανίζεται διατηρείται (Holzl, 1996). Η ανάγκη αιτιολόγησης αυτής της διαδικασίας αναγκάζει τους μαθητές να κατασκευάσουν τις σχέσεις που υπονοούνται σε αυτές τις μεταβολές (Laborde, 1992).

Οι δυναμικές αναπαραστάσεις στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME.

Οι λειτουργίες με τις οποίες οι μαθητές δύνανται να κατασκευάσουν δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον του μικρόκοσμου παρουσιάζονται στην 5η στήλη του παρακάτω πίνακα κάτω από τον κατάλογο με τίτλο "Ισοδύναμα Σχήματα". Με τη χρήση των λειτουργιών αυτών ο μαθητής μπορεί να πραγματοποιήσει αυτόματους μετασχηματισμούς μιας επιφάνειας σε ισοδύναμα σχήματα, με τυπική γεωμετρική μορφή όπως το τετράγωνο, ένα ορθογώνιο με διαστάσεις που έχουν λόγο $1/2$ και ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο, ως ειδικές περιπτώσεις τριγώνων και ορθογωνίων αντίστοιχα. Οι μετασχηματισμοί αυτοί πραγματοποιούνται με τις επιλογές "τετράγωνο", "ορθογώνιο" και "ορθ. ισοσκ. τρίγωνο" αντίστοιχα. Επιπλέον, είναι δυνατοί οι αυτόματοι μετασχηματισμοί οποιουδήποτε σχήματος σε κλάσεις ισοδυναμίας ορθογωνίων,

παραλληλογράμων ή/και τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη. Στην περίπτωση των ορθογωνίων, η μια διάσταση δίνεται από το μαθητή κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με το πρόγραμμα, ενώ στην περίπτωση των παραλληλογράμων και των τριγώνων, δίνεται η βάση των σχημάτων. Οι κλάσεις ισοδυναμίας των σχημάτων που προαναφέρθηκαν δημιουργούνται με τις επιλογές "Επιπλέον ορθογώνια", "Επιπλέον παραλληλόγραμμα" και "Επιπλέον τρίγωνα" αντίστοιχα. Στον πίνακα παρατίθεται επιπλέον και το σύνολο των λειτουργιών του μικρόκοσμου όπως αυτές εμφανίζονται στο επίπεδο της διεπιφάνειας με το χρήστη.

Αρχείο	Σχεδίαση	Επεξεργασία	Μέτρηση	Αυτόματοι Μετασχηματισμοί	Εργαλεία	Βοήθεια
Ανοιγμα	Τετραγωνικός καμβάς	Επιλογή μέρους	Επιφάνειας	Τετράγωνο	Τετραγωνική μονάδα	
Ανοιγμα τελευταίου	Τριγωνικός καμβάς	Επιλογή όλου	Γωνίας	Ορθογώνια Επιπλέον ορθογώνια	Ορθογώνια μονάδα	
Αποθήκευση τελευταίου	Σχεδίαση πολυγώνου	Κοπή	Ευθυγράμμου τμήματος	Παραλληλόγραμμα Επιπλέον παρ/μμα	Μονάδα του μαθητή	
Αποθήκευση σαν...	Σχεδίαση ευθ. τμήματος	Επικόλληση		Τρίγωνα Επιπλέον τρίγωνα	Επικάλυψη με μονάδα	
Εκτύπωση	Τέλος σχεδίασης πολυγώνου	Σχεδίαση γωνίας στροφής		Εμφάνιση αριθμητικών στοιχείων	Καταμέτρηση μονάδων	
Εξοδος	Καθάρισμα οθόνης	Στροφή			Τετραγωνικό καρέ	
		Σχεδίαση άξονα συμμετρίας			Ορθογώνιο καρέ	
		Συμμετρία ως προς άξονα			Καρέ του μαθητή	
		Σβηστήρες				

Πίνακας 1. Οι λειτουργίες του λογισμικού όπως εμφανίζονται στο περιβάλλον διεπαφής

Με τους αυτόματους μετασχηματισμούς που προαναφέρθηκαν, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να γνωρίσουν ένα πλήθος από τις διαφορετικές μορφές ενός σχήματος όταν το εμβαδόν του διατηρείται, και να διερευνήσουν τη δυνατότητα της διατήρησης των εμβαδών καθώς και τις σχέσεις ισότητας των γραμμικών στοιχείων των σχημάτων οι οποίες υπονοούνται στους μετασχηματισμούς που εμφανίζονται κάθε φορά στην οθόνη του υπολογιστή. Επιπλέον, είναι δυνατή η μελέτη της επιφάνειας σε αλληλεπίδραση με την περίμετρο. Η πραγματοποίηση τέτοιου είδους μετασχηματισμών είναι δύσκολη και χρονοβόρα προκειμένου να πραγματοποιηθεί στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι. Η δυνατότητα διερεύνησης των σχέσεων ισότητας των γραμμικών στοιχείων που υπονοούνται στις κλάσεις ισοδυναμίας των σχημάτων που προαναφέρθηκαν καθώς και η δυνατότητα διατήρησης των

εμβαδών τους, έχει επίσης ενδιαφέρον από την άποψη του ότι ως τα σήμερα δεν έχει μελετηθεί.

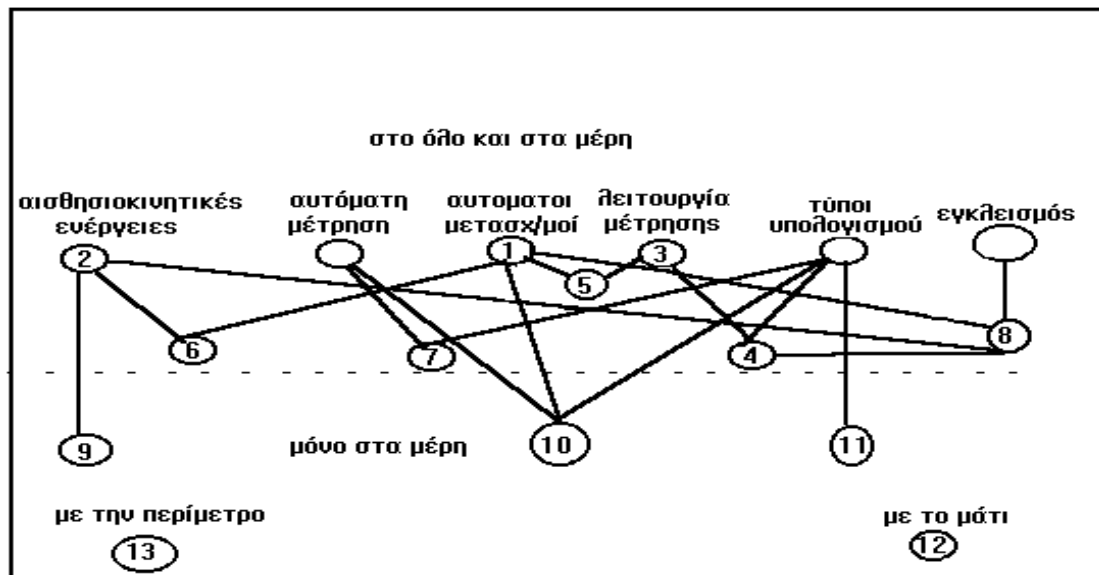
Η μεθοδολογία της έρευνας

Η έρευνα αυτή αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Cohen & Manion, 1989 ; Stenhouse, 1989) στην οποία διερευνάται το είδος των στρατηγικών επίλυσης που κατασκευάζουν οι μαθητές σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία με τα οποία είναι δυνατό να υλοποιούνται δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης στο περιβάλλον του μικρόκοσμου C.AR.ME. και αποτελεί μέρος της συνολικής έρευνας αξιολόγησής του. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολείο της Πάτρας. Συμμετείχαν σε αυτήν τα παιδιά μιας τάξης της Β' γυμνασίου (29 παιδιά). Στους μαθητές δόθηκε ένα μη κυρτό πολύγωνο το οποίο κλήθηκαν να μετασχηματίσουν σε άλλο σχήμα με ίσο ποσό επιφάνειας με όλους τους δυνατούς τρόπους. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε άλλες έρευνες. Γενικά το πρόβλημα του μετασχηματισμού αναφέρεται ως ένα κατάλληλο πρόβλημα προκειμένου να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν ή να κατασκευάσουν έννοιες που αφορούν στη διατήρηση ή στη μέτρηση της επιφάνειας (Carpenter, et all. 1975; Hiebert, 1981). Η επίλυση του προβλήματος με όλους τους δυνατούς τρόπους δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν τις εσωτερικές τους διαφοροποιήσεις που αφορούν στις παραπάνω έννοιες (Weir, 1992; Lemerise, 1992). Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τα ηλεκτρονικά αρχεία καταγραφής των δράσεων των μαθητών με το λογισμικό (log. files), οι ηλεκτρονικές εικόνες των μετασχηματισμών που πραγματοποίησαν, τα χειρόγραφα πρωτόκολλα καθώς και οι κασσέτες μαγνητοφώνου στις οποίες καταγράφηκε οτιδήποτε ειπώθηκε από τους μαθητές ή την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της έρευνας. Η ερευνήτρια συμμετείχε ως παρατηρητής με την ελάχιστη δυνατή συμμετοχή.

Ανάλυση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Οι μαθητές προκειμένου να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα του μετασχηματισμού, χρησιμοποίησαν τα εννοιολογικά εργαλεία τα οποία διέθετε το περιβάλλον του μικρόκοσμου, εννοιολογικά εργαλεία τα οποία μετέφεραν από το περιβάλλον της σχολικής γνώσης καθώς και άλλα τα οποία επινόησαν προκειμένου να αντιμετωπίσουν το μη κυρτό πολύγωνο ως διαφορά δύο κυρτών πολυγώνων : ενός ελάχιστου κυρτού υπερσυνόλου του μη κυρτού πολυγώνου και του συμπληρώματος του ως προς αυτό το υπερσύνολο. Τα εργαλεία που μετέφεραν από τη σχολική γνώση ήταν οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων. Επιπλέον, οι μαθητές πραγματοποίησαν μετασχηματισμούς με συνδυασμό των εργαλείων που προαναφέρθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τα εργαλεία και τους συνδυασμούς εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν στο σύνολο των μετασχηματισμών που δημιουργήθηκαν από τους μαθητές στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Οι αριθμοί που

υπάρχουν στους κόμβους αναφέρονται στις αντίστοιχες κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης που δημιουργήθηκαν. Στους κόμβους που δεν αναγράφεται αριθμός υποδηλώνεται ότι δεν κατασκευάστηκε στρατηγική επίλυσης από τους μαθητές με την αποκλειστική χρήση των εργαλείων που περιλαμβάνονται σε αυτό τον κόμβο.



Σχήμα 2. Οι κατηγορίες των μετασχηματισμών σε συνδυασμό με τα εργαλεία, με τη χρήση των οποίων δημιουργήθηκαν.

Οι κατηγορίες των μετασχηματισμών που πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση των εργαλείων που υλοποιούν δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης στο περιβάλλον του μικρόκοσμου εντάχθηκαν σε 4 κατηγορίες

Κατηγορία 1. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο σχήμα με χρήση των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο

Οι περισσότεροι από τους μαθητές (27 στους 29) πραγματοποίησαν αυτόματους μετασχηματισμούς με τη χρήση των αντίστοιχων εντολών που διατίθενται από το μικρόκοσμο. Κάθε μαθητής μετά το τέλος της πραγματοποίησης του συνόλου των αυτόματων μετασχηματισμών τους οποίους μπορούσε να πραγματοποιήσει στο περιβάλλον του μικρόκοσμου ρωτήθηκε από τον ερευνητή για το αν θεωρεί ή όχι ότι τα "ισοδύναμα" σχήματα που παράγονται αυτόματα δύνανται να έχουν το ίδιο ποσό επιφάνειας και αν μπορεί να δώσει μια εξήγηση στην απάντησή του. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι :

- Οι περισσότεροι μαθητές αναγνωρίζουν τη δυνατότητα δύο ή περισσότερων επιφανειών να έχουν διαφορετική μορφή αλλά το ίδιο εμβαδόν. Για την αιτιολόγηση αυτής της άποψης οι μαθητές υποστήριξαν ότι, είτε θα πρέπει να στηριχθούν στην αξιοπιστία των εντολών του λογισμικού, είτε θα πρέπει να αναπτύξουν μεθόδους σύγκρισης. Αυτές οι μέθοδοι θα μπορούσαν να είναι η αυτόματη μέτρηση των δύο επιφανειών, η σύγκριση με διαδικασίες που θα χρησιμοποιούν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών όπως αυτές είναι προσομοιωμένες στο μικρόκοσμο ή διαδικασίες που θα χρησιμοποιούν τη λειτουργία της μέτρησης.

- Οι περισσότεροι μαθητές φάνηκε ότι αναγνωρίζουν τη δυνατότητα δύο ή περισσότερων παραλληλογράμμων με κοινή βάση και ίσα ύψη να έχουν διαφορετική μορφή αλλά το ίδιο εμβαδόν. Οι αιτιολογήσεις που έδωσαν στηρίχθηκαν κυρίως στην ανάπτυξη κάποιου είδους εξισορρόπησης των επιφανειών. Χαρακτηριστικά αναφέρεται η αιτιολόγηση ενός μαθητή *"όσο μέρος αφαιρείται από το σχήμα από τη μια μεριά τόσο προστίθεται από την άλλη"*. Ελάχιστοι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις για να αιτιολογήσουν την ισότητα των εμβαδών.

- Οι μαθητές στην πλειοψηφία τους, φάνηκε ότι δεν αναγνωρίζουν τη δυνατότητα δύο ή περισσότερων τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη να έχουν διαφορετική μορφή και το ίδιο εμβαδόν. Λίγοι έδωσαν αιτιολογήσεις που στηρίζονταν στην ανάπτυξη κάποιου είδους εξισορρόπησης των επιφανειών. Επιπλέον, ελάχιστοι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις για να αιτιολογήσουν την ισότητα των εμβαδών.

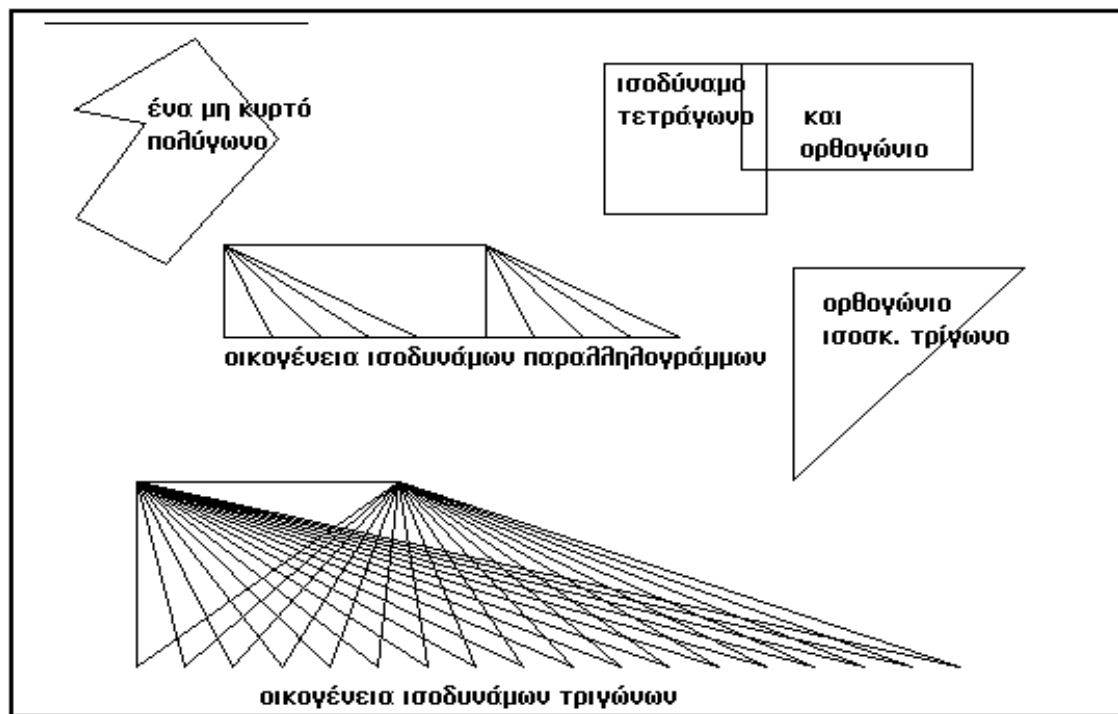
Ερμηνεία Η γνώση αυτή κατασκευάστηκε σε αλληλεπίδραση με τις λειτουργίες του μικρόκοσμου και μέσα από τον αναστοχασμό των μαθητών στα σχήματα που δημιουργούνταν με τις παραπάνω λειτουργίες στην οθόνη του υπολογιστή.

Οι μαθητές με την επιλογή των αυτόματων μετασχηματισμών φαίνεται ότι προτιμούν τις εύκολες λύσεις.

Από την άλλη μεριά φαίνεται ότι οι αυτόματοι μετασχηματισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών και τον εντοπισμό των δυσκολιών τους σχετικά με τη δυνατότητα διατήρησης της επιφάνειας γενικά, αλλά και σε ειδικές μορφές σχημάτων όπως οι κλάσεις ισοδυναμίας των παραλληλογράμμων και των τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη.

Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη διαδικασιών αιτιολόγησης και απόδειξης όπως και για τη διερεύνηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που υπονοούνται στους παραπάνω μετασχηματισμούς.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται οι αυτόματοι μετασχηματισμοί που δημιουργήθηκαν από μαθητή στο περιβάλλον του μικρόκοσμου



Σχήμα 3. Εικόνες των στρατηγικών επίλυσης μαθητή που εντάχθηκαν στην κατηγορία 1.

Κατηγορία 2. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο με συνδυασμό:

α) της λειτουργίας της μέτρησης της επιφάνειας και

β) των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο.

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν στρατηγικές της μορφής :

Μετασχηματισμός με χρήση του τετραγωνικού καρέ και αυτόματος μετασχηματισμός του ήδη μετασχηματισμένου όλου. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Χρήση του τετραγωνικού καρέ. β) Καταμέτρηση των μονάδων που επικαλύπτουν το μη κυρτό πολύγωνο και σύνθεση όσων χρειάζεται από τα μέρη τους. γ) Κατασκευή ενός νέου ισοδύναμου σχήματος τετραγώνου με τον ίδιο αριθμό μονάδων. Η σχεδίαση έγινε με τη βοήθεια των εργαλείων σχεδίασης στον τετραγωνικό καμβά. δ) Αυτόματος μετασχηματισμός του τετραγώνου σε τετράγωνο, ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να έχουν κατανοήσει: α) τη λειτουργία της μέτρησης με τη χρήση καρέ και τις έννοιες που τη συνθέτουν δηλαδή την έννοια της μονάδας, της επικάλυψης με τη μονάδα χωρίς κενά και επικαλύψεις και της καταμέτρησης των μονάδων με σύνθεση από τα μέρη τους όπου αυτό

απαιτείται β) τη διατήρηση της επιφάνειας ύστερα από αλλαγή θέσης και σχήματος και γ) τη διατήρηση της επιφάνειας ύστερα από μετασχηματισμό που πραγματοποιεί ο ίδιος ο μαθητής και ύστερα από μετασχηματισμό του ήδη μετασχηματισμένου σχήματος με τη βοήθεια των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο.

Η γνώση αυτή αποτελεί σύνθεση σχολικής γνώσης και γνώσης που κατασκευάστηκε σε αλληλεπίδραση με τις λειτουργίες του μικρόκοσμου. Συγκεκριμένα η στρατηγική αυτή συνδυάζει τη γνώση εννοιών που αφορούν στη λειτουργία της μέτρησης, και των αυτόματων μετασχηματισμών όπως εκφράζονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί σύνθεση 2 μετασχηματισμών.

Κατηγορία 3. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο με συνδυασμό:

α) των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο και
β) των αισθησιοκινητικών ενεργειών του μαθητή όπως αυτές προσομοιώνονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν στρατηγικές της μορφής :

3.1. Αυτόματος μετασχηματισμός, τεμαχισμός του ήδη μετασχηματισμένου σχήματος και αναδιάταξη των μερών. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Αυτόματος μετασχηματισμός του πολυγώνου σε ισοδύναμο ως προς την επιφάνεια ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. β) Τεμαχισμός του ισοδυνάμου ισοσκελούς τριγώνου σε 2 μέρη. γ) Δημιουργία νέου σχήματος (περίπου τετράγωνο) ύστερα από ανασύνθεση των μερών. δ) Αυτόματη μέτρηση των επιφανειών των σχημάτων για έλεγχο της ορθότητας του μετασχηματισμού.

3.2. Τεμαχισμός, αυτόματος μετασχηματισμός και αναδιάταξη των μερών. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Τεμαχισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε κυρτά μέρη. β) Αυτόματοι μετασχηματισμοί των μερών σε ισοδύναμα σχήματα, κυρίως τετράγωνα και ορθογώνια. γ) Ανασύνθεση των ήδη μετασχηματισμένων μερών για τη δημιουργία νέου ισοδυνάμου σχήματος.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία φαίνεται να έχουν κατανοήσει τη διατήρηση της επιφάνειας ύστερα από : α) αυτόματο μετασχηματισμό β) αλλαγή θέσης και διατήρηση του σχήματος γ) τεμαχισμό και ανασύνθεση δ) μετασχηματισμό, τεμαχισμό και ανασύνθεση των μετασχηματισμένων μερών ή τεμαχισμό, μετασχηματισμό και ανασύνθεση των μετασχηματισμένων μερών της αντίστοιχα. Οι 2 τελευταίοι μετασχηματισμοί που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία αποτελούν σύνθεση 2 μετασχηματισμών.

3.3. Αυτόματος μετασχηματισμός, τεμαχισμός, αυτόματος μετασχηματισμός και αναδιάταξη των μερών. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Αυτόματος μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. β) Τεμαχισμός του ήδη μετασχηματισμένου σχήματος σε δύο μέρη. γ) Αυτόματος μετασχηματισμός του ενός μέρους σε ισοδύναμο ως προς την επιφάνεια τρίγωνο με μία πλευρά ίση, με την πλευρά του ορθογωνίου. δ) Δημιουργία νέου σχήματος ύστερα από επικόλληση σε άλλη θέση της οθόνης του υπολογιστή, με αναδιάταξη του ισοδυνάμου τριγώνου και του υπόλοιπου μέρους του ισοδυνάμου ορθογωνίου έτσι, ώστε να εφάπτονται οι ίσες πλευρές τους.

3.4. Τεμαχισμός, διπλός αυτόματος μετασχηματισμός και αναδιάταξη των μετασχηματισμένων μερών. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Τεμαχισμός του πολυγώνου σε δύο κυρτά μέρη. β) Αυτόματος μετασχηματισμός των δύο μερών σε ισοδύναμα ως προς την επιφάνεια τετράγωνα. γ) Αυτόματος μετασχηματισμός του ενός τετραγώνου από αυτά σε ισοδύναμο ορθογώνιο με μια πλευρά ίση με την πλευρά του άλλου τετραγώνου. δ) Δημιουργία νέου σχήματος ύστερα από επικόλληση σε άλλη θέση της οθόνης του υπολογιστή με αναδιάταξη έτσι, ώστε να εφάπτονται οι ίσες πλευρές του ισοδυνάμου τετραγώνου και του ισοδυνάμου ορθογωνίου.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις τελευταίες 2 στρατηγικές φαίνεται να κατανοούν τις έννοιες της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από : α) αυτόματο μετασχηματισμό β) αλλαγή της θέσης της και διατήρηση του σχήματος γ) τεμαχισμό και ανασύνθεση των μερών της δ) τεμαχισμό, αυτόματο μετασχηματισμό των μερών και επιπλέον αυτόματο μετασχηματισμό των ήδη μετασχηματισμένων μερών και ανασύνθεση των μερών της ε) αυτόματο μετασχηματισμό, τεμαχισμό του μετασχηματισμένου σχήματος, επιπλέον αυτόματο μετασχηματισμό των μερών και ανασύνθεση των ήδη μετασχηματισμένων μερών της (το σημείο αυτό ισχύει μόνον για την προηγούμενη στρατηγική). Οι 2 τελευταίοι μετασχηματισμοί που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία αποτελούν σύνθεση 3 μετασχηματισμών. Κατά την πραγματοποίηση των στρατηγικών που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία οι μαθητές κατασκεύασαν γνώση σε αλληλεπίδραση με τις λειτουργίες του μικρόκοσμου. Το περιβάλλον του μικρόκοσμου έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να πραγματοποιήσουν τις στρατηγικές αυτές, χρησιμοποιώντας τους αυτόματους μετασχηματισμούς σε συνδυασμό με τις προσομοιώσεις των αισθησιοκινητικών ενεργειών τους.

Κατηγορία 4. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο ύστερα από διαδικασίες κυρτοποίησης του μη κυρτού πολυγώνου με εγκλεισμό του σε ένα ελάχιστο υπερσύνολο. Οι στρατηγικές που εντάχθηκαν στην κατηγορία αυτή είχαν την παρακάτω μορφή :

Δημιουργία της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου, αυτόματος μετασχηματισμός της και αφαίρεση του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή θήκη.

Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Κατασκευή της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου. β) Αυτόματος μετασχηματισμός της κυρτής θήκης του σχήματος σε ισοδύναμο τετράγωνο. γ) Αντιγραφή του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή του θήκη. δ) Αφαίρεση του συμπληρώματος από το ισοδύναμο τετράγωνο της κυρτής θήκης του πολυγώνου.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να έχουν : α) Κατανόηση της ισοδυναμίας επιφανειών ύστερα από αυτόματο μετασχηματισμό β) Διαισθητική προσέγγιση της επιφάνειας ενός μη κυρτού πολυγώνου ως αφαίρεση δύο κυρτών πολυγώνων. Του ισοδύναμου τετραγώνου της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου και του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή του θήκη. Κατά την πραγματοποίηση αυτής της στρατηγικής, δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις προσομοιώσεις των αισθησιοκινητικών ενεργειών τους σε συνδυασμό με τους αυτόματους μετασχηματισμούς στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση 2 μετασχηματισμών, διότι προκύπτει από την αφαίρεση του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή του θήκη, από την ήδη μετασχηματισμένη αυτόματα κυρτή θήκη.

Κατηγορία 5. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο με συνδυασμό : α) της αυτόματης μέτρησης που διατίθενται από το μικρόκοσμο β) των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο και γ) των τύπων υπολογισμού

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν στρατηγικές της παρακάτω μορφής

Τεμαχισμός, αυτόματη μέτρηση και άθροιση των εμβαδών, μετασχηματισμός με χρήση των τύπων υπολογισμού και αυτόματος μετασχηματισμός του ήδη μετασχηματισμένου σχήματος. Η στρατηγική αυτή πραγματοποιήθηκε από τους μαθητές με τις ενέργειες που παρατίθενται παρακάτω και με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Χωρισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε 2 κυρτά σχήματα. Ένα τρίγωνο και ένα παραλληλόγραμμο. β) Αυτόματη μέτρηση του καθενός από αυτά και άθροιση των εμβαδών τους για τον υπολογισμό του εμβαδού του μη κυρτού πολυγώνου. γ) Εύρεση της τετραγωνικής ρίζας του εμβαδού του μη κυρτού πολυγώνου. δ) Κατασκευή ενός νέου ισοδύναμου σχήματος τετραγώνου με διαδοχικές δοκιμές με το ίδιο εμβαδόν (κατασκευή πλευράς - αυτόματη μέτρηση μήκους πλευράς). ε) Αυτόματος μετασχηματισμός του ισοδύναμου τετραγώνου σε τετράγωνο, σε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο και σε ορθογώνιο.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να έχουν κατανόηση της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από : α) τεμαχισμό και αναδιάταξη των μερών της β) αλλαγή σχήματος και θέσης λόγω κάποιου αυτόματου μετασχηματισμού που πραγματοποιείται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου και γ) κατανόηση της σχέσης μεταξύ του εμβαδού του τετραγώνου και της πλευράς του. Η στρατηγική αυτή αποτελεί συνδυασμό των

τύπων υπολογισμού, των αυτόματων μετασχηματισμών και των αισθησιοκινητικών ενεργειών του παιδιού όπως αυτές προσομοιώνονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί σύνθεση 2 μετασχηματισμών.

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας προέκυψε ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα εργαλεία με τα οποία μπορούν να υλοποιηθούν δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης προκειμένου να κατασκευάσουν

- την έννοια της διατήρησης ως αλληλουχία διατηρήσεων
- νέες προσεγγίσεις στην έννοια της διατήρησης σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία. Ορισμένα από τα εργαλεία αυτά προέρχονταν από το περιβάλλον του μικρόκοσμου, άλλα από τη σχολική γνώση και άλλα ήταν επινοήσεις των μαθητών.
- να μελετήσουν τη δυνατότητα της διατήρησης και τις σχέσεις ισότητας των γραμμικών στοιχείων κλάσεων ισοδυναμίας σχημάτων της ίδιας μορφής όπως τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα με κοινή βάση και ίσα ύψη
- να διερευνήσουν τη δυνατότητα της διατήρησης της επιφάνειας σε σχήματα διαφορετικής μορφής

Από μια γενικότερη θεώρηση τα δεδομένα της έρευνας δύνανται να υποστηρίξουν την υπόθεση του ότι κάθε νέο εργαλείο που διατίθεται στους μαθητές τους βοηθά να στηριχθούν σε αυτό και χρησιμοποιώντας το ανεξάρτητα ή και σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία να δημιουργήσουν νέες προσεγγίσεις.

Αναφορές

- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge: Alternative perspectives for Mathematics Education. In D. A. Grows, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds), *Effective Mathematics Teaching* (pp.27-46). Hillsdale, New Jersey: N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W., (1975). Notes from National Assessment: basic concepts of area and volume. *Arithmetic Teacher*, 22 (6), 501-507.
- Confrey, J. (1995). How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?. In L.P. Steffe & J. Gale (Eds),

- Constructivism in Education* (pp. 185-226). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cohen, L., & Manion, L. (1989). *Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Douady, R., & Perrin, M-J (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of 10 PME Conference*, (pp. 253-258). London, England.
- Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education*, (pp.3-19). Berlin: Springer - Verlag.
- Hart, K. (1984). Which comes first - Length, Area, or Volume?. *Arithmetic Teacher*, 31(9), 16-18, 26-27.
- Hiebert, J. (1981). Units of measure: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28 (6), 38-43.
- Hirstein, J., Lamb, C. E., & Osborn, A. (1978). Student Misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.
- Holz, R. (1996). How does "dragging" affect the Learning Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(2), 169-187.
- Hughes, E. R., & Rogers, J., (1979). The concept of area. In Macmillan Education (Eds), *Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science* (pp. 78-135). Schools Council Research Studies.
- Johnson, H. C. (1986). Area is a measure. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 17(4), 419-424.
- Kaput, J.J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). London: Lawrence erlbaum associates.
- Κορδάκη, Μ. (1999). *Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού*. Διδακτορική διατριβή, Πάτρα, Μάιος, 1999.
- Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education*, 31, 405-422.
- Laborde, C. (1992). Solving problems in computer based geometry environments :The influence of the futures of the software. *ZDM*, 92(4), 128-135.
- Lemerise, T. (1992). On Intra Interindividual Differences in Children's Learning Styles. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 191-222). Cambridge, Ma: MIT Press.
- Lesh, R., Post, T., & Mehr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). London: Lawrence erlbaum associates.

- Maher, C.A., & Beattys, C. B. (1986). Examining the Construction of area and its Measurement by Ten to Fourteen Year old Children. In E. Lansing, G. Lappan, R. Even (Eds). *Proceedings of 8th PME Conference*, (pp. 163-168). N. A.
- Mariotti, M., A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). Berlin: Springer-Verlag.
- Menon, R. (1996). Assessing preservice teachers' conceptual understanding of perimeter and area. In *Proceedings of the 20th of PME Conference*, 1 (pp.184). Valencia, Spain.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Osborne, A. R. (1976). Mathematical Distinctions in the Teaching of Measure. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics*, (pp. 11-33). Reston, VA: N.C.T.M.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. N.Y: Norton & Company.
- Skemp, R. (1986). Measurement. In *Psychology of Learning mathematics*. Middlesex: Penguin Books.
- Stenhouse, L. (1989). *An Introduction to Curriculum Research and Development*. G.B.: Heinemann Educational Books Ltd.
- Sutherland, R. (1995). Mediating mathematical action. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 71-81). Berlin: Springer-Verlag.
- Weir, S. (1992). LEGO-Logo: A Vehicle for Learning. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 165-190). Cambridge, Ma: MIT Press.