

ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Αλέξιος Μαστρογιάννης¹ και Μαρία Κορδάκη²

¹Τμήμα Μαθηματικών και ²τμήμα Μηχ/κών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Παν/μίου Πατρών

alexmastr@upatras.gr, kordaki@cti.gr

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις προσεγγίσεις μαθητών Τετάρτης Δημοτικού στην έννοια της ‘αμφίπλευρης συμμετρίας’ μέσα από τη μελέτη μιας πληθώρας σχημάτων. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε μέσω της πειραματικής διαδικασίας δίπλωσης σχημάτων από την καθημερινή ζωή, γεωμετρικών σχημάτων της καθημερινής ζωής και τυπικών γεωμετρικών σχημάτων. Στην έρευνα συμμετείχαν 30 μαθητές. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε ότι - μέσω αυτής της διαδικασίας - οι μαθητές αναγνωρίζουν σχετικά εύκολα τα συμμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και τα τυπικά γεωμετρικά σχήματα ενώ συναντούν δυσκολίες στη μελέτη συμμετρικών γεωμετρικών σχημάτων της καθημερινής ζωής. Ακόμη, οι μαθητές φαίνεται να αναγνωρίζουν εύκολα τα μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα, ενώ αμφιταλαντεύονται στη μελέτη σχημάτων με χρωματική διαφοροποίηση των μερών τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συμμετρία αποτελεί χαρακτηριστικό στοιχείο της τελειότητας της φύσης καθώς επίσης και βασικό στοιχείο της ομορφιάς και της καλαισθησίας των μνημείων όλων των πολιτισμών (Weyl, 1991; Malkevitch, 1998). Η συμμετρία αποτελεί βασική έννοια των μαθηματικών και μάλιστα ισχύει ότι κάθε ισομετρία είναι ισοδύναμη με τη σύνθεση το πολύ τριών αξονικών συμμετριών (Δρόσος, 1995). Η συμμετρία προτείνεται ως βασική έννοια των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (NCTM, 2000; Malkevitch, 1998; Jones, 2000). Επιπλέον, η συμμετρία ως τρόπος σκέψης έχει αναγνωρισθεί ως ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικής σκέψης στα πλαίσια της αποτελεσματικής επίλυσης προβλημάτων (Leikin, 2007; Leikin, Berman and Zavlansky, 1998; 2000). Ως εκ τούτου, η επίγνωση της σημαντικότητας της συμμετρίας στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, από τους εκπαιδευτικούς, προβάλλεται ως αναγκαία (Dreyfus and Eisenberg, 1990). Παρόλα αυτά, η ‘συμμετρική σκέψη’ δεν αναγνωρίζεται από αυτούς ως σημαντικό εργαλείο απλοποίησης της επίλυσης προβλημάτων (Dreyfus and Eisenberg, 1990). Ακόμη, η συμμετρία δεν αποτελεί κυρίαρχη έννοια των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών γενικά και ειδικότερα στη χώρα μας.

Η έννοια της συμμετρίας έχει διερευνηθεί σε παιδιά Δημοτικού και Γυμνασίου (11-15 ετών) (Assessment of Performance Unit, 1981;1982; όπως παρατίθεται από την Vaid, 2005; Küchemann, 1980; Γαγάτσης, 1989) ακόμη και σε φοιτητές υποψηφίους

εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Τσελεπίδης και Μαρκόπουλος, 2005). Από τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών προκύπτει ότι ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (πάνω από τους μισούς μαθητές) εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της αξονικής συμμετρίας.

Όσον αφορά στις μαθησιακές δραστηριότητες που έχουν προταθεί για τη διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών αυτές αφορούν κυρίως στην κατασκευή συμμετρικών γεωμετρικών σχημάτων ή συνθέσεων αυτών -ως προς άξονα συμμετρίας- τα οποία ορισμένες φορές είναι τοποθετημένα πάνω σε πλέγμα (Vaid, 2005; Sherris, 1998). Ορισμένες φορές δόθηκαν δραστηριότητες οι οποίες εστίαζαν σε σημεία όπου οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες.

Παρά το ότι η συμμετρία υπάρχει στη φύση και στην καθημερινή μας ζωή και μια πληθώρα ερευνών έχει πραγματοποιηθεί σχετικά με τη συμμετρία και τις δυσκολίες των μαθητών, μελέτη σχημάτων ως προς το κατά πόσον διαθέτουν άξονες συμμετρίας (αμφίπλευρη συμμετρία; Weyl, 1991) από μαθητές 4^{ης} Δημοτικού, ως σήμερα, δεν έχει αναφερθεί από ερευνητές. Ειδικότερα, δεν έχουν αναφερθεί δραστηριότητες διερεύνησης των αντιλήψεων των μαθητών για την αμφίπλευρη συμμετρία οι οποίες να ξεκινούν από τη μελέτη σχημάτων της καθημερινής ζωής, στη συνέχεια να μελετούν την αμφίπλευρη συμμετρία σε γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και τέλος να καταλήγουν στη μελέτη τυπικών γεωμετρικών σχημάτων. Στην παρούσα μελέτη παρουσιάζονται οι αντιλήψεις μαθητών Τετάρτης Δημοτικού για την αμφίπλευρη συμμετρία μέσα από δραστηριότητες του τύπου που προαναφέρθηκαν.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ως συμμετρία μπορεί να θεωρηθεί ένας μετασχηματισμός ενός μαθηματικού αντικειμένου, ο οποίος αφήνει κάποια ιδιότητα του αντικειμένου αναλλοίωτη (Jones, 2000). Η συμμετρία είναι επίσης μια έννοια-κλειδί η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο οργάνωσης άλλων μαθηματικών αντικειμένων πχ. κατηγοριοποίηση τετράπλευρων με βάση την ύπαρξη και τον αριθμό των αξόνων συμμετρίας τους. Στη γεωμετρία, η συμμετρία μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός του επιπέδου στον εαυτό του, έτσι ώστε να διατηρούνται οι αποστάσεις (Washburn, and Crowe, 1988). Ως τέτοιοι μετασχηματισμοί αναφέρονται: η αξονική συμμετρία, η στροφή ως προς σημείο με βάση συγκεκριμένη γωνία ω και η μεταφορά ως προς διάνυσμα δ .

Μια σειρά από έρευνες για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σχετικά με την έννοια της συμμετρίας στη γεωμετρία έχουν αναφερθεί (Küchemann, 1980; Birgs, 1987; Sherris, 1998; Vaid, 2005). Σύμφωνα με τον Birgs (1987), οι 10 βασικές δυσκολίες των παιδιών σχετικά με τη συμμετρία ως προς άξονα είναι οι παρακάτω: α) το συμμετρικό ενός οριζόντιου αντικειμένου είναι ένα οριζόντιο είδωλο, β) το συμμετρικό ενός κατακόρυφου αντικειμένου είναι ένα κατακόρυφο είδωλο, γ) το συμμετρικό ενός κατακόρυφου/οριζόντιου αντικειμένου είναι ένα οριζόντιο/

κατακόρυφο είδωλο, δ) η αξονική συμμετρία συνδέεται με ζεύγη λέξεων οι οποίες είναι αντίθετες, ε) αν ένα αντικείμενο βρίσκεται στο σημείο τομής των γραμμών ενός πλέγματος τότε και το συμμετρικό του θα έχει την ίδια ιδιότητα, στ) το νόημα της έκφρασης 'προχώρα κάθετα' εξαρτάται από τη φύση του αντικειμένου και/ή την παρουσία πλέγματος και/ή την κλίση του άξονα συμμετρίας, ζ) το συμμετρικό ενός σχήματος δεν είναι μοναδικό, η) το συμμετρικό ενός σχήματος είναι παρόμοιο και όχι ίσο με το αρχικό σχήμα, θ) ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας εάν αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη ακόμη και αν αυτά αναστραφούν ή μετατεθούν και ι) μόνο το περίγραμμα ενός σχήματος είναι ενδιαφέρον, το χρώμα και οι λεπτομέρειες του σχήματος μπορεί να αγνοηθούν.

Γενικότερα, η επίδοση των μαθητών σχετικά με τη συμμετρία ως προς άξονα συνδέθηκε με τα παρακάτω τέσσερα χαρακτηριστικά του προς μελέτη προβλήματος (Küchemann, 1980; APU, 1981; 1982 όπως παρατίθεται από την Vaid, 2005): α) την κλίση του άξονα συμμετρίας, όπου τα παιδιά βρίσκουν πιο εύκολα τα συμμετρικά σχημάτων ως προς οριζόντιους/κάθετους άξονες συμμετρίας ενώ δυσκολεύονται όταν οι άξονες είναι πλάγιοι, β) την παρουσία/απουσία πλέγματος. Η παρουσία του βοηθά στην εκτίμηση μηκών και κατεύθυνσης χωρίς όμως να είναι σαφές αν προσφέρει κάτι στη συμμετρία, γ) την πολυπλοκότητα του σχήματος, πχ. το συμμετρικό μιας σημαίας είναι δυσκολότερο να κατασκευαστεί από ότι το συμμετρικό μιας τελείας, και δ) την κλίση του αντικειμένου. Είναι ευκολότερο για τους μαθητές να κατασκευάζουν τα συμμετρικά σχημάτων τα οποία είναι κάθετα ή παράλληλα στον άξονα συμμετρίας.

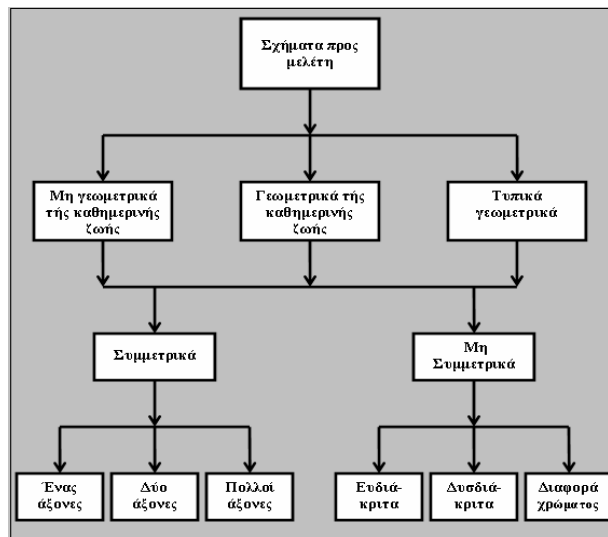
Επιπλέον, σύμφωνα με τον Küchemann, (1980) τα παιδιά προσεγγίζουν τη συμμετρία μέσα από τα παρακάτω τέσσερα στάδια: α) ολιστικό στάδιο: το αντικείμενο αντιμετωπίζεται ως ένα όλο και το συμμετρικό του αντιμετωπίζεται ως μια απλή οντότητα χωρίς αναφορά σε επί μέρους μήκη και γωνίες, β) ημι-αναλυτικό στάδιο: κατασκευάζεται πρώτα το συμμετρικό μέρους του αντικειμένου και το υπόλοιπο σχεδιάζεται διαισθητικά, έτσι ώστε να ταιριάζουν οι κλίσεις και τα μήκη του υπόλοιπου σχήματος, γ) πλήρως αναλυτικό στάδιο: το αντικείμενο αντιμετωπίζεται ως σύνολο σημαντικών σημείων. Στη συνέχεια κατασκευάζονται τα συμμετρικά τους και ενώνονται μεταξύ τους, αν και σε μερικές περιπτώσεις το συμμετρικό που προκύπτει μπορεί να φαίνεται λανθασμένο, και δ) αναλυτικό-συνθετικό στάδιο: η αναλυτική και η ολιστική προσέγγιση συνυπάρχουν, έτσι ώστε το συμμετρικό του σχήματος να είναι ακριβές και να φαίνεται σωστό.

Τρεις συνολικά προσεγγίσεις συνιστώνται για την επίλυση προβλημάτων συμμετρίας: α) η δίπλωση με τη χρήση διαφανούς χαρτιού, β) η χρήση καθρέπτη και γ) η θεώρηση του μελετώμενου σχήματος ως συνόλου σημείων των οποίων τα συμμετρικά ως προς άξονα κατασκευάζονται με κατασκευή καθέτων ως προς τον άξονα και προέκταση σε ίσο τμήμα. Βοηθητικά, για την ακρίβεια της σχεδίασης του συμμετρικού με βάση αυτή την προσέγγιση, ορισμένες φορές τα σχήματα σχεδιάζονται πάνω σε πλέγμα. Στο Δημοτικό σχολείο προτείνεται η χρήση των δύο

πρώτων προσεγγίσεων και αντί της τρίτης προτείνεται η χρήση πλέγματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η έννοια της συμμετρίας στα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού στη χώρα μας, μέχρι και το Σεπτέμβριο του 2006, ήταν υποβαθμισμένη στο να διδάσκεται μόνο μία ώρα στην Τετάρτη τάξη. Όμως, με την εισαγωγή των νέων σχολικών βιβλίων στα Μαθηματικά, η έννοια της συμμετρίας καταλαμβάνει μεγαλύτερο χώρο στα αναλυτικά προγράμματα και προτείνεται να διδάσκεται σε κάθε τάξη, ξεκινώντας από την Τρίτη Δημοτικού.

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας η οποία έχει στόχο τη διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών Δημοτικού σχετικά με την αμφίπλευρη συμμετρία, δηλαδή κατά πόσον ένα σχήμα διαθέτει έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο 18^ο Δημοτικό σχολείο Αγρινίου και συμμετείχαν 30 μαθητές της Τετάρτης τάξης. Οι μαθητές είχαν διδαχτεί την έννοια της συμμετρίας πριν έξι μήνες στο σχολείο. Παρόλα αυτά, κανένας μαθητής δεν ήταν σε θέση να περιγράψει τι είναι ένα συμμετρικό σχήμα και ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του. Για το λόγο αυτό, ο ερευνητής τους παρουσίασε συμμετρικά σχήματα από την καθημερινή ζωή σχεδιασμένα σε διαφανές χαρτί τα οποία φάνηκε ότι χωρίζονται σε δύο ίσα μέρη, που με χρήση της δίπλωσης συμπίπτουν. Με βάση αυτά τα παραδείγματα συζητήθηκε η έννοια του συμμετρικού σχήματος και του άξονα συμμετρίας.



Εικόνα 1. Σχήματα προς μελέτη σε σχέση με την ‘αμφίπλευρη’ συμμετρία

Προκειμένου να εμπεδώσουν την έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας, οι μαθητές κλήθηκαν να πειραματιστούν με μια σειρά από δραστηριότητες. Πιο συγκεκριμένα, στους μαθητές δόθηκαν να μελετήσουν, ως προς τη συμμετρία, τρεις κατηγορίες σχημάτων (Εικόνα 1): α) μη γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής τα οποία προέρχονταν από τον κόσμο της εμπειρίας των μαθητών, β) γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και γ) τυπικά γεωμετρικά σχήματα.

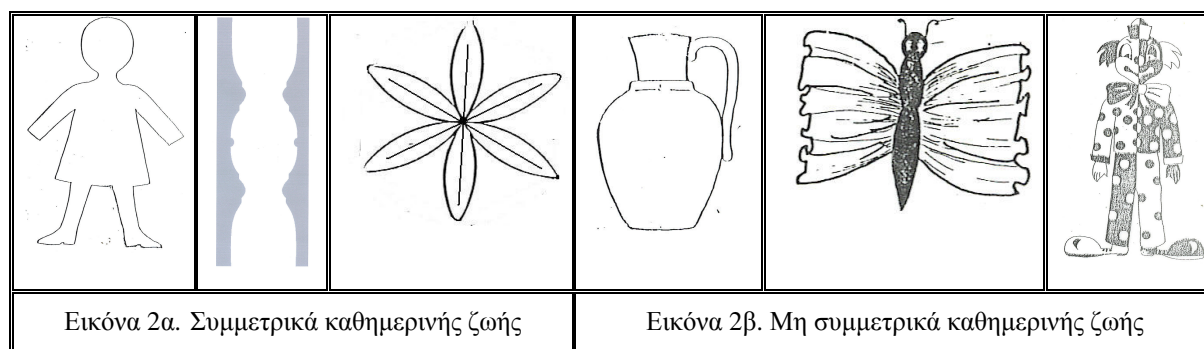
Στους μαθητές δόθηκαν πρώτα τα σχήματα της καθημερινής ζωής, για να τους προκαλέσουν το ενδιαφέρον για επεξεργασία και μελέτη. Στη συνέχεια, δόθηκαν τυπικά γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής, για να τους βοηθήσουν να μεταβούν χωρίς προβλήματα στη μελέτη γεωμετρικών σχημάτων και τέλος δόθηκαν τα τυπικά γεωμετρικά σχήματα. Τα σχήματα που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία ήταν: α) συμμετρικά σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας και β) μη συμμετρικά σχήματα, τα οποία ήταν άλλοτε ευδιάκριτα και άλλοτε έμοιαζαν συμμετρικά, είχαν όμως δυσδιάκριτες διαφορές, προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια που απαιτείται στην απόλυτη ταύτιση των μερών τους, ύστερα από δίπλωση ως προς άξονα συμμετρίας. Ακόμη, σε κάθε κατηγορία εντάχθηκαν μη συμμετρικά σχήματα τα οποία ως προς το περίγραμμά τους ήταν συμμετρικά, όμως υπήρχε χρωματική διαφοροποίηση σε μέρη τους, προκειμένου να αποσαφηνισθεί ο ρόλος του χρώματος στη συμμετρία. Όλες οι παραπάνω κατηγορίες σχημάτων δόθηκαν στους μαθητές στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και πιο συγκεκριμένα σε διαφανές χαρτί, για να είναι εύκολη η διαπίστωση της ταύτισης των μερών τους με χρήση της δίπλωσης. Οι μαθητές, σε κάθε περίπτωση, κλήθηκαν να απαντήσουν για το αν κάθε σχήμα είναι συμμετρικό ή όχι και να σχεδιάσουν τον/τους άξονες συμμετρίας του. Στους μαθητές παραχωρήθηκε όσος χρόνος χρειάστηκαν για να επεξεργαστούν τα 72 σχήματα που τους δόθηκαν. Αυτός ο χρόνος ήταν περίπου 6 διδακτικές ώρες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι αντιλήψεις των μαθητών για την ‘αμφίπλευρη συμμετρία’ εντάχθηκαν σε 18 κατηγορίες με βάση το είδος των σχημάτων τα οποία μελετήθηκαν.

Α. Σχήματα της καθημερινής ζωής:

Α1. Συμμετρικά: Στους μαθητές δόθηκαν προς μελέτη σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας. Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 2α.



Εικόνα 2. Παραδείγματα συμμετρικών/μη συμμετρικών σχημάτων καθημερινής ζωής

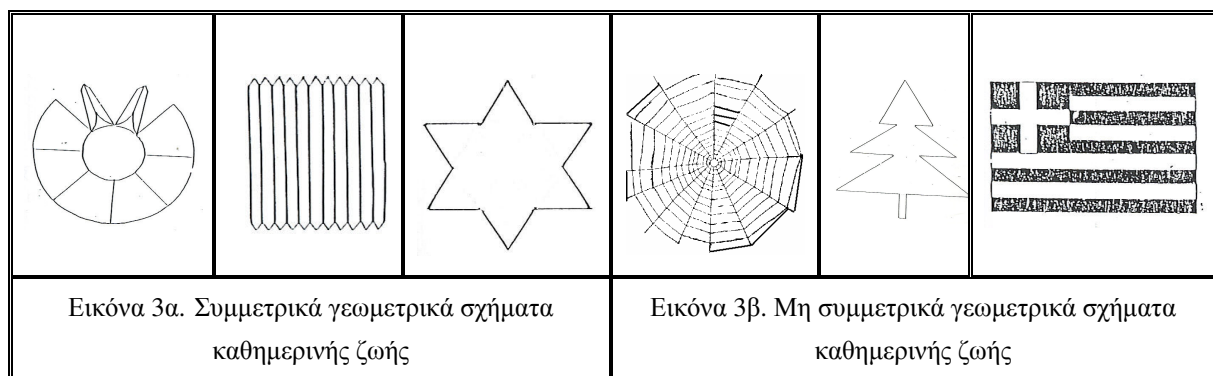
Όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν και χάραξαν τον άξονα συμμετρίας στα σχήματα (6 σχήματα) με έναν άξονα, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών (τουλάχιστον 19 μαθητές, ποσοστό ορθών απαντήσεων 70%) αναγνώρισαν και χάραξαν τους δύο άξονες συμμετρίας στα αντίστοιχα σχήματα (3 σχήματα). Στο σημείο αυτό

διευκρινίζεται ότι ο όρος ‘ποσοστό των ορθών απαντήσεων’ θα αναφέρεται στο εξής ως το σύνολο των ορθών απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές στα πλαίσια της μελέτης όλων των σχημάτων μιας κατηγορίας πχ. στις 90 απαντήσεις που δόθηκαν για τη μελέτη 3 σχημάτων οι ορθές ήταν οι 63 οπότε ως ποσοστό των ορθών απαντήσεων προκύπτει 70%. Οι μισοί περίπου μαθητές (τουλάχιστον 16 μαθητές, ποσοστό ορθών απαντήσεων 60%) αναγνώρισαν και χάραξαν τους άξονες συμμετρίας σε σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας (2 σχήματα).

A2. Μη συμμετρικά: Τα σχήματα που δόθηκαν στους μαθητές προς μελέτη ήταν ως προς τη δυνατότητα αισθητηριακής αναγνώρισης της συμμετρίας: ευδιάκριτα (9 σχήματα), δυσδιάκριτα (6 σχήματα) και συμμετρικά ως προς το περίγραμμά τους αλλά με χρωματική διαφοροποίηση (2 σχήματα). Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 2β. Τα μη συμμετρικά σχήματα αναγνωρίστηκαν ως τέτοια από όλους τους μαθητές, εκτός από την περίπτωση των σχημάτων τα οποία διέφεραν μόνον ως προς το χρώμα, τα οποία χαρακτηρίστηκαν ως συμμετρικά από την πλειονότητα των μαθητών (τουλάχιστον 25 μαθητές, ποσοστό των ορθών απαντήσεων 17%).

B. Γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής.

B1. Συμμετρικά: Στους μαθητές δόθηκαν προς μελέτη σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας. Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 3α.



Εικόνα 3. Παραδείγματα γεωμετρικών συμμετρικών/μη συμμετρικών σχημάτων καθημερινής ζωής

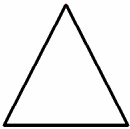
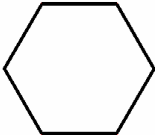
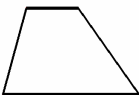
Από την πειραματική έρευνα προέκυψε, ότι για τα σχήματα που προτάθηκαν προς μελέτη, με έναν (6 σχήματα) και δύο άξονες συμμετρίας (8 σχήματα), οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών ήταν ορθές. Πιο συγκεκριμένα, τουλάχιστον 20 μαθητές αναγνώρισαν και χάραξαν τον άξονα σε κάθε σχήμα, ποσοστό ορθών απαντήσεων 75%). Σχετικά λιγότεροι μαθητές (τουλάχιστον 15 μαθητές, ποσοστό ορθών απαντήσεων 50%), αναγνώρισαν και χάραξαν τους δύο άξονες συμμετρίας σε σχήματα τα οποία ήταν σχεδιασμένα, έτσι ώστε εύκολα να δημιουργείται οπτική απάτη. Τέλος, πάνω από τους μισούς μαθητές, αναγνώρισαν και χάραξαν τους άξονες

συμμετρίας σε γεωμετρικά σχήματα (6 σχήματα) της καθημερινής ζωής με πολλούς άξονες (4-6 άξονες) συμμετρίας (ποσοστό ορθών απαντήσεων 58%). Όμως, αξίζει να σημειωθεί, ότι σε σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας οι μαθητές κατάφεραν να βρουν τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα ενώ δυσκολεύονταν να βρουν τους υπόλοιπους.

B2. Μη συμμετρικά: Τα σχήματα που δόθηκαν στους μαθητές προς μελέτη ήταν όπως και στην περίπτωση A2: ευδιάκριτα, δυσδιάκριτα και συμμετρικά ως προς το περίγραμμά τους αλλά με χρωματική διαφοροποίηση. Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 3β. Τα ευδιάκριτα μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής (5 σχήματα) αναγνωρίστηκαν ως τέτοια από όλους τους μαθητές. Οι πιο πολλοί μαθητές (τουλάχιστον είκοσι μαθητές, ποσοστό 85% των ορθών απαντήσεων) διέκριναν και τα μη συμμετρικά με ανεπαίσθητες διαφορές (7 σχήματα). Στην περίπτωση των σχημάτων, τα οποία διέφεραν μόνον ως προς το χρώμα (3 σχήματα), όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά μιας και το θέμα της μη συμμετρικότητας ενός σχήματος με διαφορετικό χρωματισμό μερών πχ. ελληνική σημαία, είχε αναλυθεί στο προηγούμενο μέρος της έρευνας.

Γ. Τυπικά γεωμετρικά σχήματα

Γ1. Συμμετρικά: Και σε αυτό το μέρος της έρευνας, στους μαθητές δόθηκαν προς μελέτη σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας. Παραδείγματα των σχημάτων αυτών, παρουσιάζονται στην Εικόνα 4α.

					
Εικόνα 4α. Συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα			Εικόνα 4β. Μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα		

Εικόνα 4. Παραδείγματα γεωμετρικών συμμετρικών/μη συμμετρικών σχημάτων

Από την πειραματική έρευνα προέκυψε, ότι όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν και χάραξαν τον άξονα συμμετρίας στο αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα πχ. στο ισοσκελές τρίγωνο. Σχεδόν όλοι οι μαθητές (25 μαθητές), αναγνώρισαν τους δύο άξονες συμμετρίας σε ορθογώνιο, ενώ αναγνώρισαν μόνον τον κατακόρυφο άξονα στο ευθύγραμμο τμήμα. Σχετικά με τη συμμετρία, σε σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας, σχεδόν όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν ότι το τετράγωνο έχει 4 άξονες συμμετρίας. Όμως, σχετικά λίγοι μαθητές (9 μαθητές) αναγνώρισαν ότι το κανονικό εξάγωνο έχει 6 άξονες συμμετρίας.

Γ2. Μη συμμετρικά: Τα σχήματα, που μελετήθηκαν και σε αυτό το μέρος της έρευνας, ήταν ως προς τη δυνατότητα αισθητηριακής αναγνώρισης της συμμετρίας: ευδιάκριτα, δυσδιάκριτα και συμμετρικά ως προς το περίγραμμά τους αλλά με χρωματική διαφοροποίηση. Παραδείγματα αυτών σχημάτων παρουσιάζονται στην Εικόνα 4β. Από την ανάλυση των γραπτών των μαθητών προέκυψε, ότι τα ευδιάκριτα, μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα και τα σχήματα με το ίδιο περίγραμμα αλλά με διαφορετικά χρωματικά μέρη, όπως το χρωματισμένο με πλάγιες ταινίες τετράγωνο, αναγνωρίστηκαν ως τέτοια από όλους τους μαθητές. Σχετικά με τα δυσδιάκριτα ως προς τη συμμετρία γεωμετρικά σχήματα, δύο στους τρεις μαθητές αναγνώρισαν ότι το πλάγιο παραλληλόγραμμο δεν διαθέτει κανέναν άξονα συμμετρίας, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές ισχυρίζονταν ότι υπάρχει κατακόρυφος ή και οριζόντιος άξονας.

Γενικά στις κατασκευές των μαθητών παρατηρήθηκε ότι ο άξονας συμμετρίας στην πλειονότητα των σχημάτων σχεδιάστηκε ως ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του σχήματος και όχι ως ευθεία γραμμή. Πολλές φορές, αυτό το ευθύγραμμο τμήμα σχεδιαζόταν κατά μήκος της δίπλωσης χωρίς τη χρήση κανόνα. Αξίζει επίσης να σημειωθεί, ότι όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν την εμπειρική διαισθητική προσέγγιση μέσω της δίπλωσης, προκειμένου να τεκμηριώσουν τις υποθέσεις τους σχετικά με τη συμμετρικότητα των σχημάτων και την εύρεση του πλήθους των αξόνων συμμετρίας. Επιπλέον, σε σχήματα με περισσότερους από έναν άξονα συμμετρίας, εύκολα εντοπιζόταν ο κατακόρυφος, λιγότερο εύκολα ο οριζόντιος και δυσκολότερα οι πλάγιοι άξονες. Ακόμη, διαπιστώθηκε, ότι οι μαθητές πολλές φορές χάραζαν ακόμη έναν κατακόρυφο/οριζόντιο άξονα σε κάποιο σχήμα, ενώ δεν χρειαζόταν. Επίσης, σε πολυγωνικά σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας, οι άξονες αυτοί μετριούνταν δύο φορές.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μια πρώτη ματιά στα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δείχνει ότι η έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας είναι δυνατό να κατανοηθεί από μαθητές της Τετάρτης Δημοτικού. Η δίπλωση, ως πειραματική προσέγγιση, για την αναγνώριση των συμμετρικών σχημάτων και των αξόνων συμμετρίας τους αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την εμπειρική τεκμηρίωση των υποθέσεων των μαθητών και την κατασκευή γνώσης σχετικά με την αμφίπλευρη συμμετρία.

Ως προς την αμφίπλευρη συμμετρία, σε συμμετρικά σχήματα με έναν άξονα συμμετρίας, φάνηκε ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές, μέσω της δίπλωσης, μπορούν να τα αναγνωρίσουν ως συμμετρικά και να χαράξουν τον άξονα συμμετρίας. Όσον αφορά στη μελέτη σχημάτων με δύο και περισσότερους άξονες συμμετρίας, πάνω από τους μισούς μαθητές, φάνηκε ότι μπορούν να αναγνωρίσουν και να χαράξουν τους άξονες συμμετρίας τους. Αξίζει να σημειωθεί, ότι περισσότεροι μαθητές αναγνώρισαν ως συμμετρικά και χάραζαν τους άξονες συμμετρίας στα σχήματα της καθημερινής ζωής και στα καθαρά γεωμετρικά σχήματα, ενώ περισσότεροι συνάντησαν δυσκολίες στην αναγνώριση αυτών των στοιχείων σε συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα της

καθημερινής ζωής. Κατά την άποψή μας, αυτό πιθανώς να συμβαίνει λόγω του ότι αυτά τα σχήματα είναι σχετικά πολύπλοκα και αποτελούν συνήθως συνθέσεις γεωμετρικών σχημάτων.

Επιπλέον, οι μαθητές αναγνώρισαν ευκολότερα τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας από τον οριζόντιο ή τους πλάγιους άξονες. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται σε μια εστίαση των μαθητών στις κατακόρυφες ευθείες και τμήματα, για λόγους οι οποίοι μπορεί να απορρέουν από τη φύση και τον πολιτισμό.

Ακόμη, σχεδόν κανένα μη συμμετρικό σχήμα δεν χαρακτηρίστηκε ως 'συμμετρικό' από τους μαθητές, εκτός από λίγες περιπτώσεις που αφορούσαν δυσδιάκριτα μη συμμετρικά σχήματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι απαντήσεις των μαθητών ίσως ήταν απόρροια του μειωμένου ενδιαφέροντος τους για την απόλυτη ταύτιση των μερών του σχήματος, ύστερα από δίπλωση ως προς άξονα συμμετρίας. Επίσης, οι σχηματισμοί και τα χρώματα στο εσωτερικό σχημάτων φάνηκε ότι μπερδεύουν τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές παρατηρήθηκε ότι λειτουργούν αντιφατικά στο πώς λαμβάνουν υπόψη τους το περιεχόμενο ενός σχήματος προκειμένου να το χαρακτηρίσουν ως συμμετρικό ή όχι. Για παράδειγμα, σε συμμετρικά σχήματα με βάση το περίγραμμα αλλά με χρωματική διαφορά των μερών τους οι μαθητές επικεντρώθηκαν στο περίγραμμα και αγνόησαν τα χρώματα, χαρακτηρίζοντάς τα ως συμμετρικά. Αντίθετα, συμμετρικά σχήματα και με συμμετρικούς σχηματισμούς στο εσωτερικό τους χαρακτηρίστηκαν ως μη συμμετρικά από τους μαθητές.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι η διαδικασία κατανόησης της αμφίπλευρης συμμετρίας μέσω της δίπλωσης προκάλεσε την ευχαρίστηση και το ενδιαφέρον των μαθητών σε όλη τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Birks, D. (1987). *Reflection: A Diagnostic teaching experiment*. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.
- Γαγάτσης Α. και Γαλλή, Ε. (1989). Αντιλήψεις των μαθητών για την ορθογώνια συμμετρία. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 11/89, σελ.173-205.
- Δρόσος, Κ. (1995). *Από τη Γεωμετρία στην Αλγεβρα: Μια εισαγωγή στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς*. Εκδόσεις Παν/μίου Πατρών, σελ. 17.
- Dreyfus, T. and Eisenmberg, T. (1990). Symmetry in Mathematics Learning. In *ZDM-International Reviews on Mathematics Education*, 22(2), pp.53-59.
- Hoyles, C. and Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, pp27-59.
- Jone, M.C. and Soto-Johnson, H. (2006). *Mathematics Teacher*, 99(9), p.606.

- Jones, K. (2000). Critical issues in the design of the school geometry curriculum. In Bill Barton 9Ed), *Readings in Mathematics Education*. Auckland, New Zealand: University of uckland, pp.75-90.
- Küchemann, D.E. (1980). Children difficulties with single reflections and rotations. *Mathematics in schools*, 9(2), pp.12-13.
- Küchemann, D.E. (1981). Reflections and Rotations. In Hart, K.M. (Eds) *Children's understanding of mathematics:11~16*, The C.S.M.S Mathematics Team, London.
- Leikin, R., Berman, A. and Zavlansky, O. (1998). Definition of Symmetry. *Symmetry: Culture and Science: Order and Disorder*, 9(2-4), pp. 375-382.
- Leikin, R., Berman, A. and Zavlansky, O. (2000). Applications of symmetry to problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), pp.799-809.
- Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *5th CERME*, Larnaca, Cyprus, 2007.
- Malkevitch, J. (1998). 'Finding room in the curriculum for recent geometry'. In Mammana, C. and Villani, V. (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*. Kluwer, Dordrecht, pp. 18-25.
- Moyer, P. (2001). Patterns and symmetry: Reflections of Culture. *Teaching Children Mathematics*, 8(3), p.140.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA: NCTM.
- Sherris, K. (1998). *The teaching of Reflection*. http://www.partnership.mmu.ac.uk/cme/Student_Writings/CDAE/Karen_Sherris/Karen_Sherris.html. Accessed: 30 May, 2007.
- Shoffel, J.L. and Breyfogle, M.L. (2005). Reflecting shapes: Same or Different. *Teaching Children Mathematics*, 11(7), p. 378.
- Τσελεπίδης, Ν. και Μαρκόπουλος, Χ. (2005). Συμμετρία: Σχέση ισότητας ή γεωμετρικός μετασχηματισμός. *1^ο Συνέδριο Ενωσης. Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών*. Αθήνα, Δεκέμβριος, 2005, σελ.383-393
- Vaid, N. (2005). *Lessons on Reflection with Year 7*. http://www.partnership.mmu.ac.uk/cme/Student_Writings/CDAE/NidaVaid/NidaCDA.html. Accessed: 30 May, 2007.
- Washburn, D. and Crowe, D. (1988). *Symmetries of Culture*. University of Washington Press. 1988.
- Weyl, H. (1991). *Συμμετρία*. Αθήνα: Τροχαλία.