ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Αλέξιος Μαστρογιάννης1 και Μαρία Κορδάκη2
1Τμήμα Μαθηματικών και 2τμήμα Μη/κ/ών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Παν/μίου Πατρών
alexmastr@upatras.gr, kordaki@cti.gr

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις προσεγγισές των μαθητών Τετάρτης Δημοτικού στην έννοια της 'αμφίπλευρης συμμετρίας' μέσα από τη μελέτη μιας πληθώρας σχημάτων. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε μέσω της πειραματικής διαδικασίας διπλώσης σχημάτων από την καθημερινή ζωή, γεωμετρικών σχημάτων της καθημερινής ζωής και τυπικών γεωμετρικών σχημάτων. Στην έρευνα συμμετέχουν 30 μαθητές. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε ότι - μέσω αυτής της διαδικασίας - οι μαθητές αναγνωρίζουν σχετικά εύκολα τα συμμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και τα τυπικά γεωμετρικά σχήματα ενώ συναντούν δυσκολίες στη μελέτη συμμετρικών γεωμετρικών σχημάτων της καθημερινής ζωής. Ακόμη, οι μαθητές φαίνεται να αναγνωρίζουν εύκολα τα μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα, ενώ αμφισβητούνται στη μελέτη σχημάτων με χρωματική διαφοροποίηση των μερών τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ


ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ως συμμετρία μπορεί να θεωρηθεί ένας μετασχηματισμός ενός μαθηματικού αντικειμένου, ο οποίος αφήνει κάποια ιδιότητα του αντικειμένου αναλλοίωτη (Jones, 2000). Η συμμετρία είναι επίσης μια έννοια-κλειδί η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο οργάνωσης άλλων μαθηματικών αντικειμένων πχ. κατηγοριοποίηση τετράπλευρων με βάση την ύπαρξη και τον αριθμό των αξόνων συμμετρίας τους. Στη γεωμετρία, η συμμετρία μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός του επιπέδου στον εαυτό του, έτσι ώστε να διατηρούνται οι αποστάσεις (Washburn, and Crowe, 1988). Ως τέτοιου μετασχηματισμού αναφέρονται: η αξονική συμμετρία, η στροφή ως προς σημείο με βάση συγκεκριμένη γωνία ω και η μεταφορά ως προς διάνυσμα δ.

Μια σειρά από έρευνες για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σχετικά με την έννοια της συμμετρίας στη γεωμετρία έχουν αναφερθεί (Küchemann, 1980; Birgs, 1987; Sherris, 1998; Vaid, 2005). Σύμφωνα με τον Birgs (1987), οι 10 βασικές δυσκολίες των παιδιών σχετικά με τη συμμετρία ως προς αξόνα είναι οι παρακάτω: α) το συμμετρικό ενός οριζόντιου αντικειμένου είναι ένα οριζόντιο είδωλο, β) το συμμετρικό ενός κατακόρυφου αντικειμένου είναι ένα κατακόρυφο είδωλο, γ) το συμμετρικό ενός κατακόρυφου/οριζόντιου αντικειμένου είναι ένα οριζόντιο/
κατακόρυφο είδοσό, δ) η αξονική συμμετρία συνδέεται με ξεύγη λέξεων οι οποίες είναι αντίθετες, ε) αν ένα αντικείμενο βρίσκεται στο σημείο τομής των γραμμών ενός πλέγματος τότε και το συμμετρικό του θα έχει την ίδια ιδιότητα, στ) το νόημα της έκφρασης ‘προξώρα κάθετα’ εξαρτάται από τη φύση του αντικειμένου καθή/την παρουσία πλέγματος καθή/την κλίση του άξονα συμμετρίας, ζ) το συμμετρικό ενός σχήματος δεν είναι μοναδικό, η) το συμμετρικό ενός σχήματος είναι παρόμοιο και όχι ίσο με το αρχικό σχήμα, θ) ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας εάν αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο ίδια μέρη ακόμη και αν αυτά αναστραφούν ή μετατεθούν και ι) μόνο το περίγραμμα ενός σχήματος είναι ενδιαφέρον, το χρώμα και οι λεπτομέρειες του σχήματος μπορεί να αγνοηθούν.

Γενικότερα, η επίδοση των μαθητών σχετικά με τη συμμετρία ως προς άξονα συνδέθηκε με τα παρακάτω τέσσερα χαρακτηριστικά του προς μελέτη προβλήματος (Küchemann, 1980; APU, 1981; 1982 όπως παρατίθεται από την Vaid, 2005): α) την κλίση του άξονα συμμετρίας, όπου τα παιδιά βρίσκονταν πιο εύκολα τα συμμετρικά σχήματα ως προς οριζόντιους/κάθετους άξονες συμμετρίας ενώ δυσκολεύονταν όταν οι άξονες είναι πλάγιοι, β) την παρουσία/απουσία πλέγματος. Η παρουσία του βοηθά στην εκτύπωση μηκών και κατεύθυνσης χωρίς όμως να είναι σαφές αν προσφέρει κάτι στη συμμετρία, γ) την πολύπλοκητήτη του σχήματος, χ) το συμμετρικό μιας σημαίας είναι δυσκολότερο να κατασκευαστεί από ότι το συμμετρικό μιας τελείας, και δ) την κλίση του αντικειμένου. Είναι ευκολότερο για τους μαθητές να κατασκευάζουν τα συμμετρικά σχήματα τα οποία είναι κάθετα ή παράλληλα στον άξονα συμμετρίας.

Επιπλέον, σώματα με τον Küchemann, (1980) τα παιδιά προσεγγίζουν τη συμμετρία μέσα από τα παρακάτω τέσσερα στάδια: α) ολιστικό στάδιο: το αντικείμενο αντιμετωπίζεται ως ένα όλο και το συμμετρικό του αντιμετωπίζεται ως μια απλή οντότητα χωρίς αναφορά σε επι μέρους μήκη και γωνίες, β) ημι-αναλυτικό στάδιο: κατασκευάζεται πρώτα το συμμετρικό μέρους του αντικειμένου και το υπόλοιπο σχεδιάζεται διασθητικά, έτσι ώστε να ταιριάζουν οι κλίσεις και τα μήκη του υπόλοιπου σχήματος, γ) πλήρως αναλυτικό στάδιο: το αντικείμενο αντιμετωπίζεται ως σύνολο σημαντικών σημείων. Στη συνέχεια κατασκευάζονται τα συμμετρικά τους και ενώνονται μεταξύ τους, αν και σε μερικές περιπτώσεις το συμμετρικό που προκύπτει μπορεί να φαίνεται λανθασμένο, και δ) αναλυτικό-συνθετικό στάδιο: η αναλυτική και η ολιστική προσέγγιση συνυπάρχουν, έτσι ώστε το συμμετρικό του σχήματος να είναι ακριβές και να φαίνεται σωστό.

Τρεις συνολικά προσεγγίσεις συνιστώνται για την επίλυση προβλημάτων συμμετρίας: α) η διπλώση με τη χρήση διαφανούς χαρτιού, β) η χρήση καθρέφτη και γ) η θεώρηση του μελετώμενου σχήματος ως συνόλου σημείων των οποίων τα συμμετρικά ως προς άξονα κατασκευάζονται με κατεσκευή καθέτων ως προς τον άξονα και προέκταση σε ίσο τμήμα. Βοηθητικά, για την ακρίβεια της σχεδίασης του συμμετρικού με βάση αυτή την προσέγγιση, ορισμένες φορές τα σχήματα σχεδιάζονται πάνω σε πλέγμα. Στο Δημοτικό σχολείο προτείνεται η χρήση των δύο
πρώτον προσεγγίσεων και αντι της τρίτης προτείνεται η χρήση πλέγματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η έννοια της συμμετρίας στα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού στη χώρα μας, μέχρι και το Σεπτέμβριο του 2006, ήταν υποβληθμημένη στο να διδάσκεται μόνο μία όρα στην Τετάρτη τάξη. Όμως, με την εισαγωγή των νέων σχολικών βιβλίων στα Μαθηματικά, η έννοια της συμμετρίας καταλαμβάνει μεγαλύτερο χώρο στα αναλυτικά προγράμματα και προτείνεται να διδάσκεται σε κάθε τάξη, ξεκινώντας από την Τρίτη Δημοτικού.

**ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ**

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας η οποία έχει στόχο τη διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών Δημοτικού σχετικά με την αμφιπλέυρη συμμετρία, δηλαδή κατά πόσον ένα σχήμα διαθέτει έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο 18ο Δημοτικό σχολείο Αγρινίου και συμμετείχαν 30 μαθητές της Τετάρτης τάξης. Οι μαθητές είχαν διδαχτεί την έννοια της συμμετρίας πριν έξι μήνες στο σχολείο. Παρόλα αυτά, κανένας μαθητής δεν ήταν σε θέση να περιγράψει τι είναι ένα συμμετρικό σχήμα και ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του. Για το λόγο αυτό, ο ερευνητής τους παρουσίασε συμμετρικά σχήματα από την καθημερινή ζωή σχεδιασμένα σε διαφορετικές χρώστες τα οποία φάνηκε ότι χωρίζονταν σε δύο ίσα μέρη, που με χρήση της διπλώσεως συμπίπτουν. Με βάση αυτά τα παραδείγματα συζητήθηκε η έννοια του συμμετρικού σχήματος και του άξονα συμμετρίας.

![Diagram](image.png)

**Εικόνα 1. Σχήματα προς μελέτη σε σχέση με την ‘αμφιπλέυρη’ συμμετρία**

Προκειμένου να εμπεδώσουν την έννοια της αμφιπλέυρης συμμετρίας, οι μαθητές κλήθηκαν να πειραματιστούν με μια σειρά από δραστηριότητες. Πιο συγκεκριμένα, στους μαθητές δόθηκαν να μελετήσουν, ως προς τη συμμετρία, τρεις κατηγορίες σχημάτων (Εικόνα 1): α) μιή γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής τα οποία προέρχονται από τον κόσμο της εμπειρίας των μαθητών, β) γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και γ) τυπικά γεωμετρικά σχήματα.
Στους μαθητές δόθηκαν πρώτα τα σχήματα της καθημερινής ζωής, για να τους προκαλέσουν το ενδιαφέρον για επεξεργασία και μελέτη. Στη συνέχεια, δόθηκαν τυπικά γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής, για να τους βοηθήσουν να μεταβούν χωρίς προβλήματα στη μελέτη γεωμετρικών σχημάτων και τέλος δόθηκαν τα τυπικά γεωμετρικά σχήματα. Τα σχήματα που εντάχθηκαν σε κάθε κατηγορία ήταν: a) συμμετρικά σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας και β) μη συμμετρικά σχήματα, τα οποία ήταν άλλοτε ευδιάκριτα και άλλοτε έμοιαζαν συμμετρικά, είχαν όμως δυσδιάκριτες διαφορές, προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια που απαιτείται στην απόλυτη ταύτιση των μερών τους, ύστερα από διπλωσία ως προς άξονα συμμετρίας. Ακόμη, σε κάθε κατηγορία εντάχθηκαν μη συμμετρικά σχήματα τα οποία ως προς το περίγραμμά τους ήταν συμμετρικά, όμως υπήρχε χρωματική διαφοροποίηση σε μέρη τους, προκειμένου να αποσαφηνισθεί ο ρόλος του χρώματος στη συμμετρία. Όλες οι παραπάνω κατηγορίες σχημάτων δόθηκαν στους μαθητές στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και πιο συγκεκριμένα σε διαφανείς χαρτί, για να είναι εύκολη η διαπίστωση της ταύτισης των μερών τους με χρήση της διπλωσίας. Οι μαθητές, σε κάθε περίπτωση, κλήθηκαν να απαντήσουν για το αν κάθε σχήμα είναι συμμετρικό ή όχι και να σχεδιάσουν τον/τους άξονες συμμετρίας του. Στους μαθητές παραχωρήθηκε όσος χρόνος χρειάστηκαν για να επεξεργαστούν τα 72 σχήματα που τους δόθηκαν. Αυτός ο χρόνος ήταν περίπου 6 διδακτικές ώρες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι αντιλήψεις των μαθητών για την ‘αμφίπλευρη συμμετρία’ εντάχθηκαν σε 18 κατηγορίες με βάση το είδος των σχημάτων τα οποία μελετήθηκαν.

Α. Σχήματα της καθημερινής ζωής:

Α1. Συμμετρικά: Στους μαθητές δόθηκαν προς μελέτη σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας. Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 2α.

Εικόνα 2α. Συμμετρικά καθημερινής ζωής

Εικόνα 2β. Μη συμμετρικά καθημερινής ζωής

Εικόνα 2. Παραδείγματα συμμετρικών/μη συμμετρικών σχημάτων καθημερινής ζωής

Ολοι οι μαθητές αναγνώρισαν και χάραξαν τον άξονα συμμετρίας στα σχήματα (6 σχήματα) με έναν άξονα, ενώ ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών (τουλάχιστον 19 μαθητές, ποσοστό ορθών απαντήσεων 70%) αναγνώρισαν και χάραξαν τους δύο άξονες συμμετρίας στα αντίστοιχα σχήματα (3 σχήματα). Στο σημείο αυτό
διευκρινίζεται ότι ο όρος ‘ποσοστό των ορθών απαντήσεων’ θα αναφέρεται στο εξής ως το σύνολο των ορθών απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές στα πλαίσια της μελέτης όλων των σχημάτων μιας κατηγορίας πχ. στις 90 απαντήσεις που δόθηκαν για τη μελέτη 3 σχημάτων οι ορθές ήταν οι 63 οπότε ως ποσοστό των ορθών απαντήσεων προκύπτει 70%. Οι μισό περίπου μαθητές (τουλάχιστον 16 μαθητές, ποσοστό ορθών απαντήσεων 60%) αναγνώρισαν και χάραξαν τους άξονες συμμετρίας σε σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας (2 σχήματα).

A2. Μη συμμετρικά: Τα σχήματα που δόθηκαν στους μαθητές προς μελέτη ήταν ως προς τη δυνατότητα αισθητηριακής αναγνώρισης της συμμετρίας: ευδιάκριτα (9 σχήματα), δυσδιάκριτα (6 σχήματα) και συμμετρικά ως προς το περίγραμμά τους αλλά με χρωματική διαφοροποίηση (2 σχήματα). Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 2β. Τα μη συμμετρικά σχήματα αναγνωρίσθηκαν ως τέτοια από όλους τους μαθητές, εκτός από την περίπτωση των σχημάτων τα οποία διέφεραν μόνον ως προς το χρώμα, τα οποία χαρακτηρίστηκαν ως συμμετρικά από την πλειονότητα των μαθητών (τουλάχιστον 25 μαθητές, ποσοστό των ορθών απαντήσεων 17%).

B. Γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής.

B1. Συμμετρικά: Στους μαθητές δόθηκαν προς μελέτη σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας. Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 3α.

| Εικόνα 3α. Συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα καθημερινής ζωής | Εικόνα 3β. Μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα καθημερινής ζωής |

Εικόνα 3. Παραδείγματα γεωμετρικών συμμετρικών/μη συμμετρικών σχημάτων καθημερινής ζωής

Από την πειραματική έρευνα προέκυψε, ότι για τα σχήματα που προτάθηκαν προς μελέτη, με έναν (6 σχήματα) και δύο άξονες συμμετρίας (8 σχήματα), οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών ήταν ορθές. Πιο συγκεκριμένα, τουλάχιστον 20 μαθητές αναγνώρισαν και χάραξαν τον άξονα σε κάθε σχήμα, ποσοστό ορθών απαντήσεων 75%). Σχετικά λιγότεροι μαθητές (τουλάχιστον 15 μαθητές, ποσοστό ορθών απαντήσεων 50%), αναγνώρισαν και χάραξαν τους δύο άξονες συμμετρίας σε σχήματα τα οποία ήταν σχεδιασμένα, έτσι ώστε εύκολα να δημιουργείται οπτική απάτη. Τέλος, πάνω από τους μισούς μαθητές, αναγνώρισαν και χάραξαν τους άξονες
συμμετρίας σε γεωμετρικά σχήματα (6 σχήματα) της καθημερινής ζωής με πολλούς άξονες (4-6 άξονες) συμμετρίας (ποσοστό ορθών απαντήσεων 58%). Όμως, αξίζει να σημειωθεί, ότι σε σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας οι μαθητές κατάφεραν να βρουν τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα ενώ δυσκολεύονταν να βρουν τους υπόλοιπους.

Β2. Μη συμμετρικά: Τα σχήματα που δόθηκαν στους μαθητές προς μελέτη ήταν όπως και στην περίπτωση Α2: ευδιάκριτα, δυσδιάκριτα και συμμετρικά ως προς το περίγραμμά τους άλλα με χρωματική διαφοροποίηση. Παραδείγματα των σχημάτων που δόθηκαν παρουσιάζονται στην Εικόνα 3β. Τα ευδιάκριτα μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής (5 σχήματα) αναγνωρίσθηκαν ως τέτοια από όλους τους μαθητές. Οι πιο πολλοί μαθητές (τουλάχιστον είκοσι μαθητές, ποσοστό 85% των ορθών απαντήσεων) διέκριναν και τα μη συμμετρικά με ανεπαίσθητες διαφορές (7 σχήματα). Στην περίπτωση των σχημάτων, τα οποία διέφεραν μόνον ως προς το χρώμα (3 σχήματα), όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά μιας και το θέμα της μη συμμετρικότητας ενός σχήματος με διαφορετικό χρωματισμό μερών πχ. ελληνική σημαία, είχε αναλυθεί στο προηγούμενο μέρος της έρευνας.

Γ. Τυπικά γεωμετρικά σχήματα

Γ1. Συμμετρικά: Και σε αυτό το μέρος της έρευνας, στους μαθητές δόθηκαν προς μελέτη σχήματα με έναν, δύο και πολλούς άξονες συμμετρίας. Παραδείγματα των σχημάτων αυτών, παρουσιάζονται στην Εικόνα 4α.

Εικόνα 4. Παραδείγματα γεωμετρικών συμμετρικών/μη συμμετρικών σχημάτων

Από την περιαγματική έρευνα προέκυψε, ότι όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν και χάραξαν τον άξονα συμμετρίας στο αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα πχ. στο ισοσκελές τρίγωνο. Σχεδόν όλοι οι μαθητές (25 μαθητές), αναγνώρισαν τους δύο άξονες συμμετρίας σε ορθογώνιο, ενώ αναγνώρισαν μόνον τον κατακόρυφο άξονα στο ευθύγραμμο τρίμα. Σχετικά με τη συμμετρία, σε σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας, σχεδόν όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν ότι το τετράγωνο έχει 4 άξονες συμμετρίας. Όμως, σχετικά λίγοι μαθητές (9 μαθητές) αναγνώρισαν ότι το κανονικό εξάγωνο έχει 6 άξονες συμμετρίας.
Γ2. Μια συμμετρικά: Τα σχήματα, που μελετήθηκαν και σε αυτό το μέρος της έρευνας, ήταν ως προς τη δυνατότητα αισθητικής αναγνώρισης της συμμετρίας: ευδιάκριτα, δυσδιάκριτα και συμμετρικά ως προς το περίγραμμά τους αλλά με χρωματική διαφοροποίηση. Παραδείγματα αυτών σχημάτων παρουσιάζονται στην Εικόνα 4β. Από την ανάλυση των γραπτών των μαθητών προέκυψε, ότι τα ευδιάκριτα, μη συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα και τα σχήματα με το ίδιο περίγραμμα αλλά με διαφορετικά χρωματικά μέρη, όπως το χρωματισμένο με πλάγιες τανίνες τετράγωνο, αναγνωρίσθηκαν ως τέτοια από όλους τους μαθητές. Σχετικά με τα δυσδιάκριτα ως προς τη συμμετρία γεωμετρικά σχήματα, δύο στους τρεις μαθητές αναγνώρισαν ότι το περίγραμμα παραλληλόγραμμο δεν διαλέτει κανέναν άξονα συμμετρίας, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές ισχυρίζονταν ότι υπάρχει κατακόρυφος ή και οριζόντιος άξονας.

Γενικά στις κατακεκυμένες των μαθητών παρατηρήθηκε ότι ο άξονας συμμετρίας στην πλευρότητα των σχημάτων σχεδιάστηκε ως ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενόψει δύο σημεία του σχήματος και όχι ως ευθεία γραμμή. Πολλές φορές, αυτό το ευθύγραμμο τμήμα σχεδιάζονταν κατά μήκος της διάλυσης χωρίς τη χρήση κανόνα. Αξίζει επίσης να σημειωθεί, ότι όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν την εμπειρική διαιρετική προσέγγιση μέσω της διάλυσης, προκειμένου να τεκμηριώσουν τις υποθέσεις τους σχετικά με τη συμμετρικότητα των σχημάτων και την εύρεση του πλήθους των άξονων συμμετρίας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μια πρώτη ματιά στα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δείχνει ότι η έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας είναι δυνατό να κατανοηθεί από μαθητές της Τετάρτης Δημοτικού. Η διάλυση, ως πειραματική προσέγγιση, για την αναγνώριση των συμμετρικών σχημάτων και των άξονων συμμετρίας τους αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την εμπειρική τεκμηρίωση των υποθέσεων των μαθητών και την κατακεκυμένη γνώση σχετικά με την αμφίπλευρη συμμετρία.

Ως προς την αμφίπλευρη συμμετρία, σε συμμετρικά σχήματα με έναν άξονα συμμετρίας, φάνηκε ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές, μέσω της διάλυσης, μπορούν να τα αναγνωρίσουν ως συμμετρικά και να χαράξουν τον άξονα συμμετρίας. Όσον αφορά στη μελέτη σχημάτων με δύο και περισσότερους άξονες συμμετρίας, πάνω από τους μισούς μαθητές, φάνηκε ότι μπορούν να αναγνωρίσουν και να χαράξουν τους άξονες συμμετρίας τους. Αξίζει να σημειωθεί, ότι περισσότεροι μαθητές αναγνώρισαν ως συμμετρικά και χάραξαν τους άξονες συμμετρίας στα σχήματα της καθημερινής ζωής και στα καθαρά γεωμετρικά σχήματα, ενώ περισσότεροι συνάντησαν δυσκολίες στην αναγνώριση αυτών των στοιχείων σε συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα της
καθημερινής ζωής. Κατά την άποψή μας, αυτό πιθανώς να συμβαίνει λόγω του ότι αυτά τα σχήματα είναι σχετικά πολύπλοκα και αποτελούν συνήθως συνθέσεις γεωμετρικών σχημάτων.

Επιπλέον, οι μαθητές αναγνώρισαν ευκολότερα τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας από τον οριζόντιο ή τους πλάγιους άξονες. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται σε μια εστίαση των μαθητών στις κατακόρυφες ευθείες και τμήματα, για λόγους οι οποίοι μπορεί να απορρέουν από τη φύση και τον πολιτισμό.

Ακόμη, σχεδόν κανένα μή συμμετρικό σχήμα δεν χαρακτηρίστηκε ως ‘συμμετρικό’ από τους μαθητές, εκτός από λίγες περιπτώσεις που αφορούσαν δυσδιάκριτα μή συμμετρικά σχήματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι απαντήσεις των μαθητών ήταν απόρροια του μειωμένου ενδιαφέροντος τους για την απόλυτη ταύτιση των μερών του σχήματος, ύστερα από διπλώση ως προς άξονα συμμετρίας. Επίσης, οι σχηματισμοί και τα χρώματα στο εσωτερικό σχημάτων φάνηκε ότι μπερδεύοντας τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές παρατηρήστηκε ότι λειτουργούν αντιφατικά στο πώς λαμβάνουν υπόψη τους το περιεχόμενο ενός σχήματος προκειμένου να το χαρακτηρίσουν ως συμμετρικό ή όχι. Για παράδειγμα, σε συμμετρικά σχήματα με βάση το περίγραμμα αλλά με χρωματική διαφορά των μερών τους οι μαθητές επικεντρώθηκαν στο περίγραμμα και αγνόησαν τα χρώματα, χαρακτηρίζοντάς τα ως συμμετρικά. Αντίθετα, συμμετρικά σχήματα και με συμμετρικούς σχηματισμούς στο εσωτερικό τους χαρακτηρίστηκαν ως μη συμμετρικά από τους μαθητές.

Τέλος, αξιοποιεί να σημειωθεί, ότι η διαδικασία κατανόησης της αμφίπλευρης συμμετρίας μέσω της διπλώσης προκάλεσε την ευχαρίστηση και το ενδιαφέρον των μαθητών σε όλη τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**


Τσελεπίδης, Ν. και Μαρκοπούλου, Χ. (2005). Συμμετρία: Σχέση ισότητας ή γεωμετρικός μετασχηματισμός. 1<sup>ο</sup> Συνέδριο Ενώσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών. Αθήνα, Δεκέμβριος, 2005, σ. 383-393

