

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΝΟΥΝ ΤΙΣ ΑΙΣΘΗΣΙΟΚΙΝΗΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ C.AR.ME. ΣΤΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΘΗΚΑΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Δρ Μαρία Κορδάκη, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών
e-mail : kordaki@cti.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί ενός μη κυρτού πολυγώνου οι οποίοι κατασκευάστηκαν από μαθητές της Β' γυμνασίου κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης τους με ορισμένα από τα εργαλεία του μικρόκοσμου C.AR.ME (Kordaki & Potari, 1998) και αποτελεί μέρος της ποιοτικής αξιολόγησής του. Τα εργαλεία αυτά προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών όταν εμπλέκονται σε προβλήματα διατήρησης της επιφάνειας. Από την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας προέκυψε ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα εργαλεία αυτά ανεξάρτητα αλλά και σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα εργαλεία του μικρόκοσμου, τη σχολική γνώση και επινοήσεις τους προκειμένου για την κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία ανεξάρτητα προσέγγισαν τη διατήρηση της επιφάνειας με ένα ποιοτικό τρόπο ενώ χρησιμοποιώντας τα σε συνδυασμό με τα άλλα εργαλεία που προαναφέρθηκαν δημιούργησαν νέες στρατηγικές επίλυσης στο πρόβλημα του μετασχηματισμού οι οποίες σε όλες τις περιπτώσεις αποτελούν σύνθεση διατηρήσεων.

Εισαγωγή

Η έννοια της διατήρησης της επιφάνειας παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της έννοιας της μέτρησης της επιφάνειας (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981; Hart, 1984). Η μέτρηση της επιφάνειας συνδέεται με την επιστήμη, την τεχνολογία την καθημερινή ζωή των ανθρώπων και έχει μεγάλη σημασία σε κάθε πολιτισμό (Hirstein, Lamb & Osborne, 1978; Bishop, 1988). Ως έννοια της διατήρησης ορίζεται 'η δυνατότητα μιας επιφάνειας να μεταβάλλεται ως προς το σχήμα χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μεταβάλλεται και ποσοτικά' (Piaget, et all., 1981, σελ. 3; Hughes & Rogers, 1979). Οι μαθητές

αλλά και οι ενήλικες συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της μέτρησης της επιφάνειας οι οποίες αποδίδονται στην έλλειψη κατανόησης των εννοιών που τη συνθέτουν (Maher & Beattys, 1986; Osborne, 1976). Βασική προαπαιτούμενη έννοια της μέτρησης της επιφάνειας αποτελεί η έννοια της διατήρησης (Hirstein, et all., 1978; Piaget, et all., 1981; Duady & Perrin, 1986). Η κατανόησή της στηρίζεται στην κατανόηση της αντιστρεψιμότητας και της μεταβατικής ιδιότητας. Πιο συγκεκριμένα υποστηρίζεται ότι η έλλειψη έμφασης στη μελέτη της επιφάνειας σε δυναμική αλληλεπίδραση με τη περίμετρό της (Baturro & Nason, 1996) καθώς και στην κατανόηση της διατήρησής της ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση χωρίς κενά και επικαλύψεις αποτελούν σημαντικούς παράγοντες που επιδρούν στην έλλειψη της κατανόησης της έννοιας της μέτρησης της επιφάνειας από τους μαθητές (Hiebert, 1981; Menon, 1996). Επιπλέον η κατανόηση της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό της σε ίσα μέρη (μονάδες) και ανασύνθεση θεωρήθηκε ως προϋπόθεση για την κατανόηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων υπολογισμού του εμβαδού (Hirstein, et all., 1978). Σε ηλεκτρονικό υπολογιστή κατασκευάστηκε ένας μικρόκοσμος (The Conservation of ARea and its MEasurement 'C.AR.ME' microworld) ο οποίος αποτελεί ένα ανοικτό, αλληλεπιδραστικό, δυναμικό περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων των εννοιών της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας (Kordaki & Potari, 1998). Ο μικρόκοσμος σχεδιάστηκε με βάση το γνωσιοθεωρητικό πλαίσιο του εποικοδομισμού σε συνδυασμό με την κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση για τη γνώση (Bauersfeld, 1988; Confrey, 1990) και διαθέτει εργαλεία για τη μελέτη της έννοιας της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας. Ειδικότερα στο περιβάλλον αυτού του μικρόκοσμου υπάρχει και μια ομάδα εργαλείων με τα οποία οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση. Τα εργαλεία αυτά είναι οι λειτουργίες της αντιγραφής, της επιλογής μέρους, της κοπής, της επικόλλησης, της στροφής ως προς σημείο και γωνία στροφής καθώς και της συμμετρίας ως προς άξονα μιας επιφάνειας. Οι λειτουργίες αυτές αποτελούν μια προσομοίωση των αισθησιοκινητικών ενεργειών των παιδιών όταν εμπλέκονται σε προβλήματα διατήρησης. Με τη χρήση τους είναι δυνατή η επεξεργασία μιας επιφάνειας χωρίς τη χρήση αριθμών. Υποστηρίζεται ότι η έλλειψη έμφασης στην κατανόηση της έννοιας της διατήρησης χωρίς τη χρήση αριθμών και η πρόωρη εισαγωγή των μαθητών στους τύπους υπολογισμού αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα στον οποίο αποδίδονται οι δυσκολίες των μαθητών οι οποίες αφορούν στην έννοια της μέτρησης της επιφάνειας (Maher & Beattys, 1986; Osborne, 1976). Γενικότερα η αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας έχει αμφισβητηθεί (Patronis & Thomaidis, 1997).

Η μεθοδολογία της έρευνας

Η έρευνα αυτή αποτελεί μια ποιοτική μελέτη (Cohen & Manion, 1989) στην οποία διερευνάται ο ρόλος των εργαλείων με τα οποία προσομοιώνονται οι αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών στο μικρόκοσμο C.AR.ME. στο είδος των στρατηγικών επίλυσης του προβλήματος του μετασχηματισμού τις οποίες κατασκευάζουν οι μαθητές στο περιβάλλον αυτό. Η μελέτη αυτή αποτελεί μέρος της συνολικής αξιολόγησης του μικρόκοσμου η οποία πραγματοποιήθηκε με κριτήριο το είδος της γνώσης που κατασκευάζουν οι μαθητές σε αλληλεπίδραση με τα εργαλεία του και προκειμένου να επιλύσουν με όλους τους δυνατούς τρόπους τα προβλήματα του μετασχηματισμού και της σύγκρισης (Κορδάκη, 1999α). Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολείο της Πάτρας. Συμμετείχαν οι μαθητές μιας τάξης της Β' Γυμνασίου. Στους μαθητές δόθηκε ένα μη κυρτό πολύγωνο το οποίο κλήθηκαν να μετασχηματίσουν σε άλλο σχήμα με το ίδιο ποσό επιφάνειας με όλους τους δυνατούς τρόπους. Το πρόβλημα αυτό είναι σημαντικό διότι δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν ή να κατασκευάσουν έννοιες που αφορούν στη διατήρηση ή στη μέτρηση της επιφάνειας (Carpenter, Coburn, Reys & Wilson, 1975; Hiebert, 1981). Επιπλέον η επίλυση ενός προβλήματος με όλους τους δυνατούς τρόπους δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να εκφράσουν τις εσωτερικές τους διαφοροποιήσεις για τις έννοιες τις οποίες μελετούν (Weir, 1992; Lemerise, 1992). Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τα ηλεκτρονικά αρχεία καταγραφής των δράσεων των μαθητών με το λογισμικό (log. Files), οι ηλεκτρονικές εικόνες των μετασχηματισμών που πραγματοποίησαν, τα χειρόγραφα πρωτόκολλα καθώς και οι κασσέτες μαγνητοφώνου στις οποίες καταγράφηκε οτιδήποτε ειπώθηκε από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της έρευνας. Η ερευνήτρια συμμετείχε ως παρατηρητής με την ελάχιστη δυνατή συμμετοχή.

Ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας

Οι μαθητές πραγματοποίησαν τους μετασχηματισμούς του μη κυρτού πολυγώνου χρησιμοποιώντας ανεξάρτητα ή και σε συνδυασμό, όλα τα εργαλεία που διαθέτει ο μικρόκοσμος C.AR.ME., εργαλεία που προέρχονταν από τη σχολική γνώση όπως οι τύποι υπολογισμού των εμβαδών καθώς και επινοήσεις τους που αφορούσαν την κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου (Κορδάκη, 1999β). Παρακάτω παρατίθενται οι κατηγορίες των μετασχηματισμών που δημιουργήθηκαν με τη χρήση των εργαλείων που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών όταν εμπλέκονται σε προβλήματα διατήρησης της επιφάνειας ανεξάρτητα ή σε συνδυασμό με τα

εργαλεία που προαναφέρθηκαν. Οι στρατηγικές επίλυσης οι οποίες εντάσσονται σε κάθε κατηγορία περιγράφονται κάθε φορά με τις ενέργειες και με τη σειρά που αυτές πραγματοποιήθηκαν από τους μαθητές.

Κατηγορία 1. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο σχήμα με τη χρήση των εργαλείων που προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος του μετασχηματισμού με διατήρηση του σχήματος και αλλαγή της θέσης του πάνω στην οθόνη του υπολογιστή ύστερα από: *1.1. Συμμετρία ως προς άξονα. 1.2. Παράλληλη μετατόπιση. 1.3. Στροφή του όλου. 1.4. Συνδυασμό επικόλλησης και στροφής.*

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις παραπάνω στρατηγικές φαίνεται να κατανοούν την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας χωρίς αλλαγή του σχήματός της και μόνο ύστερα από αλλαγή της θέσης της, λόγω συμμετρίας ως προς άξονα, παράλληλης μεταφοράς, στροφής ως προς μια γωνία και σημείο στροφής και συνδυασμό επικόλλησης και στροφής αντίστοιχα. Με την πραγματοποίηση των στρατηγικών αυτών οι μαθητές εξέφρασαν ένα είδος διαισθητικής γνώσης στο περιβάλλον του μικρόκοσμου και μια πρωταρχική προσέγγιση στην έννοια της διατήρησης (Duady & Perrin, 1986). Επιπλέον με τη χρήση των παραπάνω λειτουργιών ήρθαν σε επαφή με τις έννοιες της παράλληλης μεταφοράς, της στροφής ως προς μια γωνία και ένα σημείο στροφής, με συνδυασμούς των εννοιών αυτών καθώς και με την έννοια της συμμετρίας ενός σχήματος ως προς άξονα, έννοια που έως τότε ήταν άγνωστη προς αυτούς.

1.5. Μετασχηματισμός με ανακατασκευή του σχήματος

Πραγματοποιήθηκε μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο σχήμα με διατήρηση του αριθμού, του μήκους και της κλίσης των πλευρών του αρχικού σχήματος. Ο μετασχηματισμός αυτός έγινε με τη βοήθεια του τετραγωνικού καρέ, ή του τετραγωνικού καμβά, που διατίθενται από το μικρόκοσμο, ως όργανα για τη μέτρηση των μηκών των πλευρών και τη διατήρηση της κλίσης των πλευρών του σχήματος.

Ερμηνεία: Οι μαθητές που πραγματοποίησαν στρατηγικές αυτής της μορφής φαίνεται να έχουν κατανοήσει: α) την έννοια της μονάδας του μήκους και της διατήρησης του μήκους ύστερα από παράλληλη μετατόπιση β) την έννοια της μέτρησης του μήκους σε καρτεσιανές συντεταγμένες και διαισθητική διατήρηση της κλίσης των πλευρών του σχήματος γ) τη διατήρηση της επιφάνειας ύστερα από διατήρηση του αριθμού, του μήκους και της κλίσης των πλευρών του αρχικού σχήματος ως προς ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Κατηγορία 2. Μετασχηματισμοί του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο με συνδυασμό των προσομοιωμένων αισθησιοκινητικών ενεργειών των παιδιών, της λειτουργίας της μέτρησης της επιφάνειας και των τύπων υπολογισμού. Οι στρατηγικές που εντάχθηκαν στην κατηγορία αυτή είχαν την παρακάτω μορφή : *Τεμαχισμός - Μετασχηματισμός των μερών με χρήση καρέ και τύπων υπολογισμού - Αναδιάταξη των μερών για τη δημιουργία νέου σχήματος.* Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Τεμαχισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε δύο κυρτά σχήματα (ένα τρίγωνο και ένα τραπέζιο). β) Εμφάνιση του τετραγωνικού καρέ. γ) Μετασχηματισμός του ενός μέρους (τριγώνου) σε ισοδύναμό του ορθογώνιο με τον ίδιο αριθμό μονάδων του καρέ δ) Μετασχηματισμός του άλλου μέρους (τραπεζίου) σε ισοδύναμό του ορθογώνιο με χρήση του τύπου υπολογισμού του εμβαδού του τραπεζίου. Οι βάσεις του τραπεζίου και το ύψος του υπολογίσθηκαν με αυτόματη μέτρηση. Το εμβαδόν του τραπεζίου μετατράπηκε σε μονάδες τετραγωνικού καρέ οι οποίες θεωρήθηκαν ότι ισοδυναμούν με ένα τετραγωνικό εκατοστό. Η αντιστοίχιση αυτή διορθώθηκε ύστερα από την παρέμβαση του ερευνητή (1τετρ. Εκατ. αντιστοιχεί σε 4 μονάδες του τετρ. Καρέ) ε) Δημιουργία άλλου σχήματος (ορθογώνιο) με επικόλληση των ισοδυνάμων ορθογωνίων των δύο μερών του πολυγώνου.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να έχουν κατανοήσει α) τη λειτουργία της μέτρησης με τη χρήση καρέ δηλ. την έννοια της μονάδας και της καταμέτρησης των μονάδων με σύνθεση από τα μέρη τους όπου αυτό απαιτείται β) τη χρήση του τύπου υπολογισμού του εμβαδού του τραπεζίου γ) την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό, μετασχηματισμό και ανασύνθεση των μετασχηματισμένων μερών. Οι υποθέσεις τις οποίες έκαναν οι μαθητές σχετικά με την αντιστοιχία της τετραγωνικής μονάδας του καρέ με τις τυποποιημένες μονάδες μέτρησης της επιφάνειας προέρχονται πιθανό από τη σχολική γνώση. *Ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί σύνθεση 2 μετασχηματισμών.*

Κατηγορία 3. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο με συνδυασμό: α) των αυτόματων μετασχηματισμών που διατίθενται από το μικρόκοσμο και β) των αισθησιοκινητικών ενεργειών του μαθητή όπως αυτές εκφράζονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν στρατηγικές της μορφής :

3.1. Αυτόματος μετασχηματισμός, τεμαχισμός του ήδη μετασχηματισμένου σχήματος και αναδιάταξη των μερών. Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Αυτόματος μετασχηματισμός του πολυγώνου σε ισοδύναμο ως προς επιφάνεια ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. β) Τεμαχισμός του ισοδυνάμου ισοσκελούς τριγώνου σε 2 μέρη. γ) Δημιουργία νέου σχήματος (περίπου τετράγωνο) ύστερα από ανασύνθεση των μερών. δ) Αυτόματη μέτρηση των επιφανειών των σχημάτων πριν και μετά το μετασχηματισμό για έλεγχο της ορθότητάς του.

3.2. Τεμαχισμός, αυτόματος μετασχηματισμός και αναδιάταξη των μερών. Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Τεμαχισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε κυρτά μέρη. β) Αυτόματοι μετασχηματισμοί των μερών (κυρίως σε τετράγωνα και ορθογώνια) γ) Ανασύνθεση των ήδη μετασχηματισμένων μερών για τη δημιουργία νέου ισοδυνάμου σχήματος.

3.3. Αυτόματος μετασχηματισμός, τεμαχισμός, αυτόματος μετασχηματισμός και αναδιάταξη των μερών. Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Αυτόματος μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. β) Τεμαχισμός του ήδη μετασχηματισμένου σχήματος σε δύο μέρη. γ) Αυτόματος μετασχηματισμός του ενός μέρους σε ισοδύναμο ως προς την επιφάνεια τρίγωνο με μία πλευρά ίση, με την πλευρά του ορθογωνίου. δ) Δημιουργία νέου σχήματος με επικόλληση του ισοδυνάμου τριγώνου και του υπόλοιπου μέρους του ισοδυνάμου ορθογωνίου έτσι, ώστε να εφάπτονται οι ίσες πλευρές τους.

3.4. Τεμαχισμός, διπλός αυτόματος μετασχηματισμός και αναδιάταξη των μετασχηματισμένων μερών. Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Τεμαχισμός του πολυγώνου σε δύο κυρτά μέρη. β) Αυτόματος μετασχηματισμός των δύο μερών σε ισοδύναμο ως προς την επιφάνεια τετράγωνο. γ) Αυτόματος μετασχηματισμός του ενός τετραγώνου από αυτά σε ισοδύναμο ορθογώνιο με μια πλευρά ίση με την πλευρά του άλλου τετραγώνου. δ) Δημιουργία νέου σχήματος ύστερα από επικόλληση σε άλλη θέση της οθόνης του υπολογιστή με αναδιάταξη έτσι, ώστε να εφάπτονται οι ίσες πλευρές του ισοδυνάμου τετραγώνου και του ισοδυνάμου ορθογωνίου.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τις στρατηγικές αυτές φαίνεται να κατανοούν τις έννοιες της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από: α) από αυτόματο μετασχηματισμό β) αλλαγή θέσης και διατήρηση του σχήματος γ) τεμαχισμό και ανασύνθεση των μερών δ) τεμαχισμό μετασχηματισμό και ανασύνθεση των μετασχηματισμένων μερών ε) τεμαχισμό, αυτόματο μετασχηματισμό των μερών και επιπλέον αυτόματο μετασχηματισμό των ήδη μετασχηματισμένων μερών και ανασύνθεση των μερών (το σημείο αυτό ισχύει μόνον για τις 2 τελευταίες στρατηγικές). Οι 2 πρώτες στρατηγικές που

εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία αποτελούν σύνθεση 2 μετασχηματισμών ενώ οι 2 τελευταίες αποτελούν σύνθεση 3 μετασχηματισμών.

Κατηγορία 4. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο ύστερα από διαδικασίες κυρτοποίησης του μη κυρτού πολυγώνου με εγκλεισμό του σε ένα ελάχιστο υπερσύνολο. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν στρατηγικές της παρακάτω μορφής:

4.1. Κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου με τη δημιουργία της κυρτής θήκης του και αφαίρεση από αυτήν του συμπληρώματός του ως προς την κυρτή θήκη. Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Κατασκευή της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου β) Αντιγραφή και επικόλληση της κυρτής θήκης σε άλλο σημείο της οθόνης του υπολογιστή. γ) Αντιγραφή του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή του θήκη. δ) Αφαίρεση του συμπληρώματος από την κυρτή θήκη του πολυγώνου.

4.2.Δημιουργία της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου, αυτόματος μετασχηματισμός της και αφαίρεση του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή θήκη. Ενέργειες πραγματοποίησης :

α) Κατασκευή της κυρτής θήκης του μη κυρτού πολυγώνου. β) Αυτόματος μετασχηματισμός της κυρτής θήκης σε ισοδύναμο τετράγωνο. γ) Αντιγραφή του συμπληρώματος του μη κυρτού πολυγώνου ως προς την κυρτή του θήκη. δ) Αφαίρεση του συμπληρώματος από το ισοδύναμο τετράγωνο της κυρτής θήκης του πολυγώνου.

Ερμηνεία : Με τις παραπάνω 2 στρατηγικές οι μαθητές φαίνεται να εκφράζουν μια διαισθητική προσέγγιση στην κυρτοποίηση της επιφάνειας ενός μη κυρτού πολυγώνου ως αφαίρεσης δύο κυρτών πολυγώνων. Επιπλέον, φαίνεται να έχουν κατανόηση της δυνατότητας ισοδυναμίας επιφανειών ύστερα από αυτόματο μετασχηματισμό. Ο τελευταίος μετασχηματισμός μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση 2 μετασχηματισμών, ενός αυτόματου και ενός που πραγματοποιείται με ποιοτικούς χειρισμούς.

Κατηγορία 5. Μετασχηματισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε νέο με χρήση συνδυασμών των προσομοιωμένων αισθησιοκινητικών ενεργειών των μαθητών στο περιβάλλον του μικρόκοσμου. Οι στρατηγικές που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία είχαν τη μορφή : *Τεμαχισμός και αναδιάταξη των μερών για τη δημιουργία νέου σχήματος.*

Ενέργειες πραγματοποίησης : α) Τεμαχισμός του μη κυρτού πολυγώνου σε κυρτά μέρη (κυρίως τρίγωνα). β) Αναδιάταξη των μερών (με επικόλληση, στροφή ή συμμετρία των μερών ως προς άξονα ή και με συνδυασμούς των

παραπάνω λειτουργιών) και δημιουργία νέου σχήματος. γ) Αυτόματη μέτρηση των σχημάτων (από ορισμένους μαθητές) πριν και μετά το μετασχηματισμό για έλεγχο της ορθότητάς του.

Ερμηνεία : Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική φαίνεται να έχουν κατανοήσει την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση. Η διατήρηση της επιφάνειας σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ως συνδυασμός επί μέρους διατηρήσεων. Αυτές οι διατηρήσεις πραγματοποιήθηκαν ύστερα από διατήρηση των μερών του σχήματος και αλλαγή μόνο της θέσης τους στην οθόνη του υπολογιστή ύστερα από επικόλληση, στροφή, συμμετρία ως προς άξονα ή και συνδυασμό τους. Εκφράστηκε έτσι ο μετασχηματισμός, ως συνδυασμός επί μέρους απλών αισθησιοκινητικών μετασχηματισμών. Με την πραγματοποίηση αυτής της στρατηγικής δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν κάποια διαισθητική γνώση στο περιβάλλον του υπολογιστή και επιπλέον, να έλθουν σε επαφή με τις μαθηματικές έννοιες που υλοποιούν αυτές τις ενέργειες. Οι μικρές διαφορές στα αποτελέσματα της αυτόματης μέτρησης πριν και μετά το μετασχηματισμό έδωσαν την ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν τον προσεγγιστικό χαρακτήρα της μέτρησης της επιφάνειας.

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας προκύπτει ότι τα εργαλεία τα οποία προσομοιώνουν τις αισθησιοκινητικές ενέργειες των παιδιών όταν εμπλέκονται σε προβλήματα διατήρησης της επιφάνειας στο μικρόκοσμο C.AR.ME. χρησιμοποιήθηκαν

- Ανεξάρτητα αλλά και
- σε συνδυασμό με όλα τα υπόλοιπα εργαλεία του μικρόκοσμου,
- με τους τύπους υπολογισμού καθώς και
- με επινοήσεις των μαθητών που αφορούσαν στην κυρτοποίηση του μη κυρτού πολυγώνου

Έδωσαν την ευκαιρία στους μαθητές

- να εκφράσουν τη διαισθητική τους γνώση
- να δώσουν έναν ποιοτικό χαρακτήρα στη διατήρηση της επιφάνειας
- να έλθουν σε επαφή με τις έννοιες της παράλληλης μεταφοράς, της στροφής ως προς γωνία και σημείο στροφής και της συμμετρίας ως προς άξονα μιας επιφάνειας
- να δημιουργήσουν μια ποικιλία προσεγγίσεων στην έννοια της διατήρησης της επιφάνειας
 - ξεκινώντας από τη διατήρηση του όλου

- προχωρώντας στη διατήρηση ύστερα από τεμαχισμό και ανασύνθεση (συνδυασμός επί μέρους διατηρήσεων) και
- καταλήγοντας σε σύνθεση διατηρήσεων. Δημιουργήθηκαν 2 ή και 3 αλληλουχίες διατηρήσεων με συνδυασμό της λειτουργίας της μέτρησης, των τύπων υπολογισμού, των αυτόματων μετασχηματισμών ή/και του εγκλεισμού του μη κυρτού πολυγώνου σε ένα ελάχιστο κυρτό υπερσύνολο.

Από μια γενικότερη οπτική τα δεδομένα της έρευνας δύνανται να υποστηρίξουν την υπόθεση του ότι κάθε νέο εργαλείο που διατίθεται στους μαθητές τους βοηθά να στηριχθούν σε αυτό και χρησιμοποιώντας το ανεξάρτητα ή σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία να δημιουργήσουν νέες προσεγγίσεις.

Αναφορές

- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge: Alternative perspectives for Mathematics Education. In D. A. Grows, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds), *Effective Mathematics Teaching* (pp.27-46). Hillsdale, New Jersey: N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W., (1975). Notes from National Assessment: basic concepts of area and volume. *Arithmetic Teacher*, 22 (6), 501-507.
- Cohen, L., & Manion, L. (1989). *Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Confrey, J. (1990). What Constructivism implies for teaching. In R. B. Davis, C. A. Maher, and N. Noddings (Eds), *Constructivist views on the teaching and Learning of Mathematics* (pp. 107-124). Reston, VA: N.C.T.M.
- Douady, R., & Perrin, M-J (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of 10 PME Conference*, (pp. 253-258). London, England.
- Hart, K. (1984). Which comes first - Length, Area, or Volume?. *Arithmetic Teacher*, 31(9), 16-18, 26-27.
- Hiebert, J. (1981). Units of measure: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28 (6), 38-43.
- Hirstein, J., Lamb, C. E., & Osborn, A. (1978). Student Misconceptions

- about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.
- Hughes, E. R., & Rogers, J., (1979). The concept of area. In Macmillan Education (Eds), *Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science* (pp. 78-135). Schools Council Research Studies.
- Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education*, 31, 405-422.
- Κορδάκη, Μ. (1999α). *Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού*. Διδακτορική διατριβή, Πάτρα, Απρίλιος 1999.
- Κορδάκη, Μ. (1999β). Δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον ενός μικρόκοσμου και ο ρόλος τους στους μετασχηματισμούς που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές. Θα δημοσιευθεί στα πρακτικά του 4^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή 'Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπ/ση'. Ηράκλειο 1-3 Οκτωβρίου 1999.
- Lemerise, T. (1992). On Intra Interindividual Differences in Children's Learning Styles. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 191-222). Cambridge, Ma: MIT Press.
- Maher, C.A., & Beattys, C. B. (1986). Examining the Construction of area and its Measurement by Ten to Fourteen Year old Children. In E. Lansing, G. Lappan, R. Even (Eds). *Proceedings of 8th PME Conference*, (pp. 163-168). N. A.
- Menon, R. (1996). Assesing preservice teachers' conceptual understanding of perimeter and area. In *Proceedings of the 20th of PME Conference*, 1 (pp.184). Valencia, Spain.
- Osborne, A. R. (1976). Mathematical Distinctions in the Teaching of Measure. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics*, (pp. 11-33). Reston, VA: N.C.T.M.
- Patronis, T., & Thomaidis, Y. (1997). On Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics, *Science and Education*, 6, 273-290.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. N.Y: Norton & Company.
- Weir, S. (1992). LEGO-Logo: A Vehicle for Learning. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and Logo* (pp. 165-190). Cambridge, Ma: MIT Press.