a) $x+y+z$ b) $a/b+c/d$ c) $m*(n+p)$
d) $+m-n+p-q$ e) $(m+n)*(p-q)$

36. Εστω ότι G είναι γραμματική και έστω ότι R είναι η σχέση που περιέχει το διατεταγμένο ζεύγος (w_0, w_1) αν και μόνο αν η w_1 παράγεται άμεσα από την w_0 της G. Ποιά είναι η ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα της R;

11.2 Μηχανές Πεπερασμένης Κατάστασης με Εξοδο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι δυνατή η κατασκευή μοντέλων πολλών ειδών μηχανών, μεταξύ των οποίων και εξαρτήματα υπολογιστών, με χρήση μιάς δομής που ονομάζεται μηχανή πεπερασμένης κατάστασης. Σε μοντέλα συνήθως χρησιμοποιούνται πολλά είδη μηχανών πεπερασμένης κατάστασης. Ολες αυτές οι εκδοχές των μηχανών πεπερασμένης κατάστασης περιλαμβάνουν ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, με καθορισμένη κατάσταση εκκίνησης, με αλφάβητο εισόδου, και με συνάρτηση μετάβασης η οποία αναθέτει μια επόμενη κατάσταση σε κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου. Οι μηχανές πεπερασμένης κατάστασης χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό σε εφαρμογές της επιστήμης υπολογιστών και σε δίκτυα δεδομένων. Για παράδειγμα, οι μηχανές πεπερασμένης κατάστασης αποτελούν την βάση προγραμμάτων ελέγχου ορθογραφίας, ελέγχου γραμματικής, κατασκευής ευρετηρίου ή αναζήτησης μεγάλων κειμένων, αναγνώρισης ομιλίας, μετασχηματισμού κειμένου με χρήση γλωσσών όπως η XML και η HTML, και πρωτοκόλλων δικτύων, τα οποία καθορίζουν τον τρόπο επικοινωνίας των δικτύων.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις μηχανές πεπερασμένης κατάστασης που δίνουν έξοδο. Θα δείξουμε τον τρόπο χρήσης των μηχανών πεπερασμένης κατάστασης για κατασκευή μοντέλων μηχανής πωλήσεων, μηχανής καθυστέρησης εισόδου, μηχανής πρόσθεσης ακέραιων, και μηχανής που προσδιορίζει αν μια συμβολοσειρά bit περιέχει μια συγκεκριμένη μορφή.

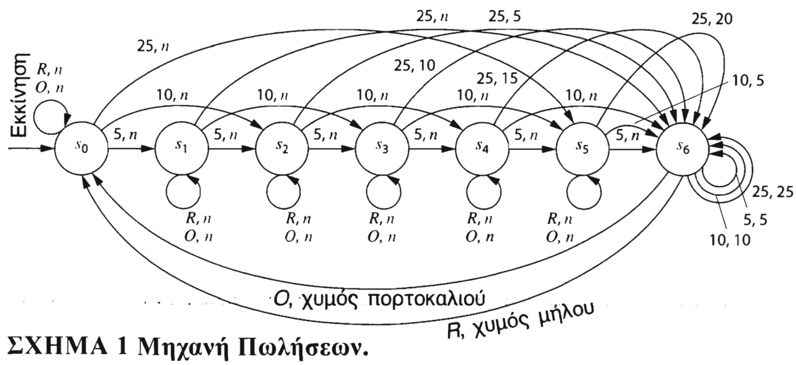
Πριν δώσουμε τυπικούς ορισμούς, θα δείξουμε τον τρόπο κατασκευής μοντέλου μηχανής πωλήσεων. Η μηχανή πωλήσεων δέχεται κέρματα των 5, 10, και 25 λεπτών (Σημ. Μετ.: Στις ΗΠΑ υπάρχουν κέρματα των 25 cents). Οταν έχουν εισαχθεί συνολικά 30 λεπτά ή περισσότερα, η μηχανή αμέσως επιστρέφει το ποσό που είναι πάνω από 30 λεπτά. Οταν θα έχουν εισαχθεί 30 λεπτά και θα έχει επιστραφεί τυχόν περίσσευμα, ο πελάτης πιέζει ένα πορτοκαλλί πλήκτρο και παίρνει χυμό πορτοκαλιού ή πιέζει ένα κόκκινο πλήκτρο και παίρνει χυμό μήλου. Θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η μηχανή με καθορισμό των καταστάσεών της, τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει καταστάσεις όταν δέχεται είσοδο, και την έξοδο που παράγεται για καθε συνδυασμό εισόδου και τρέχουσας κατάστασης.

Η μηχανή μπορεί να βρίσκεται σε οποιανδήποτε από επτά διαφορετικές καταστάσεις $s_i, i=0,1,2,\ldots,6$, όπου s_i είναι η κατάσταση όπου η μηχανή έχει δεχτεί $5i$ λεπτά. Η μηχανή ξεκινάει στην κατάσταση s_0, με 0 λεπτά. Οι δυνατές είσοδοι είναι 5 λεπτά, 10 λεπτά, 25 λεπτά, το πορτοκαλλί πλήκτρο (O), και το κόκκινο πλήκτρο (R). Οι δυνατές έξοδοι είναι τίποτε (n), 5 λεπτά, 10 λεπτά, 15 λεπτά, 20 λεπτά, 25 λεπτά, χυμός πορτοκαλιού, και χυμός μήλου.

Με το παρακάτω παράδειγμα θα δείξουμε τον τρόπο λειτουργίας αυτού του μοντέλου μηχανής. Εστω ότι ένας σπουδαστής εισάγει κέρμα των 10 λεπτών, και μετά κέρμα των 25 λεπτών, παίρνει ρέστα 5 λεπτά, και ύστερα πιέζει το πορτοκαλλί πλήκτρο για χυμό πορτοκαλιού. Η μηχανή ξεκινάει σε κατάσταση s_0. Η πρώτη έξοδος είναι 10 λεπτά, γεγονός που αλλάζει την κατάσταση της μηχανής σε s_2 και δεν δίνει έξοδο. Η δεύτερη είσοδος είναι 25 λεπτά. Το γεγονός αυτό αλλάζει την κατάσταση από s_2 σε s_6 και δίνει σαν έξοδο 5 λεπτά. Η επόμενη είσοδος είναι το πορτοκαλλί πλήκτρο, που αλλάζει την κατάσταση από s_6 πίσω στην s_0 (επειδή η μηχανή επιστρεφει στην κατάσταση εκκίνησης) και δίνει σαν έξοδο ένα κουτί χυμό πορτοκαλιού.

Μπορούμε να απεικονίσουμε σε πίνακα όλες τις μεταβολές κατάστασης και εξόδου αυτής της μηχανής. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να καθορίσουμε την επόμενη κατάσταση και την έξοδο που θα πάρουμε για κάθε συνδυασμό κατάστασης και εισόδου. Στον Πίνακα 1 φαίνονται οι μεταβάσεις και οι έξοδοι για κάθε ζεύγος μιάς κατάστασης και μιάς εισόδου.

Ενας άλλος τρόπος για να δείξουμε τις δράσεις μηχανής είναι η χρήση κατευθυνόμενα γραφήματος με ονομασμένες ακμές, όπου κάθε κατάσταση παριστάνεται με ένα κύκλο, οι ακμές παριστάνουν μεταβάσεις, και οι ακμές ονομάζονται με την είσοδο και την έξοδο για την συγκεκριμένη μετάβαση. Στο Σχήμα 1 φαίνεται ένα τέτοιο κατευθυνόμενο γράφημα για μηχανή πωλήσεων.



ΣΧΗΜΑ 1 Μηχανή Πωλήσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 Πίνακας Καταστάσεων Μηχανής Πωλήσεων

	Επόμενη Κατάσταση					**Εξοδος**				
	Είσοδος					**Είσοδος**				
Κατάσταση	***5***	***10***	***25***	***O***	***R***	***5***	***10***	***25***	***O***	***R***
s_0	s_1	s_2	s_5	s_0	s_0	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
s_1	s_2	s_3	s_6	s_1	s_1	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
s_2	s_3	s_4	s_6	s_2	s_2	*n*	*n*	5	*n*	*n*
s_3	s_4	s_5	s_6	s_3	s_3	*n*	*n*	10	*n*	*n*
s_4	s_5	s_6	s_6	s_4	s_4	*n*	*n*	15	*n*	*n*
s_5	s_6	s_6	s_6	s_5	s_5	*n*	5	20	*n*	*n*
s_6	s_6	s_6	s_6	s_0	s_0	5	10	25	OJ	AJ

ΜΗΧΑΝΕΣ ΠΕΠΡΑΣΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕ ΕΞΟΔΟΥΣ

Θα δώσουμε τώρα έναν τυπικό ορισμό μηχανής πεπερασμένης κατάστασης με εξόδους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Μηχανή πεπερασμένης κατάστασης* $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ αποτελείται από πεπερασμένο σύνολο S *καταστάσεων*, πεπερασμένο *αλφάβητο εισόδου* I, πεπερασμένο *αλφάβητο εξόδου* O, *συνάρτηση μετάβασης* f η οποία αναθέτει νέα κατάσταση σε κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου, *συνάρτηση εξόδου* g η οποία αναθέτει μια έξοδο σε κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου, και μια αρχική κατάσταση s_0.

Εστω ότι η $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ είναι μηχανή πεπερασμένης κατάστασης. Για να παραστήσουμε τις τιμές της συνάρτησης μετάβασης f και της συνάρτησης εξόδου g για όλα τα ζεύγη καταστάσεων και εισόδου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν καταστατικό πίνακα ή πίνακα καταστάσεων. Παραπάνω κατασκευάσαμε ένα πίνακα καταστάσεων για την μηχανή πωλήσεων που εξετάσαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ο πίνακας καταστάσεων του Πίνακα 1 περιγράφει μηχανή πεπερασμένης κατάστασης με $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$, και $O = \{0, 1\}$. Στις δύο πρώτες στήλες φαίνονται οι τιμές της συνάρτησης μετάβασης f, και στις δύο τελευταίες στήλες φαίνονται οι τιμές της συνάρτησης εξόδου g.

Ενας άλλος τρόπος παράστασης μηχανής πεπερασμένης κατάστασης είναι η χρήση **καταστατικού διαγράμματος ή διάγραμμα καταστάσεων**, που είναι κατευθυνόμενο γράφημα με ονομασμένες ακμές. Στο διάγραμμα αυτό, κάθε κατάσταση παριστάνεται με ένα κύκλο. Για κάθε μετάβαση, φαίνονται βέλη που έχουν ονομαστεί με το ζεύγος εισόδου και εξόδου.

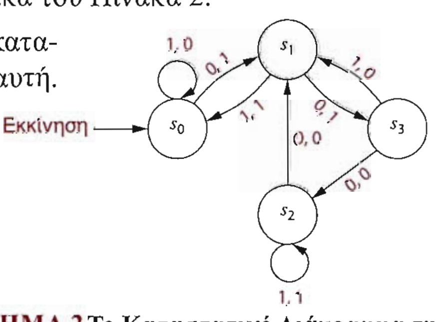
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να κατασκευαστεί το καταστατικό διάγραμμα για μηχανή πεπερασμένης κατάστασης με τον καταστατικό πίνακα του Πίνακα 2.

Λύση: Στο Σχήμα 2 φαίνεται το καταστατικό διάγραμμα για την μηχανή αυτή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

	f		***g***	
Κατάσταση	***Είσοδος 0***	***1***	***Είσοδος 0***	***1***
s_0	s_1	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	1	1
s_2	s_1	s_2	0	1
s_3	s_2	s_1	0	0

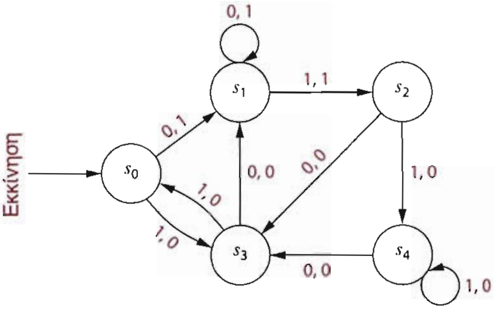


ΣΧΗΜΑ 2 Το Καταστατικό Διάγραμμα της Μηχανής Πεπερασμένης Κατάστασης του Πίνακα 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να κατασκευαστεί ο καταστατικός πίνακας για την μηχανή πεπερασμένης κατάστασης με το καταστατικό διάγραμμα του Σχήματος 3.

Λύση: Στον Πίνακα 3 φαίνεται ο καταστατικός πίνακας για την μηχανή αυτή.



ΣΧΗΜΑ 3 Μηχανή Πεπερασμένης Κατάστασης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Κατάσταση	***f*** Είσοδος 0	***f*** Είσοδος 1	***g*** Είσοδος 0	***g*** Είσοδος 1
s_0	s_1	s_3	1	0
s_1	s_1	s_2	1	1
s_2	s_3	s_4	0	0
s_3	s_1	s_0	0	0
s_4	s_3	s_4	0	0

Μια συμβολοσειρά εισόδου αλλάζει την κατάσταση εκκίνησης μέσω μιας ακολουθίας καταστάσεων, όπως αυτές καθορίζονται από την συνάρτηση μετάβασης. Καθώς διαβάζουμε την συμβολοσειρά εισόδου, σύμβολο προς σύμβολο (από τα αριστερά προς τα δεξιά), κάθε σύμβολο εισόδου μεταφέρει την μηχανή από μια κατάσταση σε άλλη. Επειδή κάθε μετάβαση δίνει έξοδο, μια συμβολοσειρά εισόδου δίνει και μια συμβολοσειρά εξόδου.

Εστω ότι η συμβολοσειρά εισόδου είναι $x = x_1 x_2 \cdots x_k$. Τότε, η ανάγνωση της εισόδου μεταφέρει την μηχανή από την κατάσταση s_0 στην κατάσταση s_1, όπου $s_1 = f(s_0, x_1)$, ύστερα στην κατάσταση s_2, όπου $s_2 = f(s_1, x_2)$, κ.ο.κ., με τέλος την κατάσταση $s_k = f(s_{k-1}, x_k)$. Αυτή η ακολουθία μεταβάσεων δίνει μια συμβολοσειρά εξόδου $y_1 y_2 \cdots y_k$, όπου $y_1 = g(s_0, x_1)$ είναι η έξοδος που αντιστοιχεί στην μετάβαση από s_1 σε s_2, κ.ο.κ. Γενικά, $y_j = g(s_{j-1}, x_j)$ για $j = 1, 2, \ldots, k$. Αρα, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης εξόδου g σε συμβολοσειρές εξόδου, έτσι ώστε να είναι $g(x) = y$, όπου y θα είναι η έξοδος που αντιστοιχεί στην συμβολοσειρά εισόδου x. Αυτός ο συμβολισμός είναι χρήσιμος σε πολλές εφαρμογές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθεί η συμβολοσειρά εξόδου που παράγεται απο την μηχανή πεπερασμένης κατάστασης του Σχήματος 3, αν η συμβολοσειρά εισόδου είναι 101011.

Λύση: Η έξοδος που παίρνουμε είναι 001000. Στον Πίνακα 4 φαίνονται οι διαδοχικές καταστάσεις και εξοδοι.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

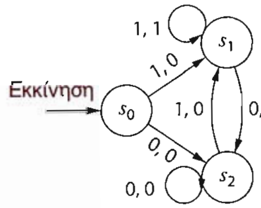
Είσοδος	1	0	1	0	1	1	–
Κατάσταση	s_0	s_3	s_1	s_2	s_3	s_0	s_3
Εξοδος	0	0	1	0	0	0	–

Τώρα μπορούμε να δούμε μερικά παραδείγματα χρήσιμων μηχανών πεπερασμένης κατάστασης. Τα Παραδείγματα 5, 6, και 7 δείχνουν ότι οι καταστάσεις μηχανής πεπερασμένης κατάστασης της δίνουν περιορισμένες δυνατότητες μνήμης. Οι καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να θυμόμαστε τις ιδιότητες των συμβόλων τα οποία έχει διαβάσει η μηχανή. Ωστόσο, επειδή υπάρχουν μόνο πεπερασμένες διαφορετικές καταστάσεις, οι μηχανές πεπερασμένης κατάστασης δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάποιους σημαντικούς σκοπούς. Το γεγονός αυτό θα το δούμε στην Παράγραφο 11.4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Ενα σημαντικό στοιχείο σε πολλές ηλεκτρονικές συσκευές είναι μια *μηχανή μοναδιαίας καθυστέρησης*, η οποία δίνει σαν έξοδο την συμβολοσειρά εισόδου με καθυστέρηση καθορισμένης χρονικής περιόδου. Με ποιό τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε μηχανή πεπερασμένης κατάστασης η οποία θα καθυστερεί συμβολοσειρά εισόδου κατά μια χρονική μονάδα, δηλαδή, θα δίνει σαν έξοδο την συμβολοσειρά bit $0x_1x_2 \cdots x_{k-1}$ όταν δίνεται η συμβολοσειρά bit εισόδου $x_1x_2 \cdots x_k$;

Λύση: Μπορούμε να κατασκευάσουμε μηχανή μοναδιαίας καθυστέρησης με δύο δυνατές εισόδους, τις 0 και 1. Η μηχανή θα πρέπει να έχει μια κατάσταση εκκίνησης s_0. Επειδή η μηχανή θα πρέπει να θυμάται αν η προηγούμενη είσοδος ήταν 0 ή 1, χρειάζονται δύο άλλες καταστάσεις s_1 και s_2, όπου η μηχανή θα είναι στην κατάσταση s_1 αν η προηγούμενη είσοδος ήταν 1 και στην κατάσταση s_2 αν η προηγούμενη είσοδος ήταν 0. Για την αρχική μετάβαση από την s_0 θα έχουμε έξοδο 0. Κάθε μετάβαση από την s_1 δίνει έξοδο 1, και κάθε μετάβαση από την s_2 δίνει έξοδο 0. Η έξοδος που αντιστοιχεί στην είσοδο συμβολοσειράς $x_1x_2 \cdots x_k$ είναι η συμβολοσειρά που αρχίζει με 0, που ακολουθείται από x_1, που ακολουθείται από x_2, . . . , που τελειώνει με x_{k-1}. Στο Σχήμα 4 φαίνεται το καταστατικό διάγραμμα για την μηχανή αυτή.



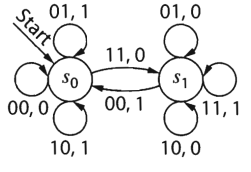
ΣΧΗΜΑ 4 Μηχανή Μοναδιαίας Καθυστέρησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που προσθέτει δύο ακέραιους με χρήση των δυαδικών τους αναπτυγμάτων.

Λύση: Οταν προστίθενται οι $(x_n \cdots x_1x_0)_2$ και $(y_n \cdots y_1y_0)_2$, ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία (όπως την περιγράψαμε στην Παράγραφο 2.5). Πρώτα προστίθενται τα bit x_0 και y_0, και δίνουν ένα bit αθροίσματος z_0 και ένα bit κρατούμενου c_0. Αυτό το bit κρατούμενου είναι είτε 0 είτε 1. Υστερα, προστίθενται τα bit x_1 και y_1. Το γεγονός αυτό δίνει ένα bit αθροίσματος z_1 και ένα bit κρατούμενου c_1. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι το στάδιο n, όπου προστίθενται τα x_n, y_n, και το προηγούμενο κρατούμενο c_{n-1} για να δώσουν το bit αθροίσματος z_n και το bit κρατούμενου c_n, που είναι ίσο με το bit αθροίσματος z_{n-1}.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μηχανή πεπερασμένης κατάστασης για εκτέλεση αυτής της πρόσθεσης με χρήση μόνο δύο καταστάσεων. Για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι και τα δύο αρχικά bit x_n και y_n είναι 0 (σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να κάνουμε ειδικές διευθετήσεις που αφορούν στο bit αθροίσματος z_{n+1}). Η κατάσταση εκκίνησης s_0 χρησιμοποιείται για να θυμόμαστε ότι το προηγούμενο κρατούμενο είναι 0 (ή για την πρόσθεση των περισσότερο δεξιών bit). Η άλλη κατάσταση, η s_1, χρησιμοποιείται για να θυμόμαστε ότι το προηγούμενο κρατούμενο είναι 1. Επειδή οι είσοδοι της μηχανής είναι ζεύγη bit, θα υπάρχουν τέσσερεις δυνατές είσοδοι. Παριστάνουμε αυτές τις δυνατότητες με 00 (όταν και τα δύο bit είναι 0), με 01 (όταν το πρώτο bit είναι 0 και το δεύτερο bit είναι 1), με 10 (όταν το πρώτο bit είναι 1 και το δεύτερο bit είναι 0), και με 11 (όταν και τα δύο bit είναι 1). Οι μεταβάσεις και οι έξοδοι κατασκευάζονται από το άθροισμα των δύο bit που παριστάνονται με την είσοδο και του κρατούμενου που παριστάνεται με την κατάσταση. Για παράδειγμα, όταν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση s_1 και δεχτεί σαν είσοδο το 01, η επόμενη κατάσταση θα είναι s_1 και η έξοδος θα είναι 0, επειδή το άθροισμα που εμφανίζεται θα είναι $0+1+1=(10)_2$. Στο Σχήμα 5 φαίνεται το καταστατικό διάγραμμα για την μηχανή αυτή.



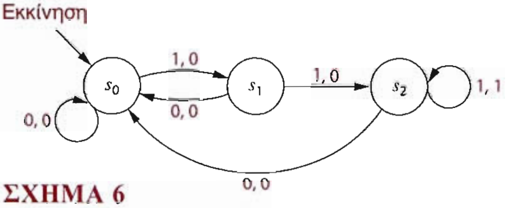
ΣΧΗΜΑ 5 Μηχανή Πεπερασμένης Κατάστασης για Πρόσθεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Σε κάποια μορφή κωδικοποίησης, όταν σε μήνυμα εμφανίζονται τρία διαδοχικά 1, ο δέκτης του μηνύματος γνωρίζει ότι έχει γίνει σφάλμα στην μετάδοση. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που σαν έξοδό της θα δίνει 1 αν και μόνο αν και τα τρία τελευταία bit που ελήφθηκαν είναι 1.

Λύση: Στην μηχανή αυτή χρειάζονται τρεις καταστάσεις. Η κατάσταση εκκίνησης s_0 θυμάται ότι η προηγούμενη τιμή εισόδου, αν υπάρχει, δεν ήταν 1. Η κατάσταση s_1 θυμάται ότι η προηγούμενη κατάσταση ήταν 1, αλλά η είσοδος πριν από την προηγούμενη είσοδο, αν υπάρχει, δεν ήταν 1. Η κατάσταση s_2 θυμάται ότι οι δύο προηγούμενες είσοδοι ήταν 1. Είσοδος 1: μεταφέρει την s_0 στην s_1, επειδή τώρα έχει διαβαστεί ένα 1, και όχι δύο διαδοχικά 1· Μεταφέρει την s_1 στην s_2, επειδή τώρα έχουν διαβαστεί δύο διαδοχικά 1· Και μεταφέρει την s_2 στον εαυτό της, επειδή έχουν διαβαστεί τουλάχιστον δύο διαδοχικά 1. Είσοδος 0 μεταφέρει κάθε κατάσταση στην s_0, επειδή το γεγονός αυτό διασπά οποιαδήποτε συμβολοσειρά με διαδοχικά 1. Η έξοδος της μετάβασης από την s_2 στον εαυτό της όταν διαβάζεται ένα 1 θα είναι 1, επειδή αυτός ο συνδυασμός εισόδου και κατάστασης δείχνει ότι έχουν διαβαστεί τρία διαδοχικά 1. Ολες οι άλλες έξοδοι είναι 0. Στο Σχήμα 5 φαίνεται το καταστατικό διάγραμμα για την μηχανή αυτή.

Η μηχανή του Σχήματος 6 αποτελεί παράδειγμα μηχανής **αναγνώρισης γλώσσας**, επειδή δίνει έξοδο 1 αν και μόνο αν η συμβολοσειρά εισόδου που έχει διαβαστεί μέχρι την στιγμή αυτή έχει μια καθορισμένη ιδιότητα. Η αναγνώριση γλώσσας αποτελεί σημαντική εφαρμογή των μηχανών πεπερασμένης κατάστασης.



ΣΧΗΜΑ 6
Μηχανή Πεπερασμένης Κατάστασης που δίνει έξοδο 1 αν και μόνο αν η συμβολοσειρά εισόδου που έχει διαβαστεί μέχρι την στιγμή αυτή τελειώνει με 111.

ΕΙΔΗ ΜΗΧΑΝΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ Για την κατασκευή μοντέλων υπολογιστικών μηχανών έχουν αναπτυχθεί πολλά διαφορετικά είδη μηχανών πεπερασμένης κατάστασης. Στην παράγραφο αυτή δώσαμε τον ορισμό ενός είδους μηχανής πεπερασμένης κατάστασης. Στο είδος της μηχανής που παρουσιάσαμε στην παράγραφο αυτή, οι έξοδοι αντιστοιχούν σε μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων. Οι μηχανές αυτού του είδους είναι γνωστές σαν **μηχανές Mealy**, επειδή μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τον G.H.Mealy το 1955. Υπάρχει ένα άλλο σημαντικό είδος μηχανών πεπερασμένης κατάστασης με έξοδο, όπου η έξοδος προσδιορίζεται μόνο από την κατάσταση. Αυτό το είδος μηχανής πεπερασμένης κατάστασης είναι γνωστό σαν **μηχανή Moore**, επειδή ο E.F.Moore παρουσίασε αυτό το είδος μηχανής το 1956. Οι μηχανές Moore εξετάζονται σε μια σειρά ασκήσεων στο τέλος αυτής της παραγράφου.

Στο Παράδειγμα 7 δείξαμε τον τρόπο χρήσης μιάς μηχανής Mealy για αναγνώριση γλώσσας. Ωστόσο, για τον σκοπό αυτό συνήθως χρησιμοποιείται ένα άλλο είδος μηχανής πεπερασμένης κατάστασης, η οποία δεν δίνει έξοδο. Οι μηχανές πεπερασμένης κατάστασης χωρίς έξοδο, που είναι γνωστές και σαν αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης, έχουν ένα σύνολο τελικών καταστάσεων και αναγνωρίζουν συμβολοσειρά αν και μόνο αν αυτή μεταφέρει την κατάσταση εκκίνησης σε τελική κατάσταση. Στην Παράγραφο 11.3 θα μελετήσουμε αυτό το είδος μηχανών πεπερασμένης κατάστασης.

Ασκήσεις

1. Να σχεδιαστούν τα καταστατικά διαγράμματα των μηχανών πεπερασμένης κατάστασης που έχουν τους παρακάτω καταστατικούς πίνακες.

a)

Κατά-στaση	*f* Είσοδος 0	*f* Είσοδος 1	*g* Είσοδος 0	*g* Είσοδος 1
s_0	s_1	s_0	0	1
s_1	s_0	s_2	0	1
s_2	s_1	s_1	0	0

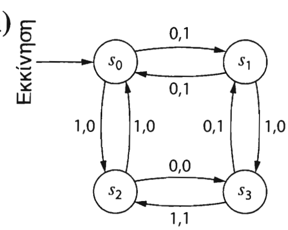
b)

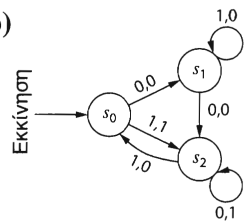
Κατά-σταση	*f* Είσοδος 0	*f* Είσοδος 1	*g* Είσοδος 0	*g* Είσοδος 1
s_0	s_1	s_0	0	0
s_1	s_2	s_0	1	1
s_2	s_0	s_3	0	1
s_3	s_1	s_2	1	0

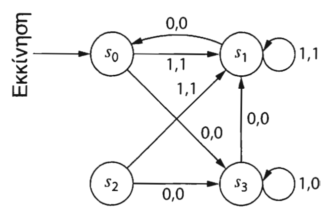
c)

Κατά-σταση	*f* Είσοδος 0	*f* Είσοδος 1	*g* Είσοδος 0	*g* Είσοδος 1
s_0	s_0	s_4	1	1
s_1	s_0	s_3	0	1
s_2	s_0	s_2	0	0
s_3	s_1	s_1	1	1
s_4	s_1	s_0	1	0

2. Να δοθούν οι καταστατικοί πίνακες για τις μηχανές πεπερασμένης κατάστασης με τα παρακάτω καταστατικά διαγράμματα.

a) 

b) 

c) 

3. Αν δίνεται η μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που φαίνεται στο Παράδειγμα 2, να προσδιοριστεί η έξοδος για τις παρακάτω συμβολοσειρές εισόδου.

a) 0111 **b)** 11011011 **c)** 01010101010

4. Αν δίνεται η μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που φαίνεται στο Παράδειγμα 2, να προσδιοριστεί η έξοδος για τις παρακάτω συμβολοσειρές εισόδου.

a) 0000 **b)** 101010 **c)** 11011100010

5. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να είναι μοντέλο μηχανής πώλησης αναψυκτικών, η οποία να δέχεται κέρματα των 5, 10 και 25 λεπτών. Η μηχανή πώλησης αναψυκτικών θα δέχεται κέρματα μέχρι 35 λεπτών. Θα δίνει ρέστα για χρηματικό ποσό μεγαλύτερο από 35 λεπτά. Τότε ο πελάτη θα πιέζει πλήκτρα για να παίρνει είτε λεμονάδα είτε πορτοκαλάδα, είτε χυμό μήλου.

6. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να είναι μοντέλο μηχανής πώλησης εφημερίδων, η οποία να έχει πόρτα που ανοίγει μόνο μετά την είσοδο τριών κερμάτων των 10 λεπτών (και οποιουδήποτε πλήθους άλλων κερμάτων) ή κερμάτων των 25 και 5 λεπτών (και οποιουδήποτε πλήθους άλλων κερμάτων). Από την στιγμή που η πόρτα μπορεί να ανοίξει, ο πελάτης θα την ανοίγει και θα παίρνει μια εφημερίδα, και μετά θα την κλείνει. Δεν θα επιστρέφονται ρέστα, ανεξάρτητα από το επιπλέον ποσό που θα εισάγεται. Ο επόμενος πελάτης θα ξεκινάει χωρίς πίστωση.

7. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να καθυστερεί συμβολοσειρά εισόδου κατά δύο bit, και να δίνει 00 σαν τα δύο πρώτα bit εξόδου.

8. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να αλλάζει κάθε δεύτερο bit, και να ξεκινάει με το δεύτερο bit συμβολοσειράς εισόδου, και να αφήνει τα άλλα bit αμετάβλητα.

9. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης για την διαδικασία εισόδου χρήστη σε υπολογιστή, όπου ο χρήστης θα εισέρχεται με πληκτρολόγηση ενός αριθμού αναγνώρισης χρήστη, ο οποίος θα θεωρείται σαν μια είσοδος, και ύστερα με πληκτρολόγηση συνθηματικού, το οποίο θα θεωρείται σαν μια είσοδος. Αν το συνθηματικό δεν είναι σωστό, θα ζητείται από τον χρήστη να πληκτρολογήσει πάλι τον αριθμό αναγνώρισης χρήστη.

10. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης για κλειδαριά ασφαλείας με συνδυασμό που να περιέχει αριθμούς από το 1 μέχρι το 40 και που να ανοίγει μόνο όταν σχηματίζεται ο σωστός συνδυασμός που θα είναι 10 δεξιά, 8 πάλι δεξιά, και 37 αριστερά. Κάθε είσοδος θα αποτελεί τριάδα που θα αποτελείται από έναν αριθμό, από την κατεύθυνση στροφής, και από το πλήθος των φορών που η κλειδαριά θα περιστρέφεται προς αυτήν την κατεύθυνση.

11. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης για μηχανή διοδίων, που να ανοίγει μια πύλη μετά την είσοδο 25 λεπτών σε κέρματα των 5, 10, και 25 λεπτών. Δεν θα επιστρέφονται ρέστα σε περίπτωση εισαγωγής μεγαλύτερου ποσού, και δεν θα υπάρχει πίστωση για τον επόμενο οδηγό σε περίπτωση εισαγωγής περισσότερων από 25 λεπτών.

12. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να δίνει σαν έξοδο 1, αν το πλήθος των συμβόλων εισόδου που έχουν διαβαστεί μέχρι στιγμής θα διαιρείται δια 3, και έξοδο 0 σε διαφορετική περίπτωση.

13. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να προσδιορίζει αν η συμβολοσειρά εισόδου έχει ένα 1 στην τελευταία θέση και ένα 0 στην τρίτη από το τέλος θέση της συμβολοσειράς που θα έχει διαβαστεί μέχρι στιγμής.

14. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να προσδιορίζει αν η συμβολοσειρά εισόδου που έχει διαβαστεί μέχρι στιγμής θα τελειώνει με τουλάχιστο πέντε διαδοχικά 1.

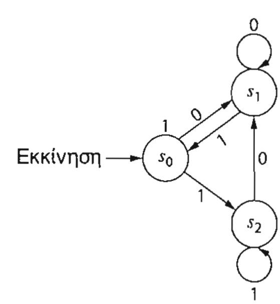
15. Να κατασκευαστεί μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που να προσδιορίζει αν η λέξη *computer* θα έχει διαβαστεί σαν οι οκτώ τελευταίοι χαρακτήρες στην συμβολοσειρά εισόδου που θα έχει διαβαστεί μέχρι στιγμής, όπου η είσοδος θα μπορεί να είναι οποιαδήποτε συμβολοσειρά Λατινικών γραμμάτων.

Η **μηχανή Moore** $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ αποτελείται από πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, αλφάβητο εισόδου I, αλφάβητο εξόδου O, συνάρτηση μετάβασης f, η οποία αναθέτει μια επόμενη κατάσταση σε κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου, συνάρτηση εξόδου g η οποία αναθέτει μια έξοδο σε κάθε κατάσταση, και μια κατάσταση εκκίνησης s_0. Η μηχανή Moore παριστάνεται είτε με πίνακα όπου καταγράφονται οι μεταβάσεις για κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου και οι έξοδοι κάθε κατάστασης, είτε με καταστατικό διάγραμμα το οποίο δείχνει τις καταστάσεις, τις μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων, και την έξοδο για κάθε κατάσταση. Στο διάγραμμα, οι μεταβάσεις φαίνονται με βέλη που έχουν ονομαστεί με την είσοδο, και οι έξοδοι φαίνονται δίπλα από τις καταστάσεις.

16. Να κατασκευαστεί το καταστατικό διάγραμμα της μηχανής Moore με τον παρακάτω καταστατικό πίνακα.

	f		
	Είσοδος		
Κατάσταση	*0*	*1*	*g*
s_0	s_0	s_2	0
s_1	s_3	s_0	1
s_2	s_2	s_1	1
s_3	s_2	s_0	1

17. Να κατασκευαστεί ο καταστατικός πίνακας για την μηχανή Moore με το καταστατικό διάγραμμα του σχήματος. Κάθε συμβολοσειρά εισόδου σε μηχανή Moore M δίνει συμβολοσειρά εξόδου. Ειδικότερα, η έξοδος που αντιστοιχεί στην συμβολοσειρά εισόδου $a_1a_2\cdots a_k$ είναι η συμβολοσειρά $g(s_0)g(s_1)\ldots g(s_k)$ όπου $s_1 = f(s_{i-1}, a_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.



18. Να βρεθεί η συμβολοσειρά εξόδου που παράγεται από την μηχανή Moore της Ασκησης 16 με τις παρακάτω συμβολοσειρές εισόδου.

a) 0101 **b)** 111111 **c)** 11101110111

19. Να βρεθεί η συμβολοσειρά εξόδου που παράγεται από την μηχανή Moore της Ασκησης 17 με τις συμβολοσειρές εισόδου της Ασκησης 16.

20. Να κατασκευαστεί μηχανή Moore που δίνει έξοδο 1, όταν το πλήθος των συμβόλων στην συμβολοσειρά εισόδου που έχουν διαβαστεί μέχρι στιγμής διαιρείται δια 4.

21. Να κατασκευαστεί μηχανή Moore που προσδιορίζει αν συμβολοσειρά εισόδου περιέχει άρτιο ή περιττό πλήθος από 1. Η μηχανή θα πρέπει να δίνει το 1 σαν έξοδο αν στην συμβολοσειρά υπάρχει άρτιο πλήθος από 1, και το 0 σαν έξοδο αν στην συμβολοσειρά υπάρχει περιττό πλήθος από 1.

11.3 Μηχανές Πεπερασμένης Κατάστασης Χωρίς Εξοδο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις περισσότερο σημαντικές εφαρμογές των μηχανών πεπερασμένης κατάστασης είναι στην αναγνώριση γλωσσών. Η εφαρμογή αυτή παίζει θεμελιώδη ρόλο στην σχεδίαση και κατασκευή μεταγλωττιστών γλωσσών προγραμματισμού. Στην Παράγραφο 11.2 δείξαμε ότι μηχανή πεπερασμένης κατάστασης με έξοδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αναγνώριση γλώσσας, με το να δίνει έξοδο 1 όταν έχει διαβαστεί συμβολοσειρά από την γλώσσα, και 0 σε διαφορετική περίπτωση. Ωστόσο, υπάρχουν άλλα είδη μηχανών πεπερασμένης κατάστασης που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για αναγνώριση γλωσσών. Οι μηχανές αυτές, αντί να δίνουν έξοδο, έχουν τελική κατάσταση. Μια συμβολοσειρά αναγνωρίζεται αν και μόνο αν φέρνει την κατάσταση εκκίνησης σε μια από αυτές τις τελικές καταστάσεις.

ΣΥΝΟΛΟ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΩΝ

Πριν εξετάσουμε τις μηχανές πεπερασμένης κατάστασης χωρίς έξοδο, θα παρουσιάσουμε κάποιο σημαντικό υλικό υποδομής από τα σύνολα συμβολοσειρών. Οι πράξεις που θα ορίσουμε εδώ θα χρησιμοποιηθούν σε μεγάλο βαθμό στην εξέτασή μας της αναγνώρισης γλωσσών από μηχανές πεπερασμένης κατάστασης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Εστω ότι τα A και B είναι υποσύνολα του V^*, όπου V είναι λεξιλόγιο. Η *αλληλουχία ή συνένωση* των A και B, που συμβολίζεται με AB, είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που έχουν την μορφή xy, όπου x είναι συμβολοσειρά του A και y συμβολοσειρά του B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Εστω ότι $A = \{0, 11\}$ και $B = \{1, 10, 110\}$. Να βρεθούν οι AB και BA.

Λύση: Το σύνολο AB περιέχει κάθε αλληλουχία συμβολοσειράς του A και συμβολοσειράς του B. Αρα, $AB = \{01, 010, 0110, 111, 1110, 11110\}$. Το σύνολο BA περιέχει κάθε αλληλουχία συμβολοσειράς του B και συμβολοσειράς του A. Αρα, $BA = \{10, 111, 100, 1011, 1100, 11011\}$.

Παρατηρούμε ότι δεν είναι οπωσδήποτε $AB = BA$, όταν τα A και B είναι υποσύνολα του V^*, όπου το V είναι αλφάβητο, όπως δείχνει το Παράδειγμα 1.

Από τον ορισμό της αλληλουχίας δύο συνόλων συμβολοσειρών, ορίζουμε το A^n, για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αυτό γίνεται με αναδρομικό τρόπο αν καθορίσουμε ότι

$$A^0 = \{\lambda\},$$
$$A^{n+1} = A^n A \text{ για } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Εστω ότι $A = \{1, 00\}$. Να βρεθεί το A^n για $n = 1, 2,$ και 3.

Λύση: Εχουμε $A^0 = \{\lambda\}$ και $A^1 = A^0 A = \{\lambda\} A = \{1, 00\}$. Για να βρούμε το A^2 παίρνουμε αλληλουχίες ζευγών στοιχείων του A. Αυτό δίνει $A^2 = \{11, 100, 001, 0000\}$. Για να βρούμε το A^3 παίρνουμε αλληλουχίες ζευγών στοιχείων των A^2 και A. Αυτό δίνει $A^3 = \{111, 1100, 1001, 10000, 0011, 00100, 00001, 000000\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Εστω ότι το A είναι υποσύνολο του V^*. Τότε η *κλειστότητα Kleene* του A, που συμβολίζεται με A^*, είναι το σύνολο που αποτελείται από αλληλουχίες αυθαίρετα πολλών στοιχειοσειρών από το A. Δηλαδή, $A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

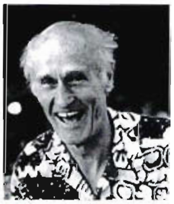
Ποιές είναι οι κλειστότητες Kleene των συνόλων $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, και $C = \{11\}$;

Λύση: Η κλειστότητα Kleene του A είναι η αλληλουχία της συμβολοσειράς 0 με τον εαυτό της, για αυθαίρετα πεπερασμένο πλήθος φορών. Αρα $A^* = \{0^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Η κλειστότητα Kleene του B είναι η αλληλουχία αυθαίρετου πλήθους συμβολοσειρών όπου κάθε συμβολοσειρά είναι είτε 0 είτε 1. Πρόκειται για το σύνολο όλων των συμβολοσειρών επί του αλφαβήτου $V = \{0, 1\}$. Δηλαδή, $B^* = V^*$. Τέλος, η κλειστότητα Kleene του C είναι η αλληλουχία της συμβολοσειράς με τον εαυτό της, γι' αυθαίρετο πλήθος φορών. Αρα, το C^* είναι το σύνολο των συμβολοσειρών που αποτελούνται από άρτιο πλήθος από 1. Δηλαδή, $C^* = \{1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Θα δώσουμε, τώρα, ένα ορισμό της μηχανής πεπερασμένης κατάστασης χωρίς έξοδο. Οι μηχανές αυτές ονομάζονται και **αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης**, και αυτή είναι η ορολογία την οποία θα χρησιμοποιούμε εδώ. Οι μηχανές αυτές διαφέρουν από τις μηχανές πεπερασμένης κατάστασης που μελετήσαμε στην Παράγραφο 11.2 στο ότι δεν δίνουν έξοδο, αλλά έχουν ένα σύνολο τελικών καταστάσεων. Οπως θα δούμε, αναγνωρίζουν συμβολοσειρές, οι οποίες μεταφέρουν την κατάσταση εκκίνησης σε τελική κατάσταση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 *Αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης* $M = (S, I, f, s_0, F)$ αποτελείται από πεπερασμένο σύνολο S *καταστάσεων*, πεπερασμένο *αλφάβητο εισό-*



STEPHEN COLE KLEENE (1909 - 1994) Ο Stephen Kleene γεννήθηκε στο Hartford της Πολιτείας Connecticut των ΗΠΑ. Η μητέρα του Alice Lena Cole ήταν ποιήτρια, και ο πατέρας του Gustav Adolph Kleene ήταν καθηγητής Οικονομικών. Ο Kleene σπούδασε στο Amherst College και πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα από το Πανεπιστήμιο Princeton το 1934, όπου σπούδασε υπό τον διάσημο καθηγητή λογικής Alonso Church. Ο Kleene προσελήφθη στο προσωπικό του Πανεπιστημίου του Wisconsin το 1935, όπου και παρέμεινε, εκτός από μερικές άδειες, όπως στο Ινστιτούτο Προχωρημένων Σπουδών του Princeton. Κατά τον 2° Παγκόσμιο Πόλεμο ήταν εκπαιδευτής ναυτιλίας στο Σχολείο Εφέδρων Αξιωματικών του Ναυτικού και αργότερα υπηρέτησε σαν διευθυντής του Εθνικού Εργαστηρίου Ερευνών των ΗΠΑ. Ο Kleene έκανε σημαντικές συνεισφορές στην θεωρία των αναδρομικών συναρτήσεων, με έρευνα σε ερωτήματα δυνατότητας υπολογισμών και αποφάσεων, και απέδειξε ένα από τα κύρια συμπεράσματα της θεωρίας αυτομάτων. Υπηρέτησε σαν Εκτελεστικός Διευθυντής του Κέντρου Μαθηματικών Ερευνών και σαν Πρύτανις του Κολλεγίου Γραμμάτων και Επιστημών στο Πανεπιστήμιο του Wisconsin. Ο Kleene ήταν σπουδαστής της φυσικής ιστορίας. Ανακάλυψε μια ποικιλία πεταλούδας που δεν είχε περιγραφεί μέχρι τότε και η οποία πήρε το όνομά του. Ηταν δεινός περιπατητής και αναρριχητής. Ηταν, ακόμη, γνωστός, σαν ταλαντούχος αφηγητής ανέκδοτων που χρησιμοποιούσε την δυνατή φωνή του, η οποία ακούγονταν σε μεγάλη απόσταση.

δου I, συνάρτηση μετάβασης *f*, η οποία αναθέτει επόμενη κατάσταση σε κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου (έτσι ώστε να είναι $f: S \times I \to S$), αρχική κατάσταση s_0, και υποσύνολο *F* του *S* που αποτελείται από τελικές καταστάσεις.

Τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης παριστάνονται είτε με καταστατικούς πίνακες είτε με καταστατικά διαγράμματα. Οι τελικές καταστάσεις φαίνονται στα καταστατικά διαγράμματα με διπλούς κύκλους.

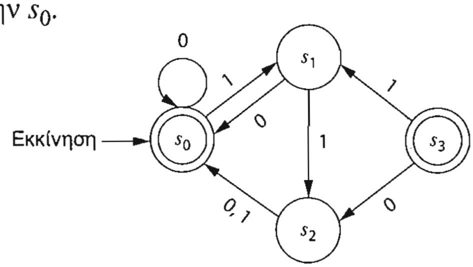
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να κατασκευαστεί το καταστατικό διάγραμμα του αυτόματου πεπερασμένης κατάστασης $M = (S, I, f, s_0, F)$, όπου $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$, $F = \{s_0, s_3\}$, και όπου η συνάρτηση μετάβασης *f* δίνεται στον Πίνακα 1.

Λύση: Στο Σχήμα 1 φαίνεται το καταστατικό διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι επειδή και οι δύο είσοδοι 0 και 1 μεταφέρουν την s_2 στην s_0, γράφουμε το 0, 1 στην ακμή από την s_2 προς την s_0.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Κατάσταση	*f* Είσοδος 0	*f* Είσοδος 1
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_0	s_0
s_3	s_2	s_1



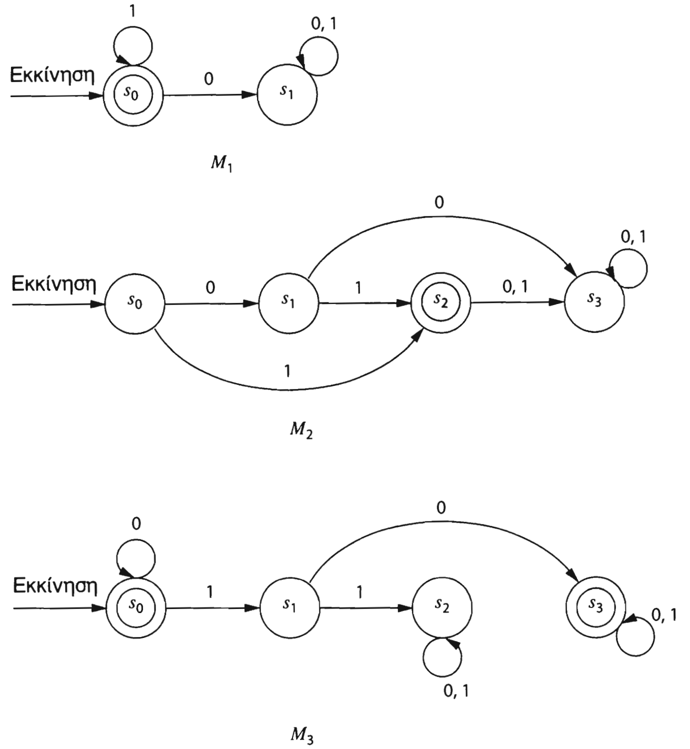
ΣΧΗΜΑ 1 Το Καταστατικό Διάγραμμα Αυτόματου Πεπερασμένης Κατάστασης.

Η συνάρτηση μετάβασης *f* επεκτείνεται, έτσι ώστε να ορίζεται για όλα τα ζεύγη καταστάσεων και συμβολοσειρών: δηλ., η *f* επεκτείνεται σε συνάρτηση $f: S \times I^* \to S$. Εστω ότι $x = x_1 x_2 \cdots x_k$ είναι συμβολοσειρά του I^*. Τότε η $f(s_1, x)$ είναι η κατάσταση που παίρνουμε αν χρησιμοποιήσουμε σαν είσοδο κάθε διαδοχικό σύμβολο της *x*, από αριστερά προς τα δεξιά, με αρχή την κατάσταση s_1. Από την s_1 συνεχίζουμε στην κατάσταση $s_2 = f(s_1, x_1)$, ύστερα στην κατάσταση $s_2 = f(s_2, x_2)$, κ.ο.κ., με $f(s_1, x) = f(s_k, x_k)$.

Λέμε ότι συμβολοσειρά **αναγνωρίζεται** ή **γίνεται δεκτή** από την μηχανή $M = (S, I, f, s_0, F)$ αν μεταφέρει την αρχική κατάσταση s_0 σε τελική κατάσταση, δηλαδή, η $f(s_0, x)$ είναι κατάσταση του *F*. Η **γλώσσα** που **αναγνωρίζεται** ή **γίνεται δεκτή** από την μηχανή *M*, η οποία συμβολίζεται με *L*(*M*), είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που αναγνωρίζονται από την *M*. Δύο αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης ονομάζονται **ισοδύναμα** αν αναγνωρίζουν την ίδια γλώσσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να προσδιοριστεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης M_1, M_2, και M_3 του Σχήματος 2.



ΣΧΗΜΑ 2 Κάποια Αυτόματα Πεπερασμένης Κατάστασης.

Λύση: Η μόνη τελική κατάσταση του M_1 είναι η s_0. Οι συμβολοσειρές που μεταφέρουν την s_0 στον εαυτό της είναι οι συμβολοσειρές που αποτελούνται από κανένα ή περισσότερα διαδοχικά 1. Αρα, $L(M_1) = \{1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Η μόνη τελική κατάσταση του M_2 είναι η s_2. Οι μόνες συμβολοσειρές που μεταφέρουν την s_0 στην s_2 είναι η 1 και η 01. Αρα, $L(M_2) = \{1, 01\}$.

Οι τελικές καταστάσεις του M_3 είναι η s_0 και η s_3. Οι μόνες συμβολοσειρές που μεταφέρουν την s_0 στον εαυτό της είναι οι λ, 0, 00, 000, . . . , δηλαδή, οποιαδήποτε συμβολοσειρά κανενός ή περισσότερων διαδοχικών 0. Οι μόνες συμβολοσειρές που μεταφέρουν την s_0 στην s_3 είναι συμβολοσειρά κανενός ή περισσότερων 0, που ακολουθούνται από το 10, που ακολουθούνται από οποιαδήποτε συμβολοσειρά. Αρα, $L(M_3) = \{0^n, 0^n10x \mid n = 0, 1, 2, \ldots,$ και x είναι οποιαδήποτε συμβολοσειρά.

Τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης που εξετάσαμε μέχρι εδώ είναι **αιτιοκρατικά**, επειδή για κάθε ζεύγος τιμής εισόδου και κατάστασης υπάρχει μια μοναδική επόμενη κατάσταση που δίνεται από την συνάρτηση μετάβασης. Υπάρχει ένα άλλο σημαντικό είδος αυτόματου πεπερασμένης κατάστασης, όπου μπορεί να υπάρχουν πολλές επόμενες καταστάσεις για κάθε ζεύγος τιμής εισόδου και κατάστασης. Οι μηχανές αυτές ονομάζονται **μη αιτιοκρατικές**. Τα μη αιτιοκρατικά αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης είναι σημαντικά για τον προσδιορισμό του ποιές γλώσσες αναγνωρίζονται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 *Μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης* $M=(S,I,f,s_0,F)$ αποτελείται από σύνολο S καταστάσεων, αλφάβητο εισόδου I, συνάρτηση μετάβασης f, η οποία αναθέτει ένα σύνολο καταστάσεων σε κάθε ζεύγος κατάστασης και εισόδου (έτσι ώστε να είναι $f: S\times I \to P(S)$), αρχική κατάσταση s_0, και υποσύνολο F του S που αποτελείται από τελικές καταστάσεις.

Παριστάνουμε τα μη αιτιοκρατικά αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης με χρήση καταστατικών πινάκων ή καταστατικών διαγραμματων. Οταν χρησιμοποιούμε καταστατικό πίνακα, για κάθε ζεύγος κατάστασης και τιμής εισόδου δίνουμε μία λίστα δυνατών επόμενων καταστάσεων, δίνοντας ονόματα στις ακμές με την είσοδο ή τις εισόδους που οδηγούν στην μετάβαση αυτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να βρεθεί το καταστατικό διάγραμμα για το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που έχει τον καταστατικό πίνακα που φαίνεται στον Πίνακα 2. Οι τελικές καταστάσεις είναι οι s_2 και s_3.

Λύση: Το καταστατικό διάγραμμα αυτού του αυτόματου φαίνεται στο Σχήμα 3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να βρεθεί ο καταστατικός πίνακας για το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που έχει το καταστατικό διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.

Λύση: Ο καταστατικός πίνακας αυτού του αυτόματου φαίνεται σαν Πίνακας 3.

Τι σημαίνει ότι μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης αναγνωρίζει συμβολοσειρά $x = x_1x_2\cdots x_k$; Το πρώτο σύμβολο εισόδου x_1 μεταφέρει την αρχική κατάσταση s_0 σε σύνολο S_1 κατα-

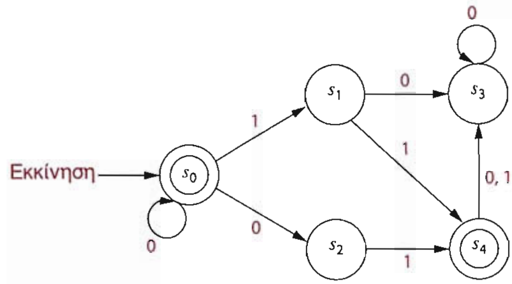
ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Κατάσταση	*f* Είσοδος 0	1
s_0	s_0, s_1	s_3
s_1	s_0	s_1, s_3
s_2		s_0, s_2
s_3	s_0, s_1, s_2	s_1

ΣΧΗΜΑ 3 Το Μη Αιτιοκρατικό Αυτόματο Πεπερασμένης Κατάστασης με τον Καταστατικό Πίνακα του Πίνακα 2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Κατά-στάση	*f* Είσοδος *0*	*1*
s_0	s_0, s_2	s_1
s_1	s_3	s_4
s_2		s_4
s_3	s_3	
s_4	s_3	s_3



ΣΧΗΜΑ 4 Μη Αιτιοκρατικό Αυτόματο Πεπερασμένης Κατάστασης.

στάσεων. Το επόμενο σύμβολο εισόδου x_2 μεταφέρει κάθε μια από τις καταστάσεις του S_1 σε σύνολο καταστάσεων. Εστω ότι S_2 είναι η ένωση αυτών των συνόλων. Συνεχίζουμε αυτή την διεργασία, περιλαμβάνοντας σε ένα στάδιο όλες τις καταστάσεις που πήραμε με χρήση κατάστασης, την οποία λάβαμε στο προηγούμενο στάδιο, και το τρέχον σύμβολο εισόδου. **Αναγνωρίζουμε**, ή **κάνουμε δεκτή**, την συμβολοσειρά x αν υπάρχει τελική κατάσταση στο σύνολο όλων των καταστάσεων που μπορούμε να πάρουμε από την s_0 με χρήση της x. Η **γλώσσα που αναγνωρίζεται** από μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών που αναγνωρίζονται από αυτό το αυτόματο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης του Σχήματος 4.

Λύση: Επειδή η s_0 είναι τελική κατάσταση, και υπάρχει μετάβαση από την s_0 προς τον εαυτό της όταν είσοδος είναι το 0, η μηχανή αναγνωρίζει όλες τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από κανένα ή περισσότερα διαδοχικά 0. Επιπλέον, επειδή η s_4 είναι τελική κατάσταση, αναγνωρίζεται οποιαδήποτε συμβολοσειρά η οποία έχει την s_4 στο σύνολο των καταστάσεων, στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε από την s_0 με αυτή την συμβολοσειρά εισόδου. Οι μόνες τέτοιες συμβολοσειρές είναι οι συμβολοσειρές που αποτελούνται από κανένα ή περισσότερα 0 που ακολουθούνται από 01 ή 11. Επειδή οι s_0 και s_4 είναι οι μόνες τελικές καταστάσεις, η γλώσσα που αναγνωρίζεται από την μηχανή είναι η $\{0^n, 0^n01, 0^n11 \mid n \geq 0\}$.

Ενα σημαντικό γεγονός είναι ότι η γλώσσα που αναγνωρίζεται από μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης αναγνωρίζεται και από αιτιοκτατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης. Στην επόμενη παράγραφο θα εκμεταλλευτούμε αυτό το γεγονός, όταν θα προσδιορίσουμε ποιές γλώσσες αναγνωρίζονται από αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν η γλώσσα L αναγνωρίζεται από μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης M_0, τότε η γλώσσα L αναγνωρίζεται και από αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης M_1.

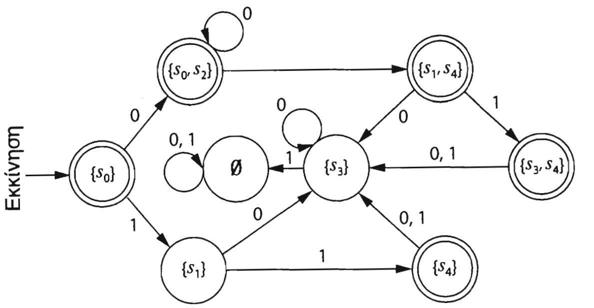
Απόδειξη: Θα περιγράψουμε τον τρόπο κατασκευής του αιτιοκρατικού αυτόματου πεπερασμένης κατάστασης M_1, το οποίο αναγνωρίζει την L από το M_0, δηλ., το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει αυτή την γλώσσα. Κάθε κατάσταση του M_1 θα αποτελείται από σύνολο καταστάσεων του M_0. Το σύμβολο εκκίνησης του M_1 είναι $\{s_0\}$, το οποίο είναι το σύνολο που περιέχει την κατάσταση εκκίνησης του M_0. Το σύνολο εισόδου του M_1 είναι το ίδιο με το σύνολο εισόδου του M_0. Αν δίνεται μια κατάσταση $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}\}$ του M_1, το σύμβολο εισόδου x μεταφέρει αυτή την κατάσταση στην ένωση των συνόλων των επόμενων καταστάσεων των στοιχείων αυτού του συνόλου, δηλ., στην ένωση των συνόλων $f(s_{i_1}), f(s_{i_2}), \ldots, f(s_{i_k})$. Οι καταστάσεις του M_1 είναι όλα τα υποσύνολα του S, δηλ., το σύνολο των καταστάσεων του M_0, που λαμβάνονται με τον τρόπο αυτό αν ξεκινήσουμε από την s_0. (Στην αιτιοκρατική μηχανή υπάρχουν μέχρι 2^n καταστάσεις, όπου n είναι το πλήθος των καταστάσεων στην μη αιτιοκρατική μηχανή, επειδή όλα τα υποσύνολα εμφανίζονται σαν καταστάσεις, μαζί με το κενό σύνολο, αν και συνήθως εμφανίζονται λιγότερες καταστάσεις.) Οι τελικές καταστάσεις του M_1 είναι τα σύνολα που περιέχουν μια τελική κατάσταση του M_0.

Εστω ότι μια συμβολοσειρά εισόδου αναγνωρίζεται από το M_0. Τότε μια από τις καταστάσεις στην οποία μπορούμε να φτάσουμε από την s_0 με χρήση αυτής της συμβολοσειράς εισόδου είναι τελική κατάσταση (ο αναγνώστης πρέπει να βρει επαγωγική απόδειξη αυτού του γεγονότος). Αυτό σημαίνει ότι στο M_1, αυτή η συμβολοσειρά εισόδου οδηγεί από το $\{s_0\}$ σε σύνολο καταστάσεων του M_0 το οποίο περιέχει τελική κατάσταση. Αυτό το υποσύνολο είναι τελική κατάσταση του M_1, και έτσι αυτή η συμβολοσειρά αναγνωρίζεται και από το M_1. Ακόμη, συμβολοσειρά εισόδου που δεν αναγνωρίζεται από το M_0 δεν οδηγεί σε τελικές καταστάσεις του M_0. (Ο αναγνώστης θα πρέπει να δώσει τις λεπτομέρειες που αποδεικνύουν αυτή την δήλωση.) Κατά συνέπεια, αυτή η συμβολοσειρά εισόδου δεν οδηγεί από το $\{s_0\}$ σε τελική κατάσταση του M_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης του Παραδείγματος 7.

Λύση: Το αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που φαίνεται στο Σχήμα 5 κατασκευάζεται από το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης του Παραδείγματος 7. Οι καταστάσεις αυτού του αιτιοκρατικού αυτόματου είναι υποσύνολα του συνόλου όλων των καταστάσεων της μη αιτιοκρατικής μηχανής. Η επόμενη κατάσταση υποσυνόλου, με ένα σύμ-



ΣΧΗΜΑ 5 Αιτιοκρατικό Αυτόματο Ισοδύναμο με το Μη Αιτιοκρατικό Αυτόματο του Παραδείγματος 7.

βολο εισόδου, είναι το υποσύνολο που περιέχει την επόμενη κατάσταση της μη αιτιοκρατικής μηχανής όλων των στοιχείων στο υποσύνολο αυτό. Για παράδειγμα, με είσοδο 0, το $\{s_0\}$ μεταφέρεται στο $\{s_0, s_2\}$, επειδή η s_0 έχει μεταβάσεις προς τον εαυτό της και προς την s_2 στην μη αιτιοκρατική μηχανή. Με είσοδο του 1 το σύνολο $\{s_0, s_2\}$ μεταφέρεται στο $\{s_1, s_4\}$, επειδή στην μη αιτιοκρατική μηχανή με είσοδο του 1 η s_0 μεταφέρεται μόνο στην s_1 και η s_2 μεταφέρεται μόνο στην s_4. Και με είσοδο του 0 το σύνολο $\{s_1, s_4\}$ μεταφέρεται στο $\{s_3\}$, επειδή στην αιτιοκρατική μηχανή με είσοδο του 0 η s_1 και η s_4 μεταφέρονται και οι δύο μόνο στην s_3. Ολα τα υποσύνολα που λαμβάνονται με τον τρόπο αυτό περιλαμβάνονται στην αιτιοκρατική μηχανή πεπερασμένης κατάστασης. Σημειώνουμε ότι το κενό σύνολο είναι μια από τις καταστάσεις αυτής της μηχανής, επειδή με είσοδο του 1 είναι το υποσύνολο που περιέχει όλες τις επόμενες καταστάσεις του $\{s_3\}$. Η αρχική κατάσταση είναι $\{s_0\}$, και το σύνολο των τελικών καταστάσεων είναι όλες εκείνες που περιλαμβάνουν την s_0 ή την s_4.

Ασκήσεις

1. Εστω ότι $A = \{0, 11\}$ και $B = \{00, 01\}$. Να βρεθούν τα παρακάτω σύνολα.
a) AB **b)** BA **c)** A^2 **d)** B^3

2. Να δειχτεί ότι αν το A είναι σύνολο συμβολοσειρών, τότε $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$.

3. Να βρεθούν ολα τα ζεύγη συνόλων των συμβολοσειρών A και B, για τα οποία $AB = \{10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000\}$.

4. Να δειχτεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.
a) $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$ **b)** $(A^*)^* = A^*$ για κάθε σύνολο συμβολοσειρών A

5. Να περιγραφούν τα στοιχεία του συνόλου A^* για τις παρακάτω τιμές του A.
a) $\{10\}$ **b)** $\{111\}$ **c)** $\{0, 01\}$ **d)** $\{1, 101\}$

6. Εστω ότι το V είναι αλφάβητο, και έστω ότι τα A και B είναι υποσύνολα του V^*. Να δειχτεί ότι $|AB| \le |A||B|$.

7. Εστω ότι το V είναι αλφάβητο, και έστω ότι τα A και B είναι υποσύνολα του V^* με $A \subseteq B$. Να δειχτεί ότι $A^* \subseteq B^*$.

8. Εστω ότι το A είναι υποσύνολο του V^* όπου το V είναι αλφάβητο. Να δειχτεί αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω δηλώσεις.

a) $A \subseteq A^2$ **b)** αν $A = A^2$, τότε $\lambda \in A$ **c)** $A\{\lambda\} = A$

d) $(A^*)^* = A^*$ **e)** $A^*A = A^*$ **f)** $|A^n| = |A|^n$

9. Να προσδιοριστεί αν η συμβολοσειρά 11101 υπάρχει στα παρακάτω σύνολα.

a) $\{0,1\}^*$ **b)** $\{1\}^*\{0\}^*\{1\}^*$ **c)** $\{11\}\{1\}^*\{01\}$

d) $\{11\}^*\{01\}^*$ **e)** $\{111\}^*\{0\}^*\{1\}$ **f)** $\{111, 000\}\{00, 01\}$

10. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω συμβολοσειρές αναγνωρίζονται από το αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης του Σχήματος 1.

a) 010 **b)** 1101 **c)** 1111110 **d)** 010101010

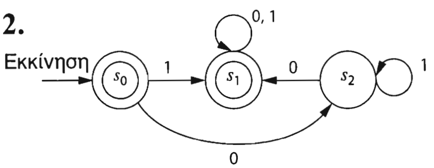
11. Να προσδιοριστεί αν όλες οι συμβολοσειρές στα παρακάτω σύνολα αναγνωρίζονται από το αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης του Σχήματος 1.

a) $\{0\}^*$ **b)** $\{0\}\{0\}^*$ **c)** $\{1\}\{0\}^*$

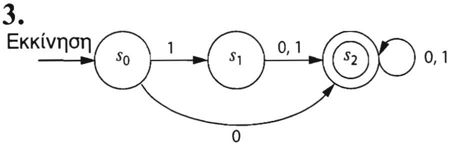
d) $\{01\}^*$ **e)** $\{0\}^*\{1\}^*$ **f)** $\{1\}\{0,1\}^*$

Στις Ασκήσεις 12-16 να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που δίνεται.

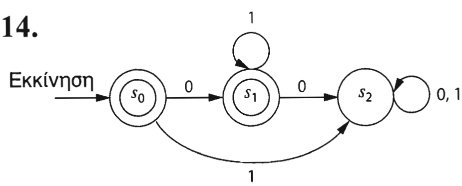
12.



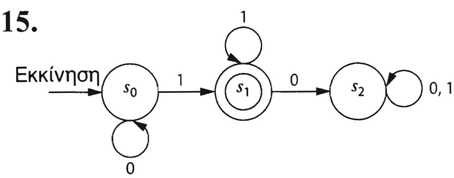
13.



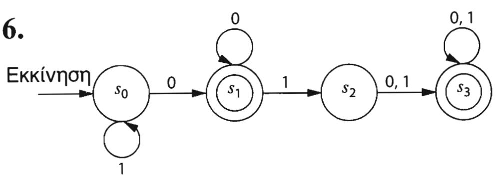
14.



15.

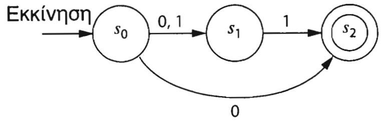


16.

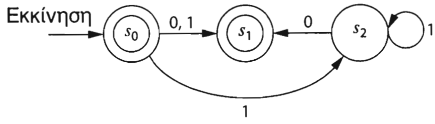


Στις Ασκήσεις 17-21 να βρεθεί η γλώσσα που αναγνωρίζεται από το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που δίνεται.

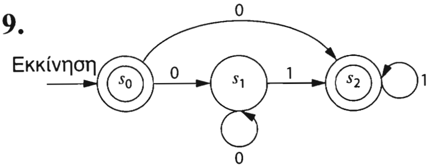
17.



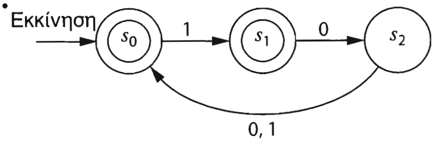
18.



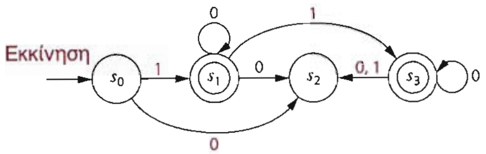
19.



20.



21.



22. Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης της Ασκησης 17.

23. Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης της Ασκησης 18.

24. Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης της Ασκησης 19.

25. Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπρασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης της Ασκησης 20.

26. Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης της Ασκησης 21.

27. Να βρεθεί αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει τα παρακάτω σύνολα.

a) $\{0\}$ **b)** $\{1, 00\}$ **c)** $\{1^n \mid n = 2, 3, 4, \dots\}$

28. Να βρεθεί μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει τις γλώσσες της Ασκησης 27, και που έχει λιγότερες καταστάσεις, αν αυτό είναι δυνατόν, από το αιτιοκρατικό αυτόματο που βρήκαμε στην άσκηση αυτή.

***29.** Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει το σύνολο των συμβολοσειρών bit που περιέχουν ίσο πλήθος από 0 και 1.

11.4 Αναγνώριση Γλωσσών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είδαμε ότι τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν μηχανές αναγνώρισης γλωσσών. Ποιά σύνολα αναγνωρίζονται από αυτές τις μηχανές; Αν και αυτό το πρόβλημα φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο, υπάρχει ένας απλός χαρακτηρισμός των συνόλων που αναγνωρίζονται από τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης. Το πρόβλημα λύθηκε για πρώτη φορά το 1956 από τον Αμερικανό μαθηματικό Stephen Kleene. Αυτός έδειξε ότι υπάρχει αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει σύνολο αν και μόνο αν αυτό το σύνολο μπορεί να αναπτυχθεί σταδιακά από το μηδενικό σύνολο, από την μηδενική συμβολοσειρά, και από μονοσυμβολοσειρές αν πάρουμε αλληλουχίες, ενώσεις, και κλειστότητες Kleene, με αυθαίρετη σειρά. Τα σύνολα που κατασκευάζονται με τον τρόπο αυτό ονομάζονται **κανονικά σύνολα**.

Στην Παράγραφο 11.1 ορίσαμε τις κανονικές γραμματικές. Εξαιτίας της ορολογίας που χρησιμοποιούμε, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ κανονικών συνόλων, που είναι τα σύνολα που αναγνωρίζονται από αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης, και κανονικών γραμματικών. Ειδικότερα, σύνολο είναι κανονικό αν και μόνο αν παράγεται από κανονική γραμματική.

Τέλος, υπάρχουν σύνολα που δεν αναγνωρίζονται από οποιαδήποτε αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα τέτοιου συνόλου. Στο τέλος αυτής της παραγράφου θα εξετάσουμε με συντομία περισσότερο ισχυρά μοντέλα υπολογισμών, όπως είναι τα αυτόματα στοίβας και οι μηχανές Turing.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ

Κανονικά σύνολα είναι τα σύνολα που σχηματίζονται με χρήση των πράξεων της αλληλουχίας, της ένωσης και της κλειστότητας Kleene με αυθαίρετη σειρά, με αρχή το κενό σύνολο, την κενή συμβολοσειρά, και μονοσύνολα. Θα δούμε ότι τα κανονικά σύνολα είναι τα σύνολα που αναγνωρίζονται με χρήση αυτόματου πεπερασμένης κατάστασης. Για να ορίσουμε τα κανονικά σύνολα πρώτα πρέπει να δώσουμε τον ορισμό των κανονικών εκφράσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Οι *κανονικές εκφράσεις* επί συνόλου I ορίζονται με αναδρομικό τρόπο με τα παρακάτω:

το σύμβολο $\emptyset$ είναι κανονική έκφραση
το σύμβολο λ είναι κανονική έκφραση
το σύμβολο x είναι κανονική έκφραση αν $x \in I$
τα σύμβολα $(\mathbf{AB})$, $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$, και $\mathbf{A}^*$ είναι κανονικές εκφράσεις, αν τα **A** και **B** είναι κανονικές εκφράσεις.

Κάθε κανονική έκφραση παριστάνει ένα σύνολο που καθορίζεται με τους παρακάτω κανόνες:

το $\emptyset$ παριστάνει το κενό σύνολο, δηλ., το σύνολο χωρίς συμβολοσειρές
το λ παριστάνει το σύνολο $\{\lambda\}$, που είναι το σύνολο που περιέχει την κενή συμβολοσειρά
το x παριστάνει το σύνολο $\{x\}$, που παριστάνει την συμβολοσειρά με ένα σύμβολο x
το $(\mathbf{AB})$ παριστάνει την αλληλουχία των συνόλων που παριστάνονται από το **A** και από το **B**
το $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ παριστάνει την ένωση των συνόλων που παριστάνονται από το **A** και από το **B**
το $\mathbf{A}^*$ παριστάνει την κλειστότητα Kleene του συνόλου που παριστάνεται από το **A**