και κλειστότητες Kleene, με αυθαίρετη σειρά. Τα σύνολα που κατασκευάζονται με τον τρόπο αυτό ονομάζονται **κανονικά σύνολα**.

Στην Παράγραφο 11.1 ορίσαμε τις κανονικές γραμματικές. Εξαιτίας της ορολογίας που χρησιμοποιούμε, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ κανονικών συνόλων, που είναι τα σύνολα που αναγνωρίζονται από αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης, και κανονικών γραμματικών. Ειδικότερα, σύνολο είναι κανονικό αν και μόνο αν παράγεται από κανονική γραμματική.

Τέλος, υπάρχουν σύνολα που δεν αναγνωρίζονται από οποιαδήποτε αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα τέτοιου συνόλου. Στο τέλος αυτής της παραγράφου θα εξετάσουμε με συντομία περισσότερο ισχυρά μοντέλα υπολογισμών, όπως είναι τα αυτόματα στοίβας και οι μηχανές Turing.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ

Κανονικά σύνολα είναι τα σύνολα που σχηματίζονται με χρήση των πράξεων της αλληλουχίας, της ένωσης και της κλειστότητας Kleene με αυθαίρετη σειρά, με αρχή το κενό σύνολο, την κενή συμβολοσειρά, και μονοσύνολα. Θα δούμε ότι τα κανονικά σύνολα είναι τα σύνολα που αναγνωρίζονται με χρήση αυτόματου πεπερασμένης κατάστασης. Για να ορίσουμε τα κανονικά σύνολα πρώτα πρέπει να δώσουμε τον ορισμό των κανονικών εκφράσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Οι *κανονικές εκφράσεις* επί συνόλου I ορίζονται με αναδρομικό τρόπο με τα παρακάτω:

το σύμβολο $\emptyset$ είναι κανονική έκφραση
το σύμβολο λ είναι κανονική έκφραση
το σύμβολο x είναι κανονική έκφραση αν $x \in I$
τα σύμβολα $(\mathbf{AB})$, $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$, και $\mathbf{A}^*$ είναι κανονικές εκφράσεις, αν τα **A** και **B** είναι κανονικές εκφράσεις.

Κάθε κανονική έκφραση παριστάνει ένα σύνολο που καθορίζεται με τους παρακάτω κανόνες:

το $\emptyset$ παριστάνει το κενό σύνολο, δηλ., το σύνολο χωρίς συμβολοσειρές
το λ παριστάνει το σύνολο $\{\lambda\}$, που είναι το σύνολο που περιέχει την κενή συμβολοσειρά
το x παριστάνει το σύνολο $\{x\}$, που παριστάνει την συμβολοσειρά με ένα σύμβολο x
το $(\mathbf{AB})$ παριστάνει την αλληλουχία των συνόλων που παριστάνονται από το **A** και από το **B**
το $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ παριστάνει την ένωση των συνόλων που παριστάνονται από το **A** και από το **B**
το $\mathbf{A}^*$ παριστάνει την κλειστότητα Kleene του συνόλου που παριστάνεται από το **A**

Τα σύνολα που παριστάνονται με κανονικές εκφράσεις ονομάζονται **κανονικά σύνολα**. Από εδώ και στο εξής οι κανονικές εκφράσεις θα χρησιμοποιούνται για να περιγράφουν κανονικά σύνολα, και έτσι όταν αναφερόμαστε στο κανονικό σύνολο **A**, θα εννοούμε το κανονικό σύνολο που παριστάνεται απο την κανονική έκφραση **A**. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο χρήσης των κανονικών εκφράσεων για τον καθορισμό κανονικών συνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ποιές είναι οι συμβολοσειρές στα κανονικά σύνολα που καθορίζονται από τις κανονικές εκφράσεις $\mathbf{10}^*$, $(\mathbf{10})^*$, $\mathbf{0} \cup \mathbf{01}$, $\mathbf{0}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*$, και $(\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*$;

Λύση: Στον Πίνακα 1 δίνονται τα κανονικά σύνολα που παριστάνονται από τις εκφράσεις αυτές, όπως μπορεί να επαληθεύσει ο αναγνώστης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Εκφραση	*Στοιχειοσειρές*
$\mathbf{10}^*$	Ενα 1 που ακολουθείται από οποιοδήποτε πλήθος από 0 (μαζί με κανένα 0)
$(\mathbf{10})^*$	οποιοδήποτε πλήθος αντιγράφων του 10 (μαζί με την μηδεν. συμβολοσειρά)
$\mathbf{0} \cup \mathbf{01}$	η συμβολοσειρά 0 ή η συμβολοσειρά 01
$\mathbf{0}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*$	οποιαδήποτε συμβολοσειρά αρχίζει με 0
$(\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*$	οποιαδήποτε συμβολοσειρά που δεν τελειώνει με 0

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KLEENE

Το 1956 ο Kleene απέδειξε ότι κανονικά σύνολα είναι τα σύνολα που αναγνωρίζονται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης. Κατά συνέπεια, αυτό το σημαντικό συμπέρασμα ονομάζεται Θεώρημα του Kleene.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KLEENE Σύνολο είναι κανονικό αν και μόνο αν αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης.

Το Θεώρημα του Kleene αποτελεί ένα από τα κεντρικά συμπεράσματα της θεωρίας αυτομάτων. Θα αποδείξουμε το τμήμα *μόνο αν* αυτού του θεωρήματος, δηλαδή ότι κάθε κανονικό σύνολο αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης. Η απόδειξη του τμήματος *αν*, δηλαδή ότι σύνολο που αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης είναι κανονικό, αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Απόδειξη: Θυμόμαστε ότι κανονικό σύνολο ορίζεται σαν έκφραση κανονικών εκφράσεων, οι οποίες ορίζονται με αναδρομικό τρόπο. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε κανονικό σύνολο αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης αν μπορούμε να εκτελέσουμε τα παρακάτω.

1. Να δείξουμε ότι το $\emptyset$ αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης.

2. Να δείξουμε ότι το $\{\lambda\}$ αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης.
3. Να δείξουμε ότι το $\{a\}$ αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης αν το a είναι σύμβολο του I.
4. Να δείξουμε ότι το AB αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης αν αναγνωρίζονται και το A και το B.
5. Να δείξουμε ότι το $A \cup B$ αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης, αν αναγνωρίζονται και το A και το B.
6. Να δείξουμε ότι το A^* αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης, αν αναγνωρίζεται το A.

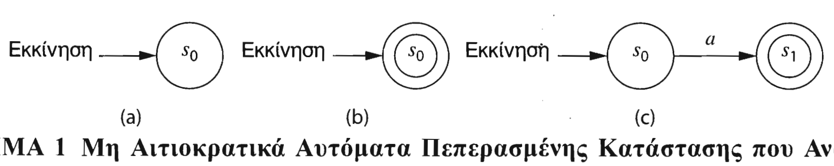
Θα εξετάσουμε, τώρα, κάθε μια από τις εργασίες αυτές. Πρώτα δείχνουμε ότι το $\emptyset$ αναγνωρίζεται από μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης. Για να γίνει αυτό, χρειαζόμαστε μόνο ένα αυτόματο χωρίς τελικές καταστάσεις. Στο Σχήμα 1(a) φαίνεται ένα τέτοιο αυτόματο.

Δεύτερον, δείχνουμε ότι το $\{\lambda\}$ αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης. Για να γίνει αυτό, χρειαζόμαστε μόνο ένα αυτόματο που αναγνωρίζει το λ, την μηδενική συμβολοσειρά, αλλά όχι άλλη συμβολοσειρά. Αυτό μπορεί να γίνει με το να κάνουμε τελική κατάσταση την κατάσταση εκκίνησης s_0 και με το να μην έχουμε μεταβάσεις, έτσι ώστε καμμία άλλη συμβολοσειρά να μην μεταφέρει την s_0 σε τελική κατάσταση. Στο Σχήμα 1(b) φαίνεται ένα τέτοιο μη αιτιοκρατικό αυτόματο.

Τρίτο, δείχνουμε ότι το $\{a\}$ αναγνωρίζεται από μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιούμε μηχανή με αρχική κατάσταση εκκίνησης s_0 και τελική κατάσταση s_1. Εχουμε μια μετάβαση από το s_0 στο s_1 όταν η είσοδος είναι a, χωρίς άλλες μεταβάσεις. Η μόνη συμβολοσειρά που αναγνωρίζεται από την μηχανή αυτή είναι η a. Αυτή η μηχανή φαίνεται στο Σχήμα 1(c).

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι τα AB και $A \cup B$ μπορούν να αναγνωριστούν από αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης αν τα A και B είναι γλώσσες που αναγνωρίζονται από αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης. Εστω ότι το A αναγνωρίζεται από την $M_A = (S_A, I, f_A, s_A, F_A)$ και ότι το B αναγνωρίζεται από την $M_B = (S_B, I, f_B, s_B, F_B)$.

Ξεκινούμε με την κατασκευή μηχανής πεπερασμένης κατάστασης $M_{AB} = (S_{AB}, I, f_{AB}, s_{AB}, F_{AB})$ η οποία αναγνωρίζει το AB, δηλ., την αλληλουχία των A και B. Κατασκευάζουμε μια τέτοια μηχανή με συνδυασμό των μηχανών των A και B σε σειρά, έτσι ώστε συμβολοσειρά του A να μεταφέρει την συνδυα-



ΣΧΗΜΑ 1 Μη Αιτιοκρατικά Αυτόματα Πεπερασμένης Κατάστασης που Αναγνωρίζουν Κάποια Βασικά Σύνολα.

σμένη μηχανή από την s_A, την αρχική κατάσταση της M_A, στην s_B, την αρχική κατάσταση της M_B. Συμβολοσειρά του B θα μετέφερε την συνδυασμένη μηχανή από την s_B σε τελική κατάσταση της συνδυασμένης μηχανής. Κατά συνέπεια, κάνουμε την παρακάτω κατασκευή. Εστω ότι S_{AB} είναι η $S_A \cup S_B$. Η κατάσταση εκκίνησης s_{AB} είναι ίδια με την s_A. Το σύνολο των τελικών καταστάσεων, F_{AB}, είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων της M_B μαζί με την s_{AB} αν και μόνο αν $\lambda \in A \cap B$. Οι μεταβάσεις της M_{AB} περιλαμβάνουν όλες τις μεταβάσεις της M_A και της M_B, καθώς και κάποιες νέες μεταβάσεις. Για κάθε μετάβαση της M_A που οδηγεί σε τελική κατάσταση, σχηματίζουμε μια μετάβαση της M_{AB} από την ίδια κατάσταση στην s_B, με την ίδια είσοδο. Με τον τρόπο αυτό, συμβολοσειρά του A μεταφέρει την M_{AB} από την s_{AB} στην s_B, και ύστερα μια συμβολοσειρά του B μεταφέρει την s_B σε τελική κατάσταση της M_{AB}. Επιπλέον, για κάθε μετάβαση από την s_B σχηματίζουμε μια μετάβαση της M_{AB} από την s_{AB} στην ίδια κατάσταση. Στο Σχήμα 2(a) φαίνεται μια τέτοια κατασκευή.

Κατασκευάζουμε, τώρα, μια μηχανή $M_{A\cup B} = \{S_{A\cup B}, I, f_{A\cup B}, s_{A\cup B}, F_{A\cup B}\}$ η οποία αναγνωρίζει το $A \cup B$. Αυτό το αυτόματο μπορεί να κατασκευαστεί με παράλληλο συνδυασμό των M_A και M_B, με χρήση νέας κατάστασης εκκίνησης που έχει τις μεταβάσεις που έχουν και η s_A και η s_B. Εστω ότι $S_{A\cup B} = S_A \cup S_B \cup \{s_{A\cup B}\}$, όπου $s_{A\cup B}$ είναι νέα κατάσταση που είναι η κατάσταση εκκίνησης της $M_{A\cup B}$. Εστω ότι το σύνολο των τελικών καταστάσεων $F_{A\cup B}$ είναι $F_A \cup F_B \cup \{s_{A\cup B}\}$ αν $\lambda \in A \cup B$, και $F_A \cup F_B$ σε διαφορετική περίπτωση. Οι μεταβάσεις της $M_{A\cup B}$ περιλαμβάνουν όλες τις μεταβάσεις της M_A και της M_B. Ακόμη, για κάθε μετάβαση από την s_A σε κατάσταση s με είσοδο i περιλαμβάνουμε μια μετάβαση από την $s_{A\cup B}$ στην s με είσοδο i, και για κάθε μετάβαση από την s_B σε κατάσταση s με είσοδο i περιλαμβάνουμε μια μετάβαση από την $s_{A\cup B}$ στην s με είσοδο i. Με τον τρόπο αυτό, συμβολοσειρά του A οδηγεί από την $s_{A\cup B}$ σε τελική κατάσταση της νέας μηχανής, και συμβολοσειρά του B οδηγεί από την $s_{A\cup B}$ σε τελική κατάσταση της νέας μηχανής. Στο Σχήμα 2(b) φαίνεται η κατασκευή της $M_{A\cup B}$.

Τέλος, κατασκευάζουμε την $M_{A^*} = \{S_{A^*}, I, f_{A^*}, s_{A^*}, F_{A^*}\}$, μηχανή η οποία αναγνωρίζει το A^*, δηλ., την κλειστότητα Kleene του A. Εστω ότι η S_{A^*} περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις της S_A και κάποια επιπλέον κατάσταση s_{A^*}, που είναι η κατάσταση εκκίνησης της νέας μηχανής. Το σύνολο των τελικών καταστάσεων F_{A^*} περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις της F_A καθώς και την κατάσταση εκκίνησης s_{A^*}, επειδή πρέπει να αναγνωριστεί το λ. Για την αναγνώριση αλληλουχιών αυθαίρετα πολλών συμβολοσειρών από το A, περιλαμβάνουμε όλες τις μεταβάσεις της M_A, καθώς και μεταβάσεις από την s_{A^*} που ταιριάζουν με τις μεταβάσεις από την s_A, και μεταβάσεις από κάθε τελική κατάσταση που ταιριάζουν με τις μεταβάσεις από την s_A. Με αυτό το σύνολο μεταβάσεων, συμβολοσειρά που αποτελείται από αλληλουχίες συμβολοσειρών από το A θα μεταφέρει την s_{A^*} σε τελική κατάσταση όταν θα έχει διαβαστεί η πρώτη συμβολοσειρά του

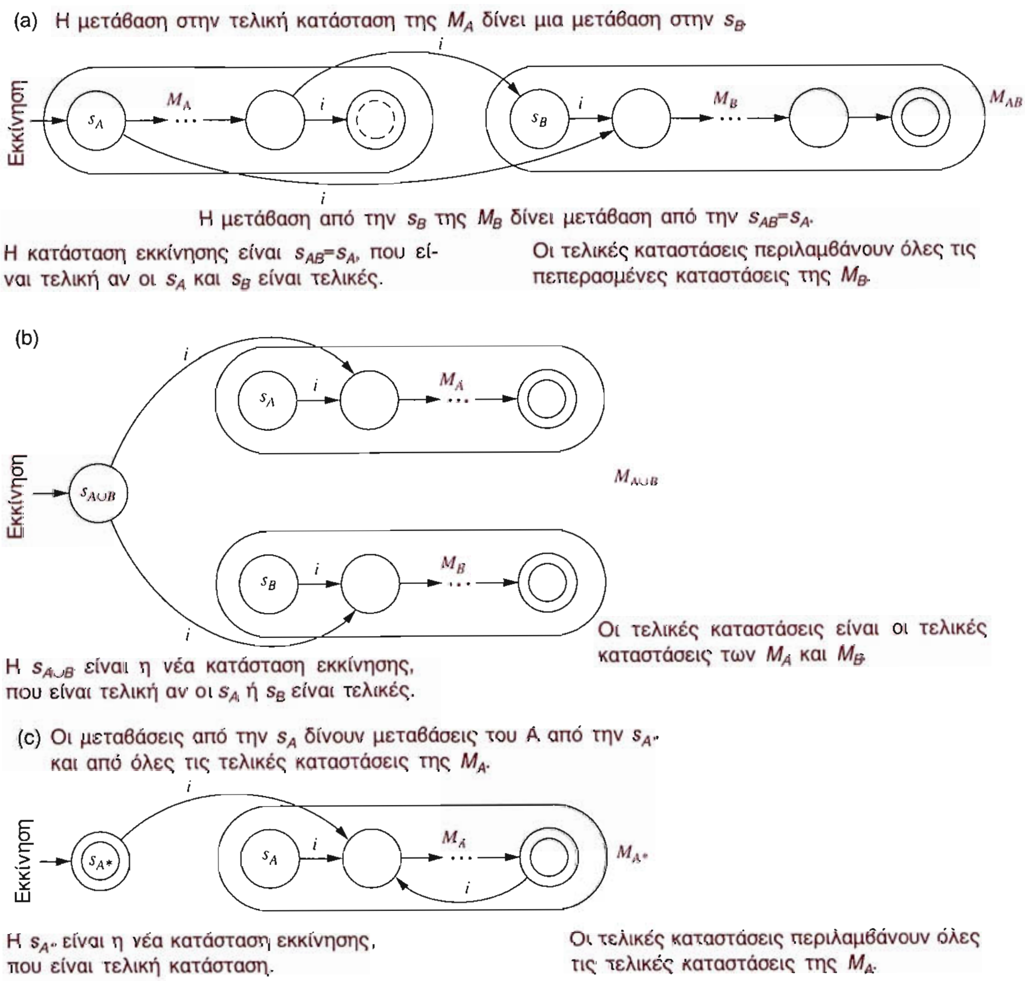
A, με επιστροφή σε τελική κατάσταση, όταν θα έχει διαβαστεί η δεύτερη συμβολοσειρά του A, κ.ο.κ. Στο Σχήμα 2(c) φαίνεται η κατασκευή που χρησιμοποιήσαμε.

Μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης κατασκευάζεται για οποιοδήποτε κανονικό σύνολο με χρήση της διαδικασίας που περιγράψαμε στην απόδειξη αυτή. Με το Παράδειγμα 2 δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

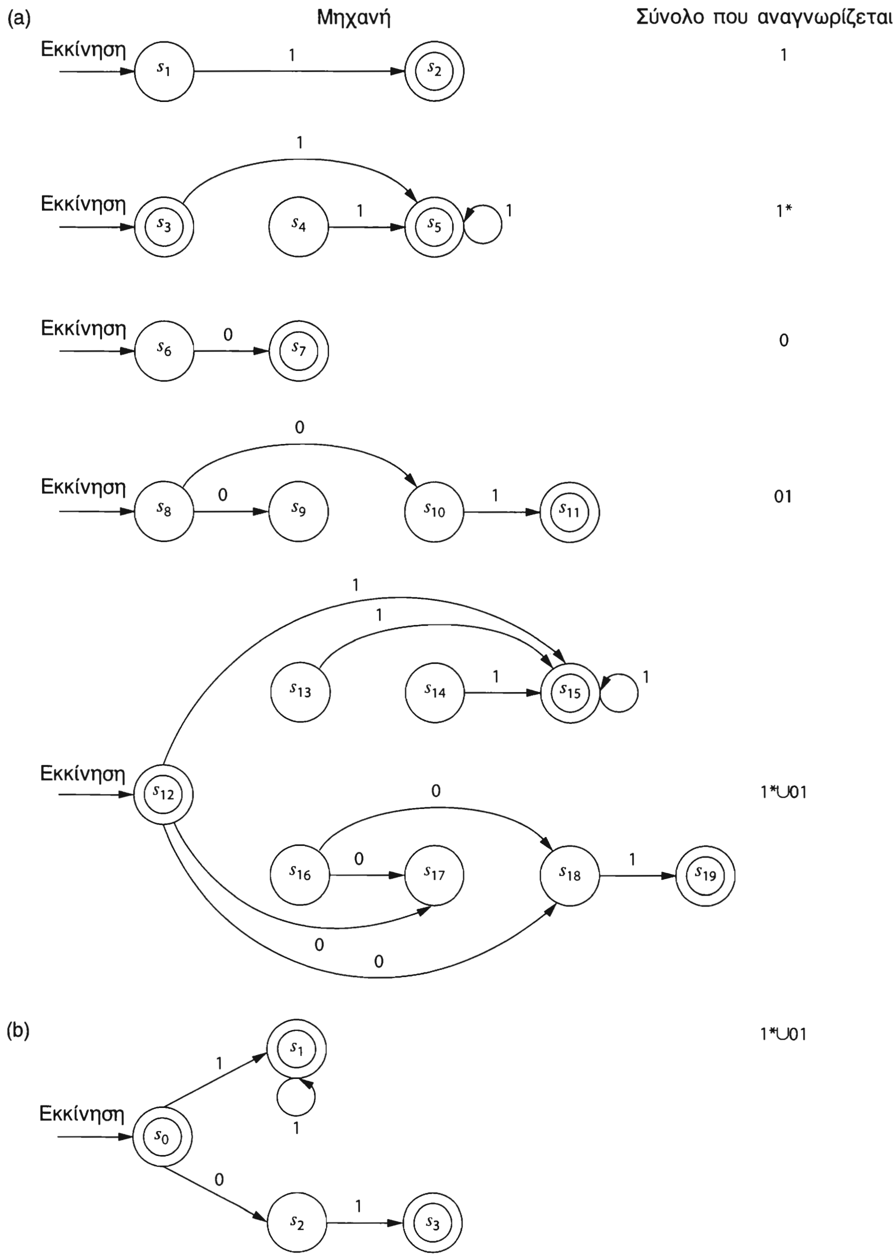
Να κατασκευαστεί μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει το κανονικό σύνολο $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$.

Λύση: Ξεκινούμε με την κατασκευή μηχανής που αναγνωρίζει το $\mathbf{1}^*$. Αυτό γίνεται με χρήση της μηχανής που αναγνωρίζει το $\mathbf{1}$ και ύστερα με χρήση της



ΣΧΗΜΑ 2 Κατασκευή Αυτόματων που Αναγνωρίζουν Αλληλουχίες, Ενώσεις, και Κλειστότητες Kleene.

κατασκευής της M_{A^*} που περιγράφεται στην απόδειξη. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μηχανή που αναγνωρίζει το **01**, με χρήση μηχανών που αναγνωρίζουν το **0** και το **1** και την κατασκευή στην απόδειξη για την M_{AB}. Τέλος, με χρήση της κατασκευής στην απόδειξη για την $M_{A\cup B}$, κατασκευάζουμε την μηχανή για το $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$. Στο Σχήμα 3 φαίνονται τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή αυτή. Οι καταστά-



ΣΧΗΜΑ 3 Μη Αιτιοκρατικά Αυτόματα Πεπερασμένης Κατάστασης που Αναγνωρίζουν το $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$.

σεις στις διαδοχικές μηχανές έχουν ονομαστεί με χρήση διαφορετικών δεικτών, ακόμη και όταν κατάσταση σχηματίζεται από κατάσταση που έχει χρησιμοποιηθεί προηγούμενα από άλλη μηχανή. Σημειώνουμε ότι η κατασκευή που δίνεται εδώ δεν δίνει την απλούστερη μηχανή που αναγνωρίζει το $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$. Στο Σχήμα 3(b) φαίνεται μια πολύ απλούστερη μηχανή που αναγνωρίζει αυτό το σύνολο.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΕΣ

Στην Παράγραφο 11.1 παρουσιάσαμε γραμματικές δομής φράσεων και δώσαμε τον ορισμό για διαφορετικά είδη από γραμματικές. Ειδικότερα, ορίσαμε τις κανονικές γραμματικές, ή γραμματικές τύπου 3, που είναι γραμματικές με την μορφή $G = (V, T, S, P)$, όπου κάθε αρχή παραγωγής έχει την μορφή $S \to \lambda$, $A \to a$, ή $A \to aB$, όπου το a είναι τερματικό σύμβολο, και τα A και B είναι μη τερματικά σύμβολα. Οπως δείχνει η ορολογία, υπάρχει στενή σχέση μεταξύ κανονικών γραμματικών και κανονικών συνόλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Σύνολο παράγεται από κανονική γραμματική αν και μόνο αν είναι κανονικό σύνολο.

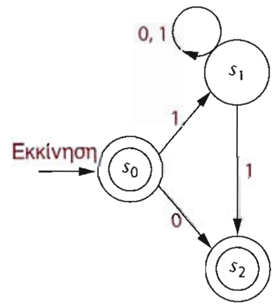
Απόδειξη: Πρώτα δείχνουμε ότι σύνολο που παράγεται από κανονική γραμματική είναι κανονικό σύνολο. Εστω ότι η $G = (V, T, S, P)$ είναι κανονική γραμματική που παράγει το σύνολο $L(G)$. Για να δείξουμε ότι η $L(G)$ είναι κανονική θα κατασκευάσουμε μια μη αιτιοκρατική μηχανή πεπερασμένης κατάστασης $M = (S, I, f, s_0, F)$ η οποία αναγνωρίζει την $L(G)$. Εστω ότι το S, το σύνολο των καταστάσεων, περιέχει κατάσταση s_A για κάθε μη τερματικό σύμβολο A της G και μια επιπλέον κατάσταση s_F, που είναι τελική κατάσταση. Η κατάσταση εκκίνησης s_0 είναι η κατάσταση που σχηματίζεται από το σύμβολο εκκίνησης S. Οι μεταβάσεις της M σχηματίζονται από τις αρχές παραγωγής της G με τον εξής τρόπο. Περιλαμβάνεται μετάβαση από την s_A στην s_F με είσοδο a αν η $A \to a$ είναι αρχή παραγωγής και μετάβασης από την s_A στην s_B επί εισόδου α εάν η $A \to aB$ είναι δημιουργία. Το σύνολο των τελικών καταστάσεων περιλαμβάνει την s_F, καθώς και την s_0, αν η $S \to \lambda$ είναι αρχή παραγωγής της G. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η γλώσσα που αναγνωρίζεται από την M είναι ίση με την γλώσσα που αναγνωρίζεται από την γραμματική G, δηλαδή $L(M) = L(G)$. Αυτό γίνεται με προσδιορισμό των λέξεων που οδηγούν σε τελική κατάσταση. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Πριν δώσουμε την απόδειξη του αντίστροφου, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται μη αιτιοκρατική μηχανή, η οποία αναγνωρίζει το ίδιο σύνολο όπως κανονική γραμματική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να κατασκευαστεί μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την γλώσσα που παράγεται από την κανονική γραμματική $G = (V, T, S, P)$, όπου $V = \{0, 1, A, S\}$, $T = \{0, 1\}$ και οι αρχές παραγωγής της P είναι $S \to 1A$, $S \to 0$, $S \to \lambda$, $A \to 0A$, $A \to 1A$, και $A \to 1$.

Λύση: Στο Σχήμα 4 φαίνεται το καταστατικό διάγραμμα για μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την $L(G)$. Αυτό το αυτόματο κατασκευάζεται μετά την διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξη. Στο αυτόματο αυτό, η s_0 είναι η κατάσταση που αντιστοιχεί στο S, s_1 είναι η κατάσταση που αντιστοιχεί στο A, και s_2 είναι η τελική κατάσταση.



ΣΧΗΜΑ 4 Μη αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που αναγνωρίζει την $L(G)$.

Θα ολοκληρώσουμε, τώρα, την απόδειξη του Θεωρήματος 2.

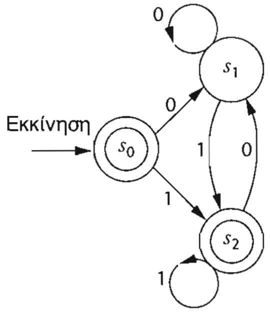
Απόδειξη: Θα δείξουμε, τώρα, ότι αν σύνολο είναι κανονικό, τότε υπάρχει κανονική γραμματική που την παράγει. Εστω ότι η M είναι μηχανή πεπερασμένης κατάστασης, η οποία αναγνωρίζει αυτό το σύνολο με την ιδιότητα ότι η s_0, η κατάσταση εκκίνησης της M, ποτέ δεν είναι η επόμενη κατάσταση μετάβασης. (Σύμφωνα με την Ασκηση 14, μπορούμε να βρούμε παρόμοια μηχανή.) Η γραμματική $G = (V, T, S, P)$ ορίζεται ως εξής. Το σύνολο V συμβόλων της G σχηματίζεται με ανάθεση συμβόλου σε κάθε κατάσταση του S και σε κάθε σύμβολο εισόδου του I. Το σύνολο T τερματικών συμβόλων της G είναι τα σύμβολα της G που σχηματίζονται από τα σύμβολα εισόδου του I. Το σύμβολο εκκίνησης του S είναι το σύμβολο που σχηματίζεται από την κατάσταση εκκίνησης s_0. Το σύνολο P αρχών παραγωγής της G σχηματίζεται από τις μεταβάσεις της M. Ειδικότερα, αν η κατάσταση s μεταφέρεται σε τελική κατάσταση με είσοδο a, τότε η αρχή παραγωγής $A_s \to a$ περιλαμβάνεται στο P, όπου το A_s είναι το μη τερματικό σύμβολο που σχηματίζεται από την κατάσταση s. Αν η κατάσταση s μεταφέρεται στην κατάσταση t με είσοδο a, τότε η δημιουργία $A_s \to aA_t$ περιλαμβάνεται στο P. Η αρχή παραγωγής $S \to \lambda$ περιλαμβάνεται στο P αν και μόνο αν $\lambda \in L(M)$. Επειδή οι αρχές παραγωγής της G αντιστοιχούν στις μεταβάσεις της M και οι αρχές παραγωγής που οδηγούν σε τερματικά αντιστοιχούν σε μεταβάσεις προς τελικές καταστάσεις, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι $L(G) = L(M)$. Αφήνουμε τις λεπτομέρειες σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Το Παράδειγμα 4 δείχνει την κατασκευή που χρησιμοποιείται για δημιουργία γραμματικής από αυτόματο που γεννάει την γλώσσα που αναγνωρίζεται από αυτό το αυτόματο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθεί κανονική γραμματική που παράγει το κανονικό σύνολο που αναγνωρίζεται από το αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης που φαίνεται στο Σχήμα 5.

Λύση: Η γραμματική $G=(V,T,S,P)$ παράγει το σύνολο που αναγνωρίζεται από αυτό το αυτόματο όπου $V=\{S,A,B,0,1\}$, όπου τα σύμβολα S, A, και B αντιστοιχούν στις καταστάσεις s_0, s_1, και s_2, αντίστοιχα, $T=\{0, 1\}$, S είναι το σύμβολο εκκίνησης και οι αρχές παραγωγής είναι $S \to 0A$, $S \to 1B$, $S \to 1$, $S \to \lambda$, $A \to 0A$, $A \to 1B$, $A \to 1$, $B \to 0A$, $B \to 1B$, και $B \to 1$.



ΣΧΗΜΑ 5 Αυτόματο Πεπερασμένης Κατάστασης.

ΣΥΝΟΛΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΑΓΝΩΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

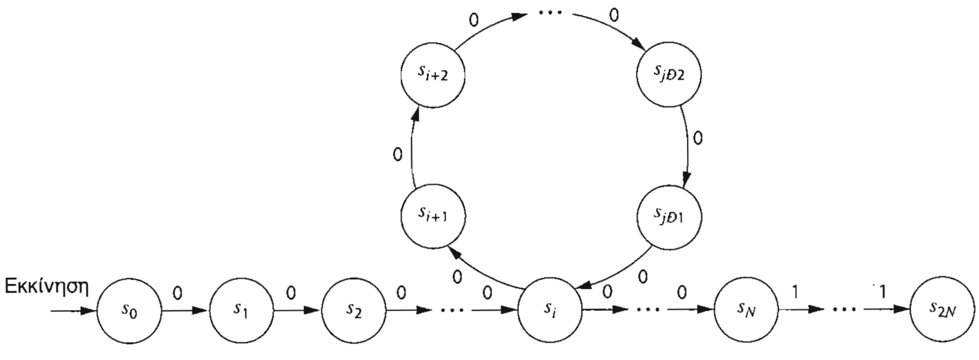
Είδαμε ότι σύνολο αναγνωρίζεται από αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης αν και μόνο αν είναι κανονικό. Θα δείξουμε, τώρα, ότι υπάρχουν σύνολα που δεν είναι κανονικά με περιγραφή ενός τέτοιου συνόλου. Η τεχνική που χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι αυτό το σύνολο δεν είναι κανονικό αποτελεί μια σημαντική μέθοδο για να δείχνεται ότι ορισμένα σύνολα δεν είναι κανονικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να δειχτεί ότι το σύνολο $\{0^n1^n \mid n=0,1,2,\dots\}$, που αποτελείται από όλες τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από ομάδα με 0 που ακολουθείται από ομάδα ίσου πλήθους από 1, δεν είναι κανονικό.

Λύση: Εστω ότι αυτό το σύνολο ήταν κανονικό. Τότε θα υπήρχε αιτιοκρατικό αυτόματο πεπερασμένης κατάστασης $M=(S,I,f,s_0,F)$ που θα το αναγνώριζε. Εστω ότι N είναι το πλήθος καταστάσεων αυτής της μηχανής, δηλαδή, $N=|S|$. Επειδή η M αναγνωρίζει όλες τις συμβολοσειρές που αποτελούνται από πλήθος από 0 που ακολουθείται από ίσο πλήθος από 1, η M πρέπει να αναγνωρίζει την 0^N1^N. Εστω ότι $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{2N}$ είναι η ακολουθία καταστάσεων που λαμβάνουμε, αν ξεκινήσουμε από την s_0 και χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα της 0^N1^N σαν είσοδο, έτσι ώστε να είναι $s_1=f(s_0,0)$, $s_2=f(s_1,0)$, ..., $s_N=f(s_{N-1},0)$, $s_{N+1}=f(s_N,1)$, ..., $s_{2N}=f(s_{2N-1},1)$. Σημειώνουμε ότι η s_{2N} είναι τελική κατάσταση.

Επειδή υπάρχουν μόνο N καταστάσεις, η αρχή του περιστερώνα δείχνει ότι τουλάχιστον δύο από τις πρώτες $N+1$ από τις καταστάσεις, που είναι οι $s_0, \dots, s_N$, θα πρέπει να είναι ίδιες. Εστω ότι οι s_i και s_j είναι δύο τέτοιες ίδιες καταστάσεις, με $0 \le i \le j \le N$. Αυτό σημαίνει ότι $f(s_i, 0^t)=s_j$ όπου



ΣΧΗΜΑ 6 Η Διαδρομή που Δημιουργείται από την 0^N1^N.

$t = i - j$. Επεται ότι υπάρχει βρόχος που οδηγεί από την s_i πίσω στον εαυτό της, που λαμβάνεται με χρήση της εισόδου 0 συνολικά t φορές, στο καταστατικό διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 6.

Ας εξετάσουμε, τώρα, την συμβολοσειρά εισόδου $0^N0^t1^N = 0^{N+t}1^N$. Υπάρχουν t επιπλέον διαδοχικά 0 στην αρχή αυτής της ομάδας απ' ότι διαδοχικά 1 μετά από αυτήν. Επειδή αυτή η συμβολοσειρά δεν έχει την μορφή 0^n1^n (επειδή έχει περισσότερα 0 από 1), δεν αναγνωρίζεται από την M. Κατά συνέπεια, η $f(s_0, 0^{N+t}1^N)$ δεν μπορεί να είναι τελική κατάσταση. Ωστόσο, όταν χρησιμοποιούμε σαν είσοδο την συμβολοσειρά $0^{N+t}1^N$, τελειώνουμε στην ίδια κατάσταση όπως και πριν, δηλαδή στην s_{2N}. Η αιτία γι' αυτό είναι ότι τα επιπλέον t 0 στην συμβολοσειρά αυτή, μας κινούν στον βρόχο από την s_i πίσω στον εαυτό της ακόμη μια φορά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Τότε, το υπόλοιπο της συμβολοσειράς μας οδηγεί ακριβώς στην ίδια κατάσταση όπως πριν. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι η $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ δεν είναι κανονική.

ΙΣΧΥΡΟΤΕΡΑ ΕΙΔΗ ΜΗΧΑΝΩΝ

Τα αυτόματα πεπερασμένης κατάστασης δεν μπορούν να πραγματοποιούν πολλούς υπολογισμούς. Ο κύριος περιορισμός αυτών των μηχανών είναι η πεπερασμένη ποσότητα μνήμης τους. Το γεγονός αυτό δεν τις επιτρέπει να αναγνωρίζουν γλώσσες που δεν είναι κανονικές, όπως η $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Επειδή σύνολο είναι κανονικό αν και μόνο αν είναι η γλώσσα που παράγεται από κανονική γραμματική, το Παράδειγμα 5 δείχνει ότι δεν υπάρχει κανονική γραμματική που παράγει το σύνολο $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Υπάρχει, ωστόσο, γραμματική ελεύθερη συμφραζομένων που αναγνωρίζει αυτό το σύνολο. Τέτοια γραμματική δώσαμε στο Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 11.1.

Εξαιτίας των περιορισμών των μηχανών πεπερασμένης κατάστασης, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε άλλα, ισχυρότερα, μοντέλα υπολογισμών. Ενα τέτοιο μοντέλο είναι το **αυτόματο στοίβας**. Αυτόματο στοίβας περιλαμβάνει όλα όσα