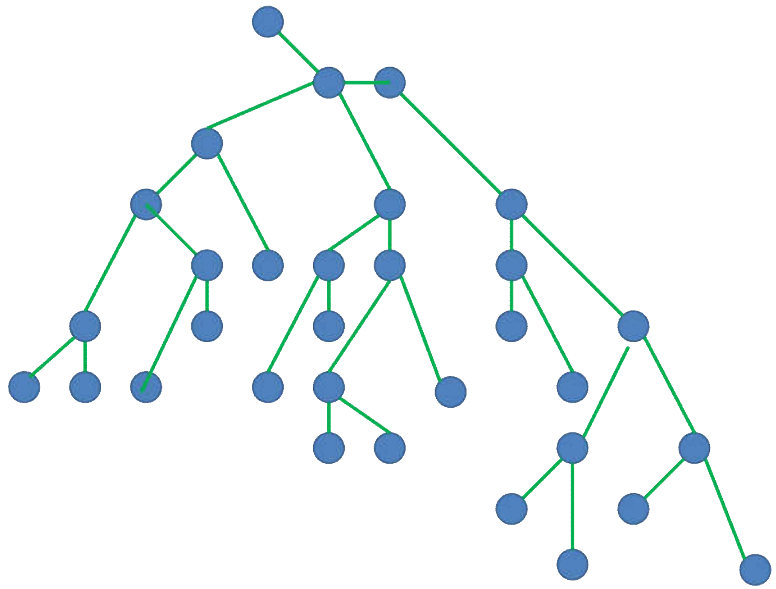
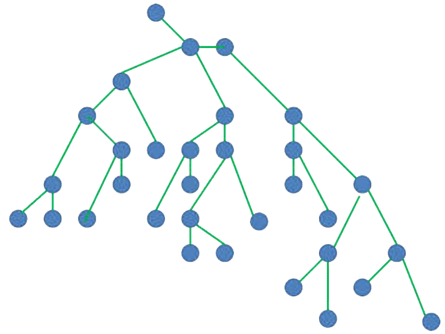


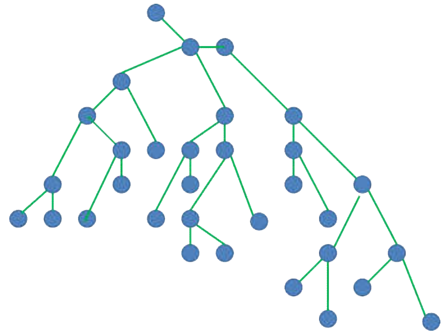
Δένδρα

Δένδρα

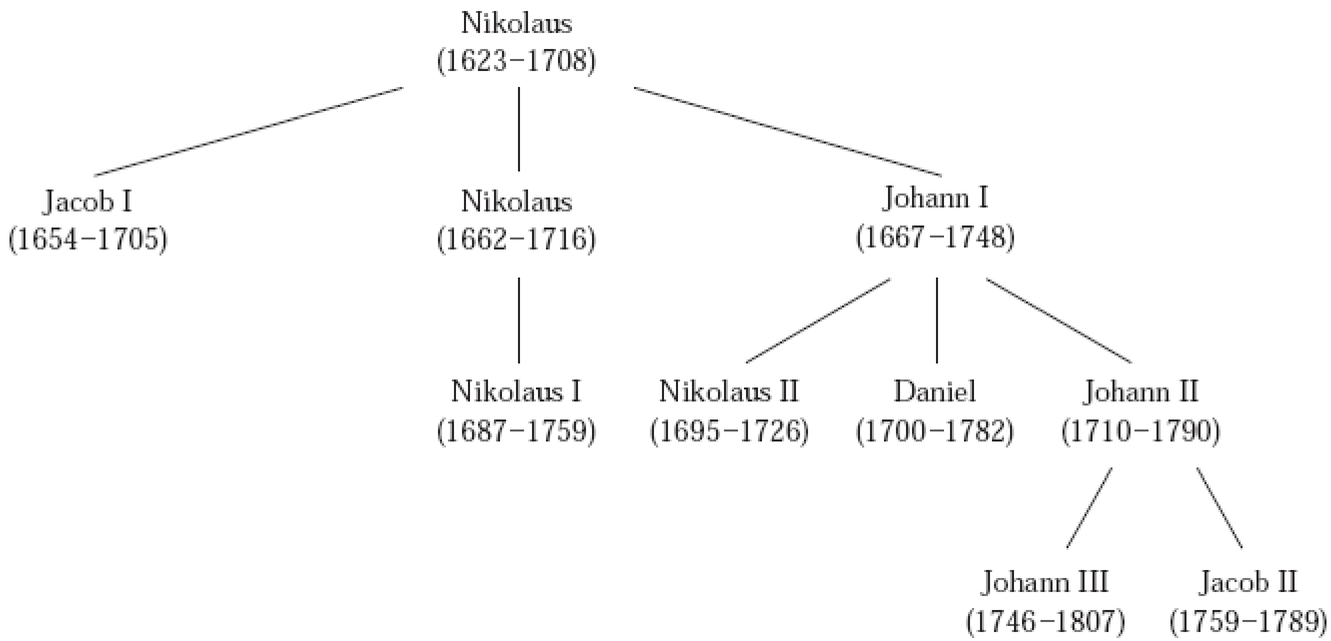


- Ειδική κατηγορία γραφημάτων: συνεκτικά γραφήματα που δεν περιέχουν απλά κυκλώματα
- [1857] Arthur Cayley: για απαρίθμηση ορισμένων ειδών χημικών ενώσεων
- Χρησιμοποιούνται σε πληθώρα προβλημάτων, όπως:
  - Εντοπισμός αντικειμένων σε λίστα
  - Κωδικοποίηση (π.χ., Huffman) για κατασκευή αποδοτικών κωδίκων για μετάδοση και αποθήκευση δεδομένων
  - Μελέτη παιχνιδιών (π.χ., ντάμα, σκάκι, κτλ) για καθορισμό νικητήριων στρατηγικών
  - Κατασκευή μοντέλων διαδικασιών που εκτελούνται με χρήση σειράς αποφάσεων
  - Συστηματική εξερεύνηση κορυφών γραφημάτων: αναζήτηση κατά πλάτος (breadth-first search) και κατά βάθος (depth-first search)
  - …

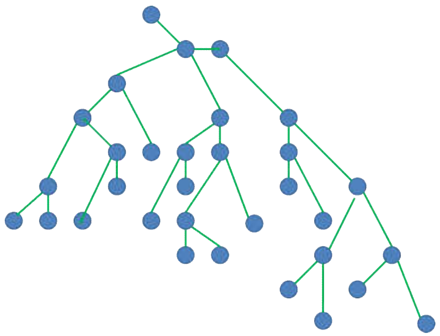
Δένδρα



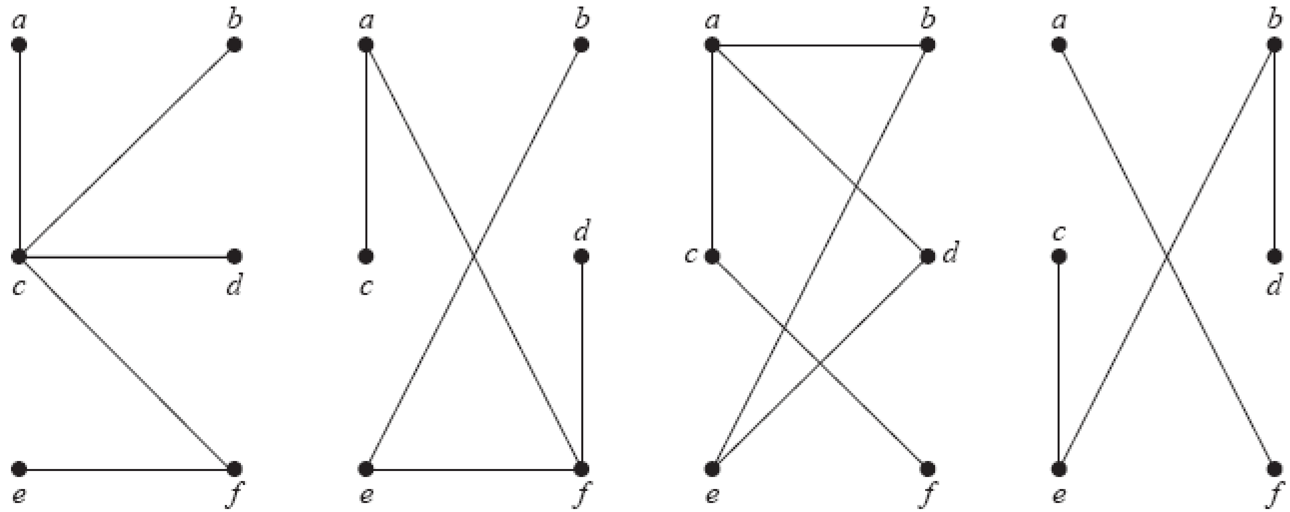
- συνεκτικό
- μη κατευθυνόμενο γράφημα
- που δεν περιέχει απλά κυκλώματα



Δένδρα

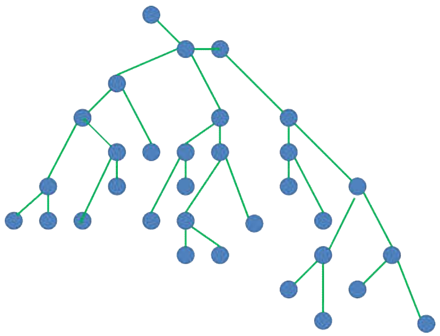


- συνεκτικό
- μη κατευθυνόμενο γράφημα
- που δεν περιέχει απλά κυκλώματα

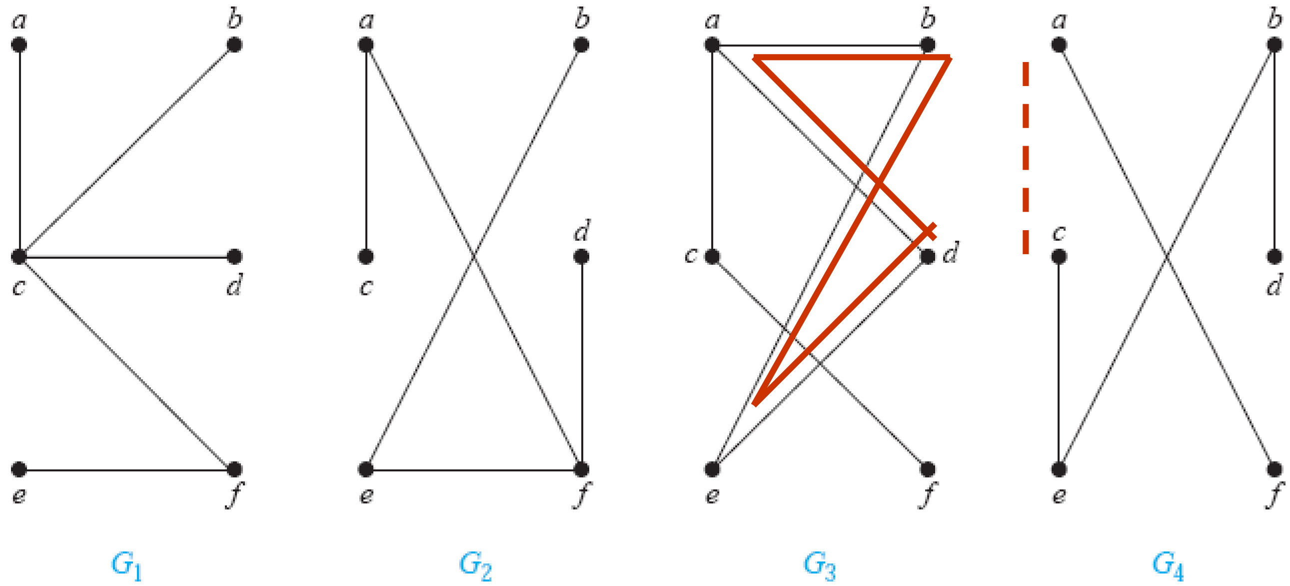


G_1 G_2 G_3 G_4

Δένδρα

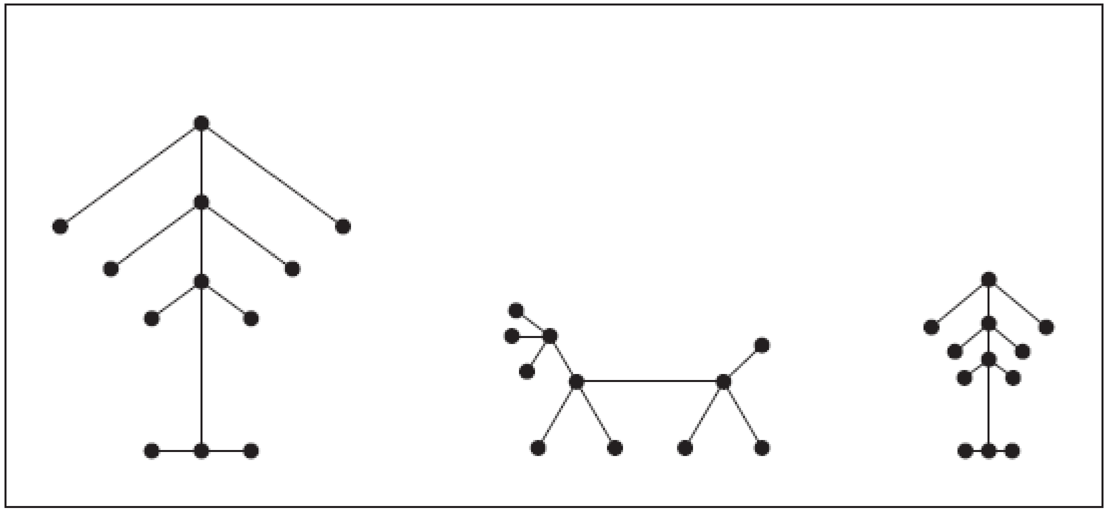


- συνεκτικό
- μη κατευθυνόμενο γράφημα
- που δεν περιέχει απλά κυκλώματα



Δάση

- Γραφήματα που δεν περιέχουν απλά κυκλώματα ΑΛΛΑ μπορεί να μην είναι συνεκτικά
  - Κάθε μια από τις συνεκτικές τους συνιστώσες είναι δένδρο

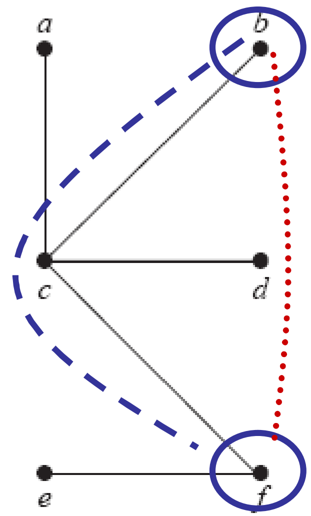


Ένα γράφημα με 3 συνεκτικές συνιστώσες

Μη κατευθυνόμενο γράφημα Τ είναι δένδρο ⇔ υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ 2 οποιωνδήποτε κορυφών του

Απόδειξη (μέρος Ι)

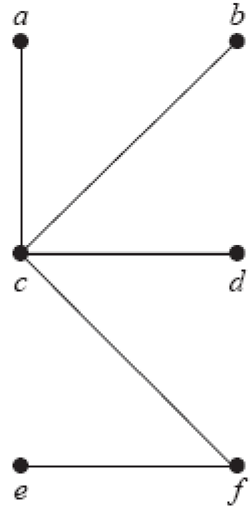
- Αν Τ δένδρο ⇒ Τ συνεκτικό γράφημα χωρίς απλά κυκλώματα
- Έστω ότι x και y κορυφές του Τ
- Επειδή Τ συνεκτικό ⇒ υπάρχει απλό μονοπάτι μεταξύ των x και y
- Το μονοπάτι αυτό είναι μοναδικό
  - Αν ΔΕΝ ήταν θα δημιουργούταν κύκλωμα



Μη κατευθυνόμενο γράφημα T είναι δένδρο ⇔ υπάρχει μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ 2 οποιωνδήποτε κορυφών του

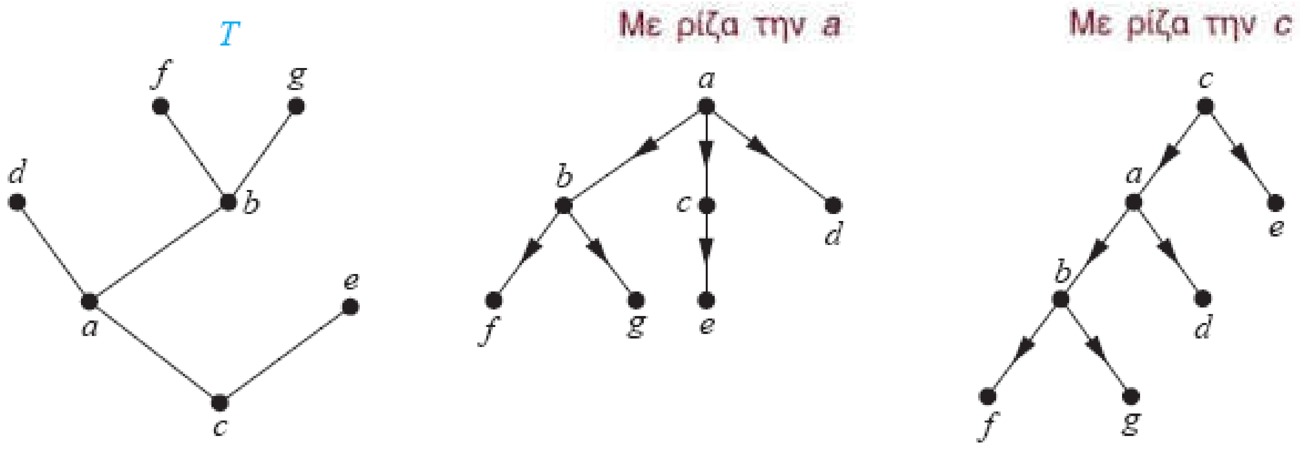
Απόδειξη (μέρος ΙΙ)

- Αν υπάρχει μοναδικό μονοπάτι μεταξύ 2 οποιωνδήποτε κορυφών του T ⇒ T συνεκτικό αφού υπάρχει διαδρομή μεταξύ οποιωνδήποτε 2 κορυφών του
- Επιπλέον, το T δε μπορεί να περιέχει απλά κυκλώματα
  - Αν το T περιείχε απλό κύκλωμα με τις κορυφές x και y ⇒ θα υπήρχαν 2 απλά μονοπάτια μεταξύ των κορυφών αυτών (άτοπο)



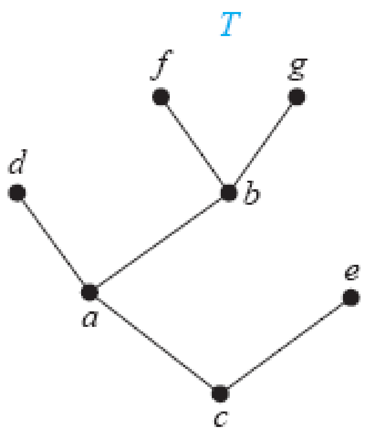
Ριζωμένο δένδρο

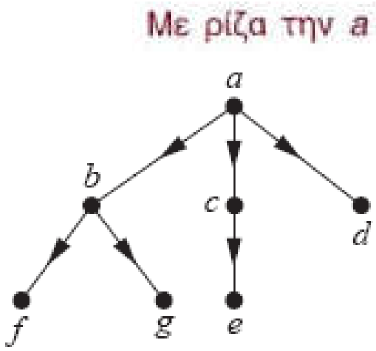
- Ρίζα του δένδρου: μία συγκεκριμένη κορυφή του
- Υπάρχει μοναδικό μονοπάτι από τη ρίζα προς οποιαδήποτε κορυφή του δένδρου ⇒ υπάρχει κατεύθυνση από τη ρίζα προς τις υπόλοιπες κορυφές
- Δένδρο + ρίζα του = κατευθυνόμενο γράφημα που καλείται ριζωμένο δένδρο

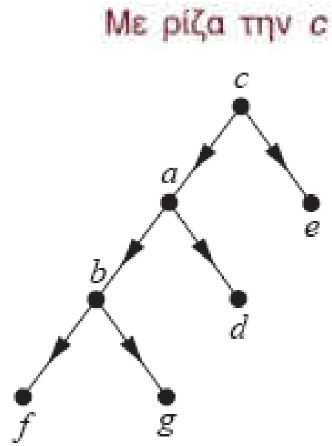


Ριζωμένο δένδρο

- Μπορούμε να αλλάξουμε δένδρο χωρίς ρίζα σε ριζωμένο δένδρο
- Επιλέγοντας διαφορετική ρίζα λαμβάνουμε διαφορετικό ριζωμένο δένδρο
- Κατά το σχεδιασμό:
  - Η ρίζα τοποθετείται στο ψηλότερο σημείο
  - Παραλείπονται τα βέλη γιατί η κατεύθυνση υπονοείται

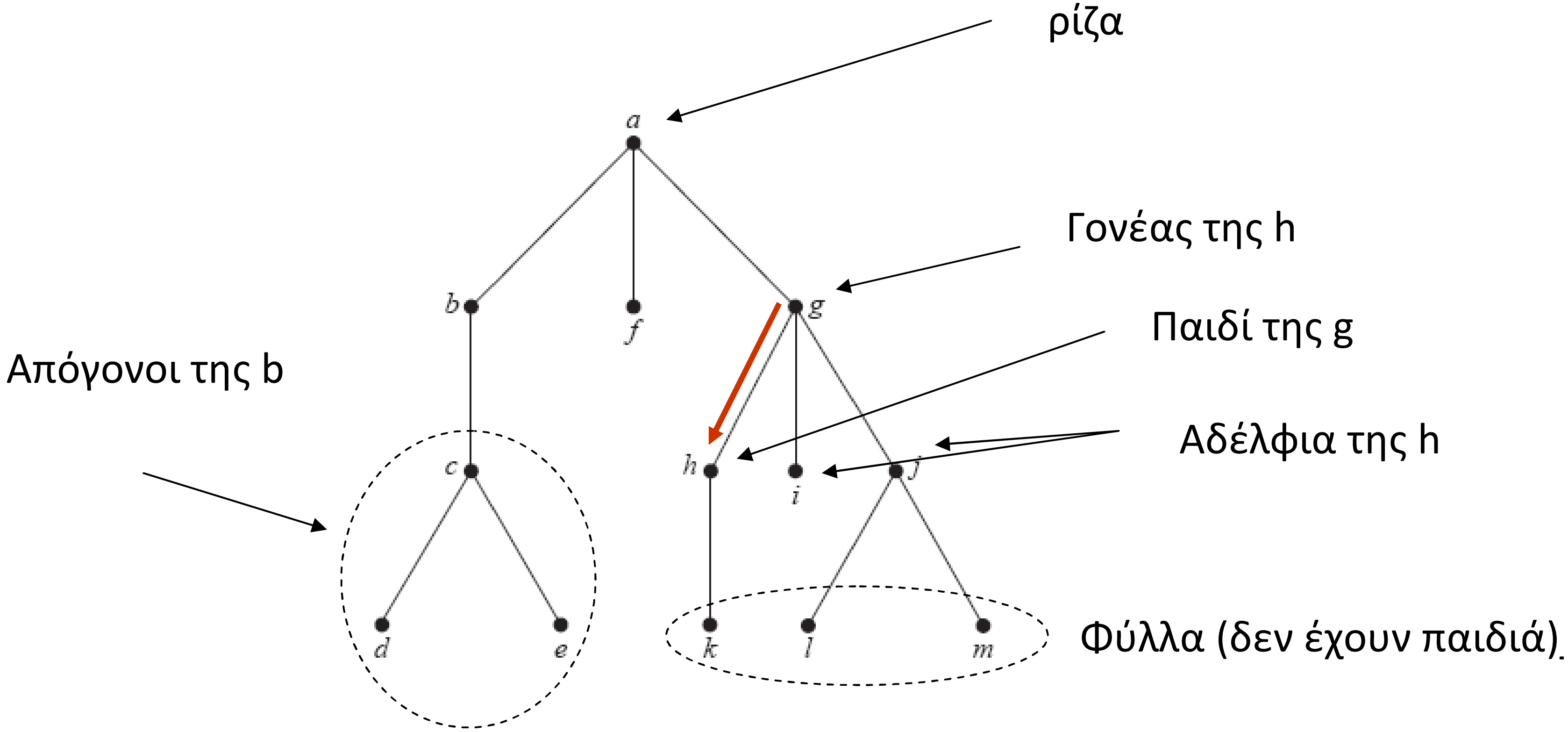






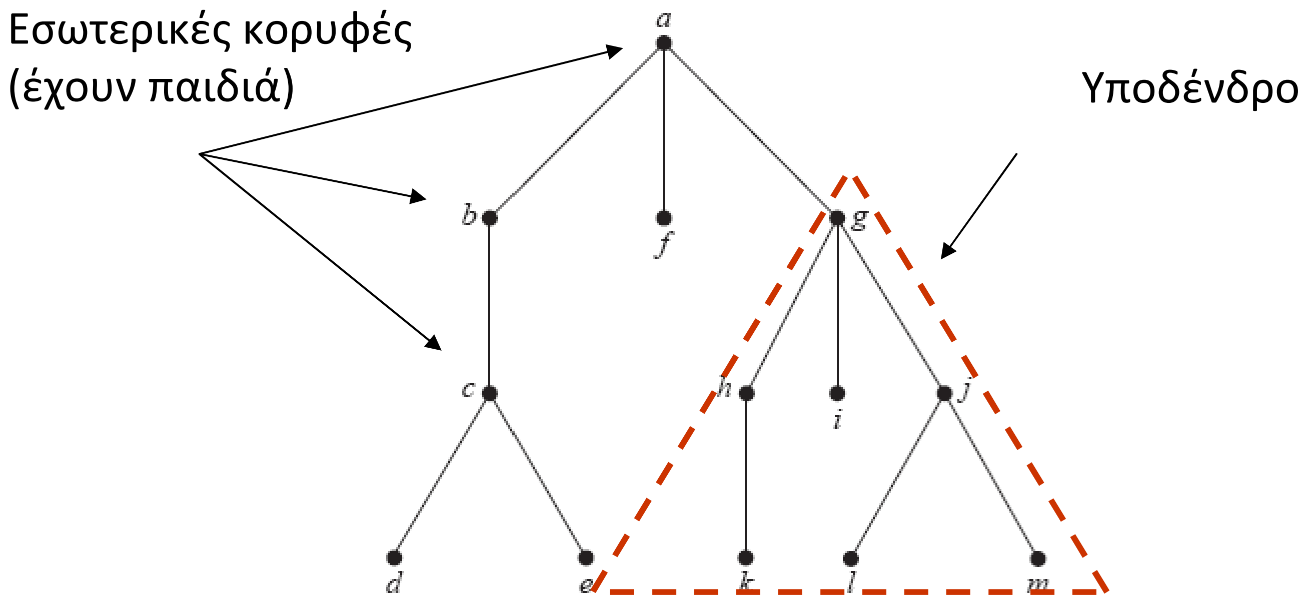
Δένδρα

- Η ορολογία προέρχεται από βοτανική και γενεολογία



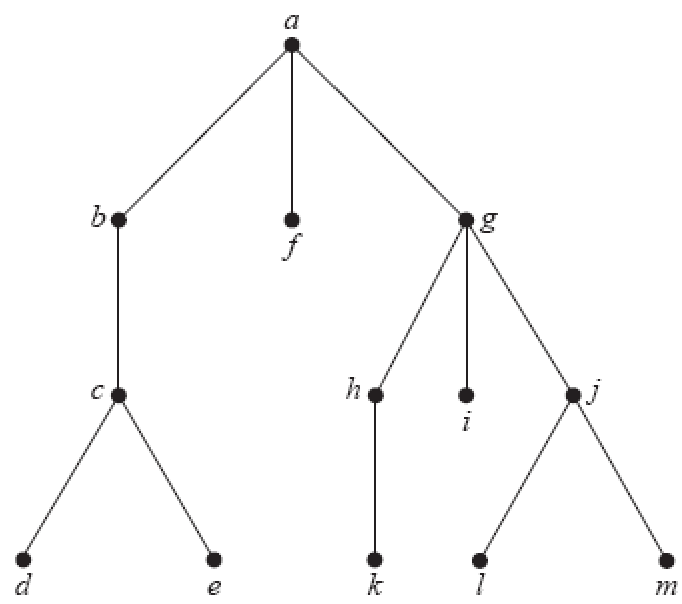
Δένδρα

- Η ορολογία προέρχεται από βοτανική και γενεολογία



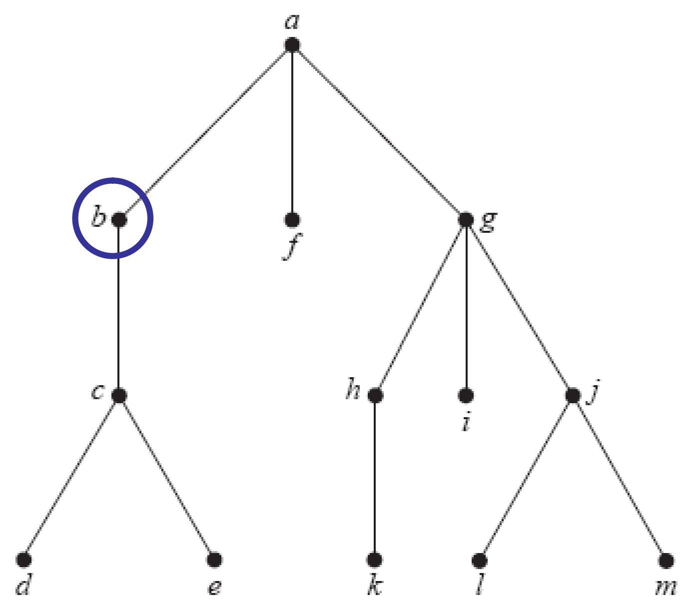
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



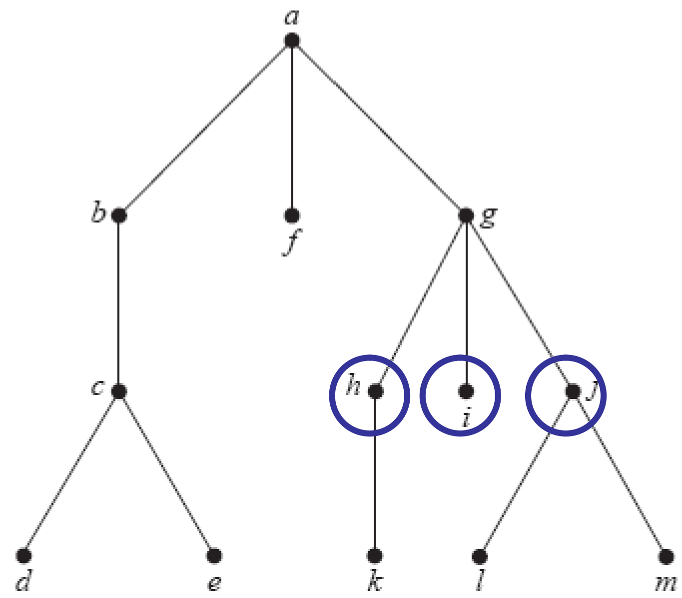
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



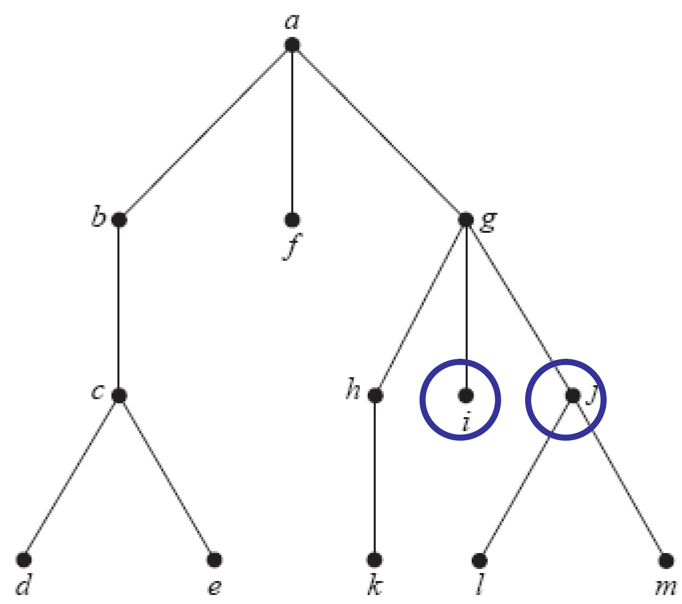
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



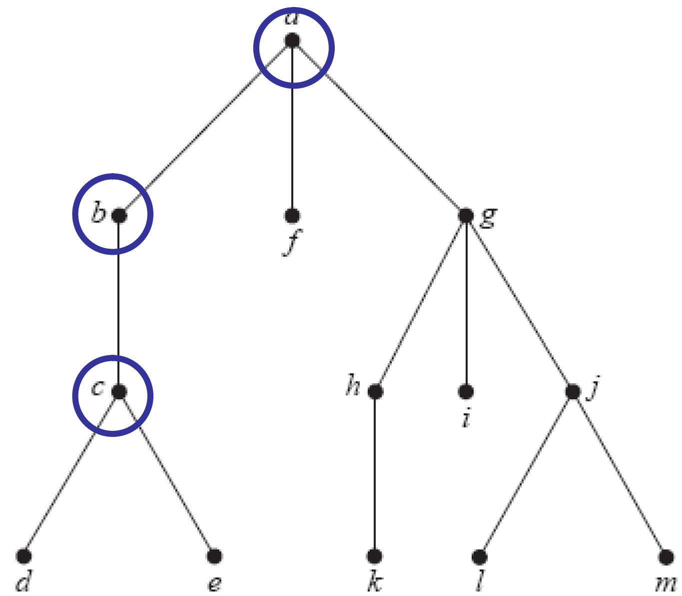
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



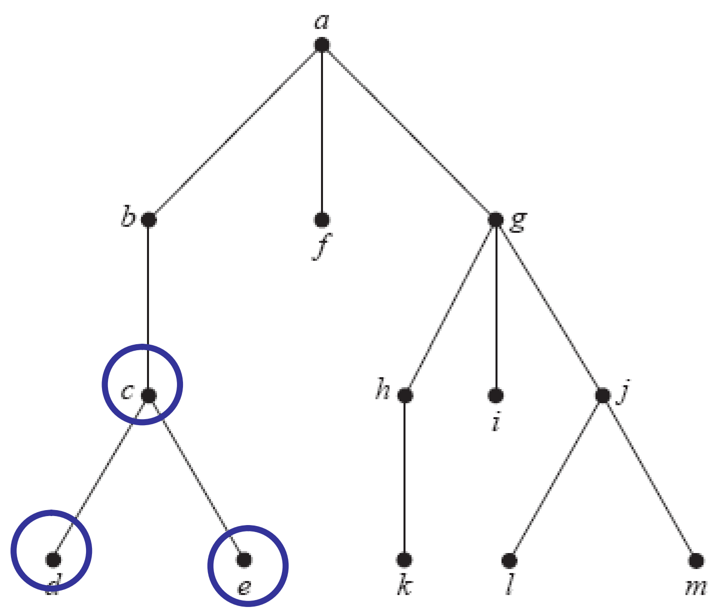
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



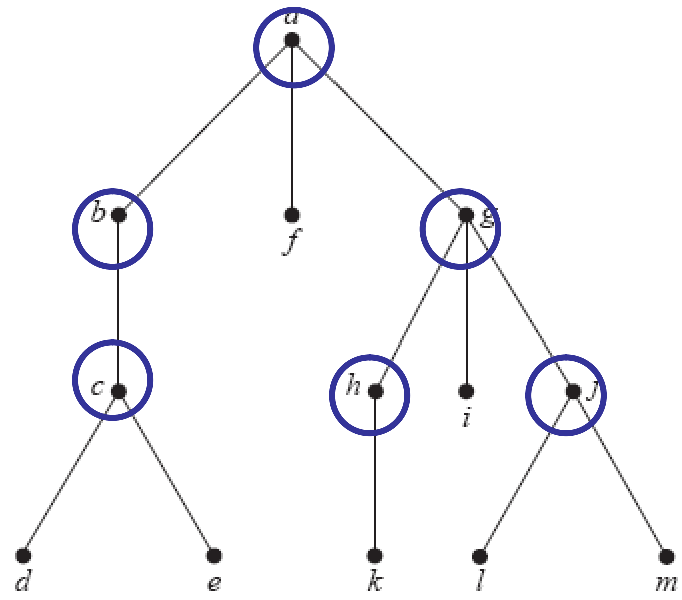
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



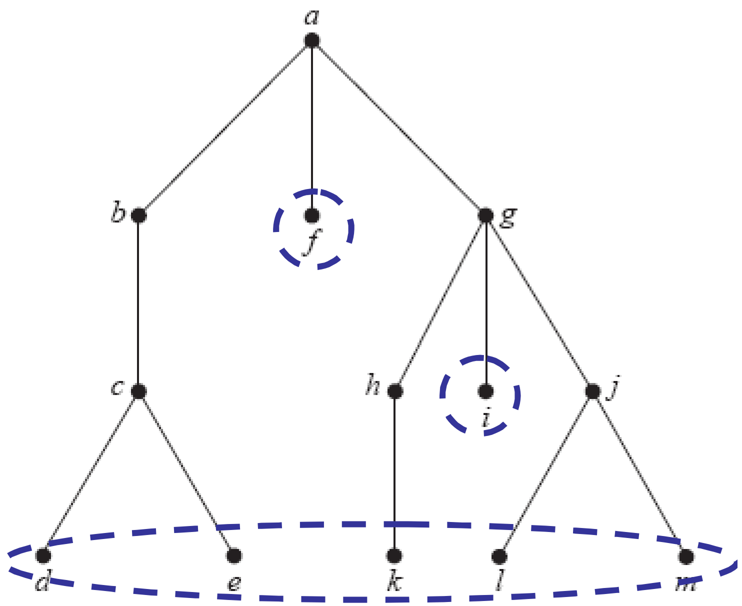
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



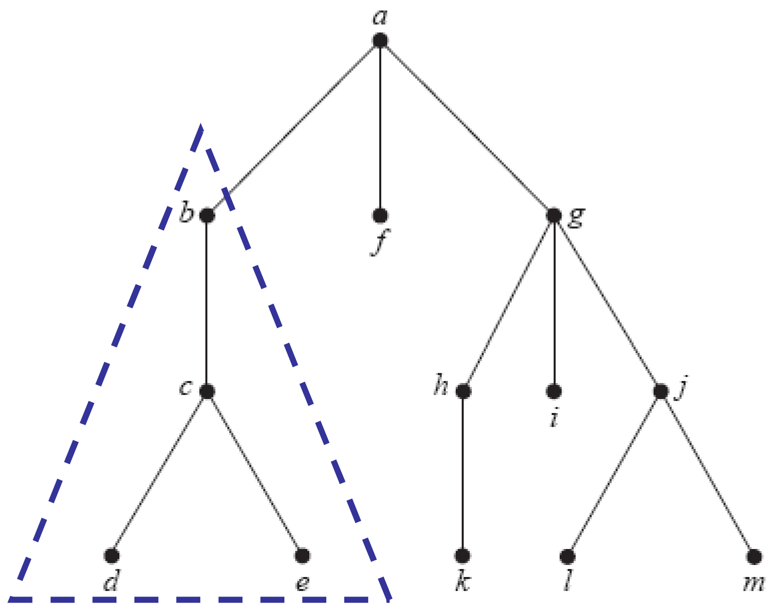
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



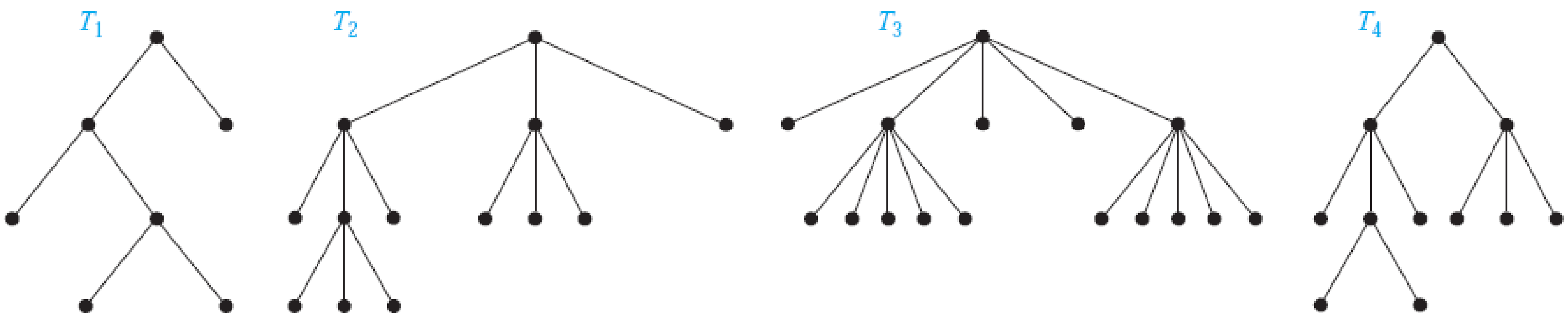
Παράδειγμα

- Να βρεθεί
  - Ο γονέας της c
  - Τα παιδιά της g
  - Τα αδέλφια της h
  - Όλοι οι πρόγονοι της e
  - Όλοι οι απόγονοι της b
  - Όλες οι εσωτερικές κορυφές
  - Όλα τα φύλλα
- Ποιο είναι το υποδένδρο με ρίζα στην κορυφή b;



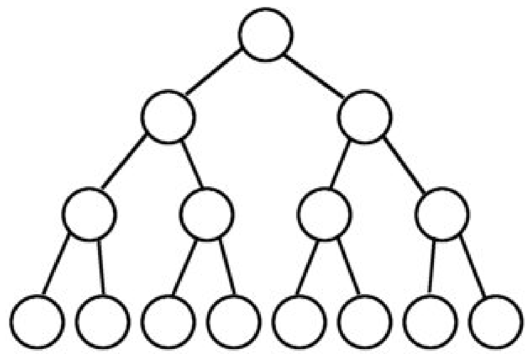
Ριζωμένα δένδρα τάξης m

- Κάθε εσωτερική κορυφή έχει το πολύ m παιδιά
- Το δένδρο ονομάζεται πλήρες αν κάθε εσωτερική κορυφή έχει ακριβώς m παιδιά
  - m=2: πλήρες δυαδικό δένδρο (complete binary tree)



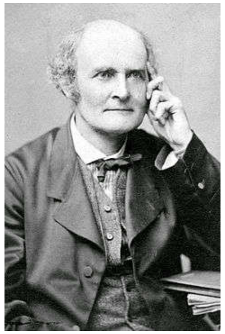
Ριζωμένα δένδρα τάξης m

- Κάθε εσωτερική κορυφή έχει το πολύ m παιδιά
- Το δένδρο ονομάζεται πλήρες αν κάθε εσωτερική κορυφή έχει ακριβώς m παιδιά
  – m=2: πλήρες δυαδικό δένδρο (complete binary tree)



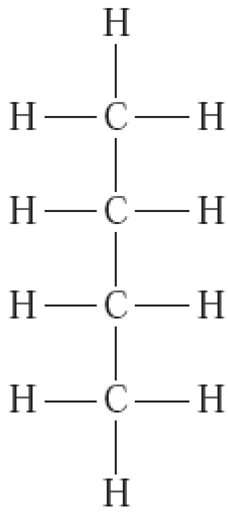
Τα δένδρα ως μοντέλα

- Τα δένδρα χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν ιεραρχία
  – Χημεία
  – Οργανισμοί
  – Σύστημα αρχείων Η/Υ

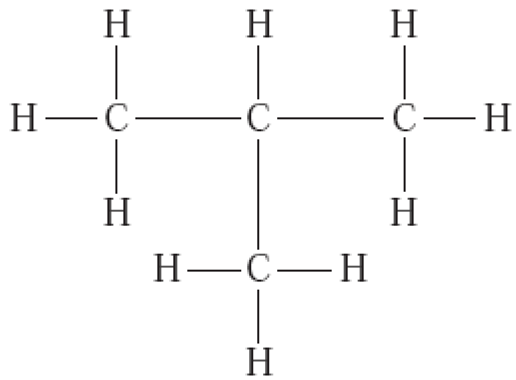


Τα δένδρα ως μοντέλα: χημεία

- [1857] Arthur Cayley (Κέλι)
- Απαρίθμηση των ισομερών χημικών ενώσεων που ονόμασε κορεσμένους υδρογονάνθρακες (C_nH_{2n+2})

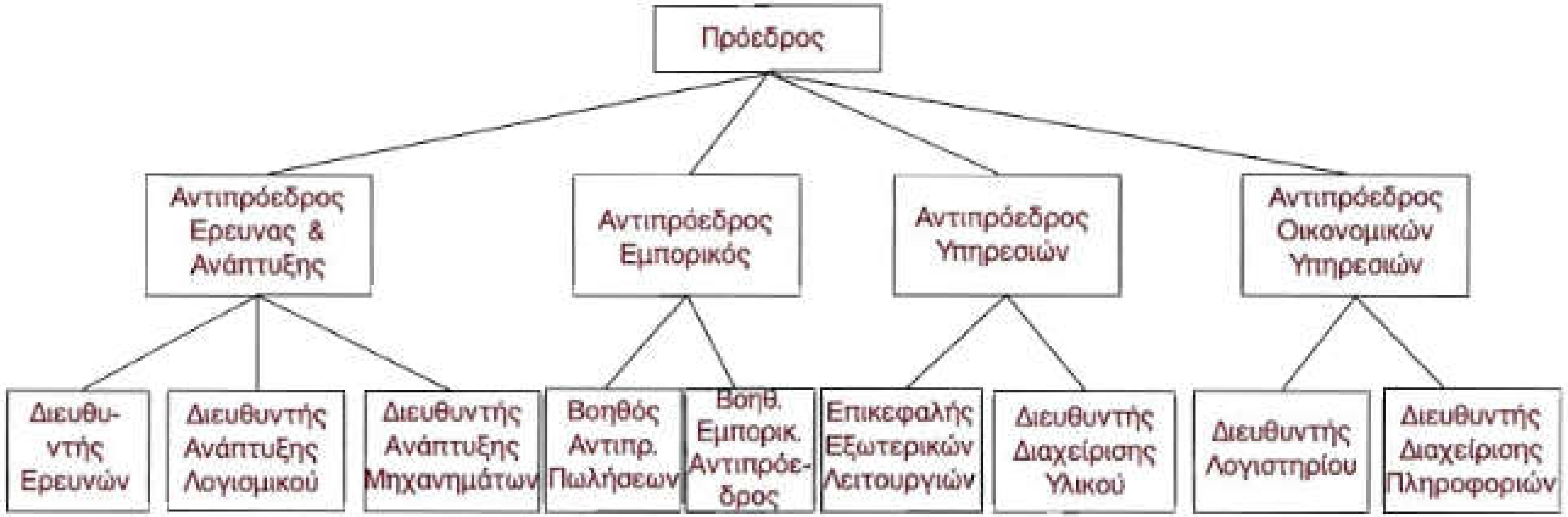


Βουτάνιο

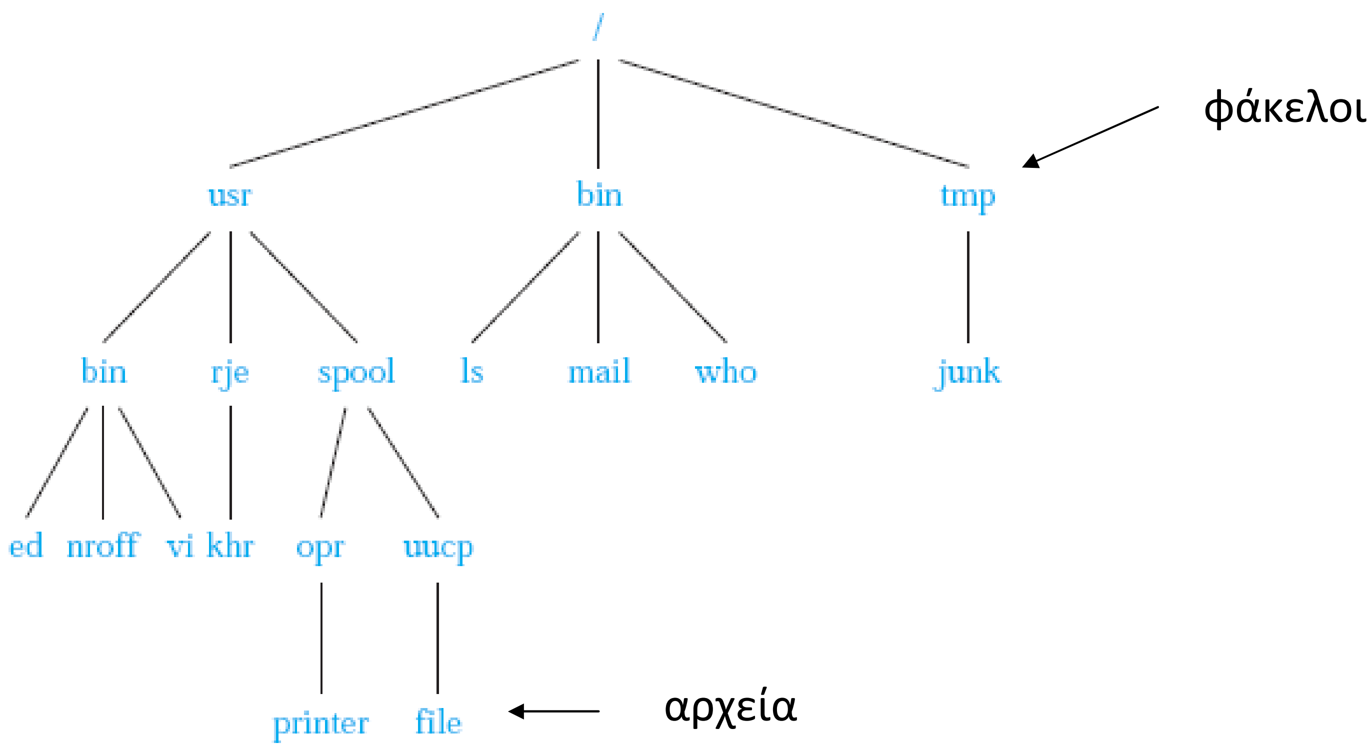


Ισοβουτάνιο

Τα δένδρα ως μοντέλα: παράσταση οργανισμών



Τα δένδρα ως μοντέλα: συστήματα αρχείων Η/Υ



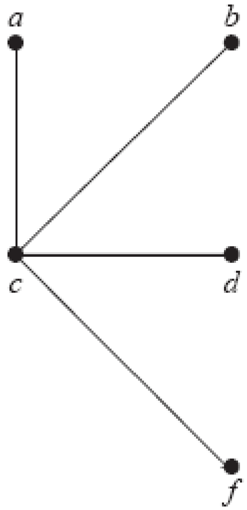
Δένδρο με n κορυφές έχει n-1 ακμές

Απόδειξη με επαγωγή

- ΒΑΣΙΚΟ ΒΗΜΑ: όταν n=1, δένδρο με 1 κορυφή δεν έχει ακμές (άρα πλήθος ακμών = 0)
- ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι ισχύει πως κάθε δένδρο με k κορυφές έχει k-1 ακμές, όπου k θετικός ακέραιος
- ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Έστω δένδρο με k+1 κορυφές. Διαλέγουμε αυθαίρετο φύλλο του και διαγράφουμε το φύλλο αυτό και την ακμή που το συνδέει με το γονέα του
  - $\Rightarrow$ λαμβάνουμε ένα νέο γράφημα με k κορυφές
  - $\Rightarrow$ λόγω Ε.Υ. το γράφημα αυτό θα έχει k-1 ακμές
  - Επιπλέον, το γράφημα αυτό παραμένει συνεκτικό και χωρίς κύκλους
  - $\Rightarrow$ είναι δένδρο
  - Προσθέτοντας ξανά το φύλλο και την ακμή που απομακρύναμε πριν έχουμε δένδρο με k+1 κορυφές και k-1+1=k ακμές

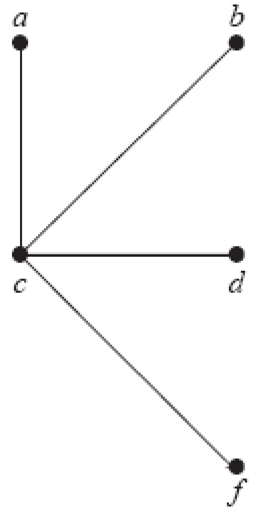
1 κορυφή
0 ακμές

1 κορυφή
0 ακμές

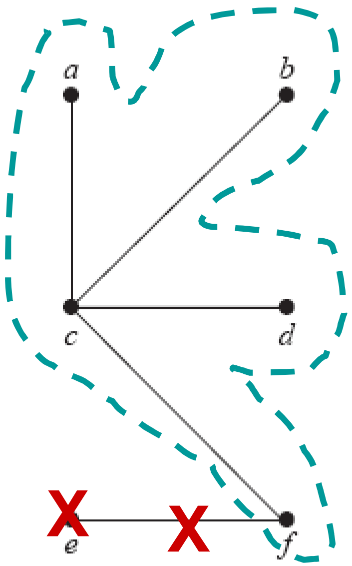


Έστω ότι σε δέντρο με k κορυφές υπάρχουν k-1 ακμές

1 κορυφή
0 ακμές

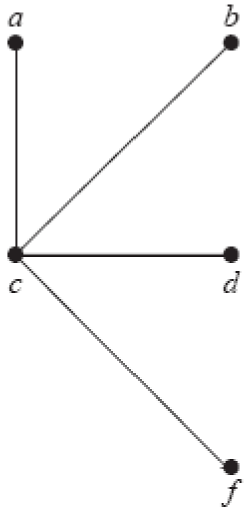


Έστω ότι σε δέντρο με k κορυφές υπάρχουν k-1 ακμές

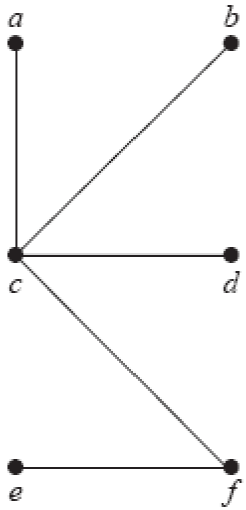


Έστω δένδρο με k+1 κορυφές
Διαλέγουμε αυθαίρετο φύλλο του και διαγράφουμε το φύλλο αυτό και την ακμή που το συνδέει με το γονέα του
Λαμβάνουμε ένα νέο γράφημα με k κορυφές
Το γράφημα αυτό θα έχει k-1 ακμές
Το γράφημα αυτό παραμένει συνεκτικό και χωρίς κύκλους
$\Rightarrow$είναι δένδρο

1 κορυφή
0 ακμές

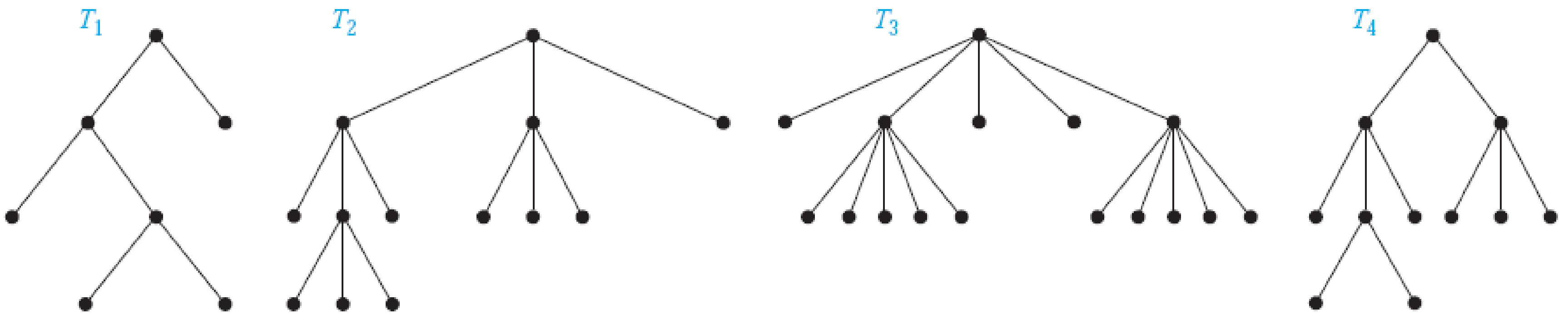


Έστω ότι σε δέντρο με k κορυφές υπάρχουν k-1 ακμές



Έστω δένδρο με k+1 κορυφές
Διαλέγουμε αυθαίρετο φύλλο του και διαγράφουμε το φύλλο αυτό και την ακμή που το συνδέει με το γονέα του
Λαμβάνουμε ένα νέο γράφημα με k κορυφές
Το γράφημα αυτό θα έχει k-1 ακμές
Το γράφημα αυτό παραμένει συνεκτικό και χωρίς κύκλους
⇒είναι δένδρο
Προσθέτοντας ξανά το φύλλο και την ακμή που απομακρύναμε πριν έχουμε δένδρο με k+1 κορυφές και k-1+1=k ακμές

Πλήρες δένδρο τάξης m με i εσωτερικές κορυφές περιέχει n=m*i+1 κορυφές



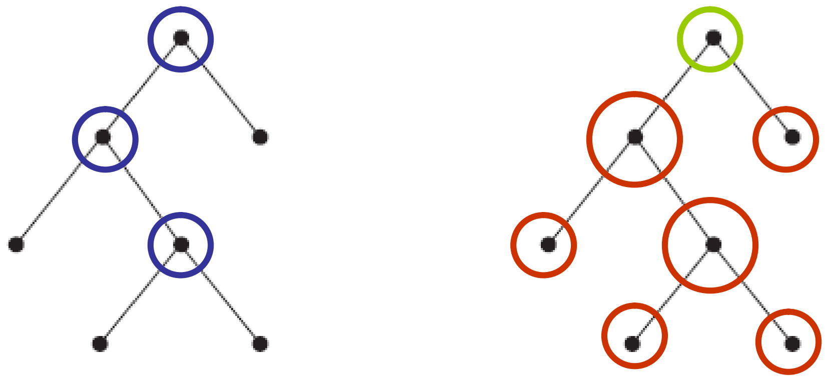
ΓΙΑΤΙ;

Κάθε κορυφή εκτός από τη ρίζα είναι παιδί κάποιας εσωτερικής κορυφής $\Rightarrow$

Υπάρχουν m*i τέτοιες κορυφές + ρίζα = m*i +1 κορυφές συνολικά

Πλήρες δένδρο τάξης m με i εσωτερικές κορυφές περιέχει n=m*i+1 κορυφές

i εσωτερικές κορυφές



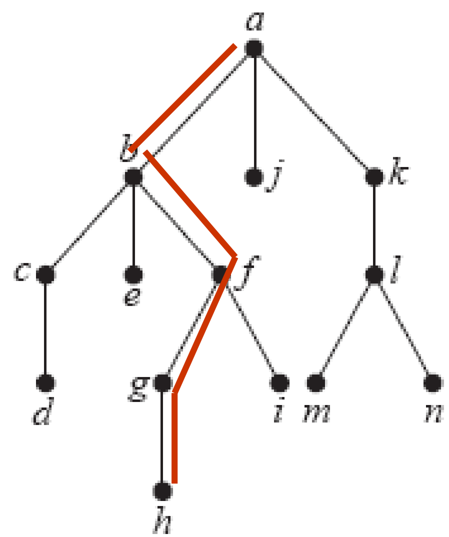
ΓΙΑΤΙ;

Κάθε κορυφή εκτός από τη ρίζα είναι παιδί κάποιας εσωτερικής κορυφής ⇒
Υπάρχουν m*i τέτοιες κορυφές + ρίζα = m*i +1 κορυφές συνολικά

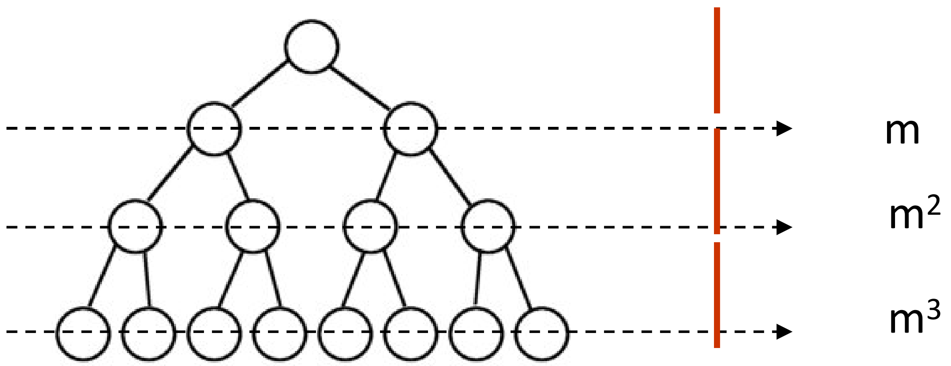
Ύψος δένδρου

- Επίπεδο μιας κορυφής σε ένα ριζωμένο δένδρο: το μήκος της μοναδικής διαδρομής από τη ρίζα προς την κορυφή αυτή
  - Επίπεδο ρίζας = 0
- Ύψος ριζωμένο δένδρου: το μέγιστο των επιπέδων των κορυφών

Ύψος = 4

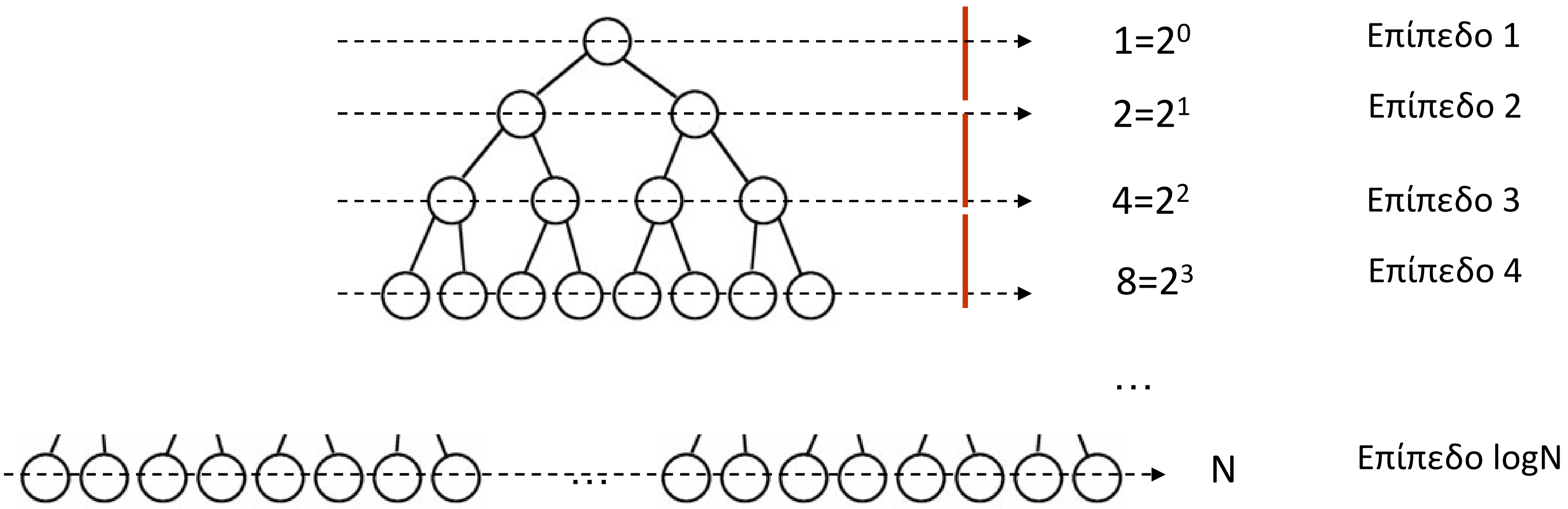


Υπάρχουν το πολύ m^h φύλλα σε δένδρο τάξης m ύψους h



Για πλήρες δυαδικό δένδρο με ύψος h και k φύλλα ισχύει $k=2^h \Leftrightarrow h=\log k$
logk: λογάριθμος του k - σε ποια δύναμη πρέπει να υψώσω το 2 για να πάρω k;
Π.χ., log16=4 γιατί $2^4=16$

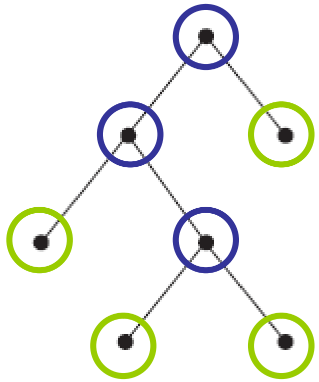
Πλήρες δυαδικό δένδρο με N φύλλα έχει το πολύ 2*N-1 κορυφές



Συνολικά, υπάρχουν 1+2+4+8+…+N κορυφές = $2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{\log N} \Rightarrow$
Έχουμε άθροισμα των logN πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο 2 =
$1-2^{\log N+1}/1-2=2^{\log N+1}-1= 2*2^{\log N}-1=2*N-1$

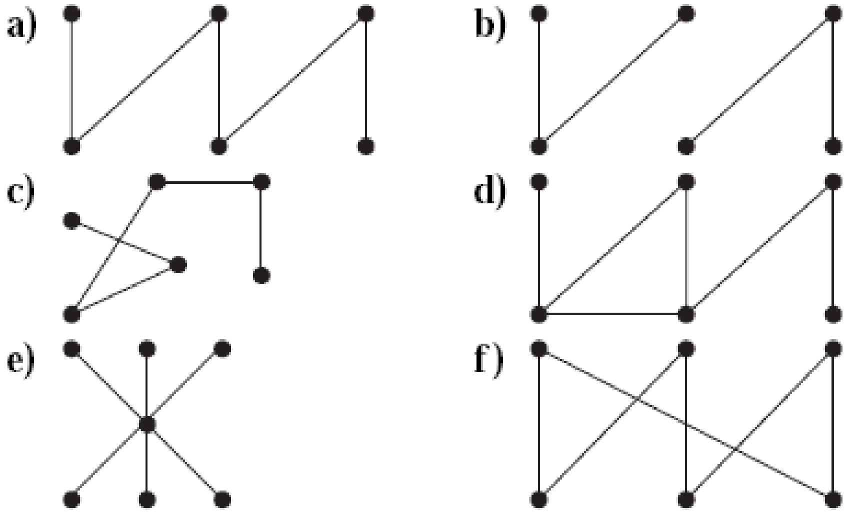
Πλήρες δυαδικό δένδρο με N φύλλα έχει 2*N-1 κορυφές

- n: πλήθος κορυφών
- i: πλήθος εσωτερικών κορυφών
- l: πλήθος φύλλων
- m: τάξη δέντρου

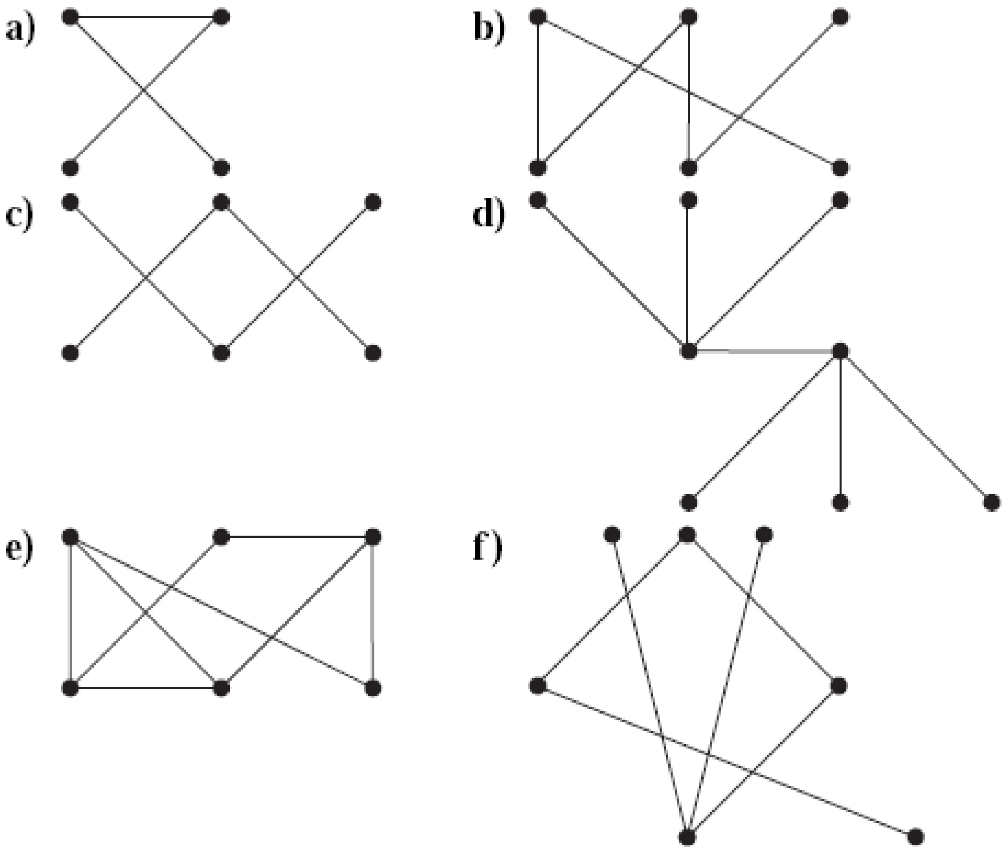


- Ισχύει: $n=i+l=i+N \Rightarrow i=n-N$
- Ισχύει: $n=m*i+1=2*i+1=2(n-N)+1$
- $\Rightarrow n=2n-2N+1 \Rightarrow n=2N-1$

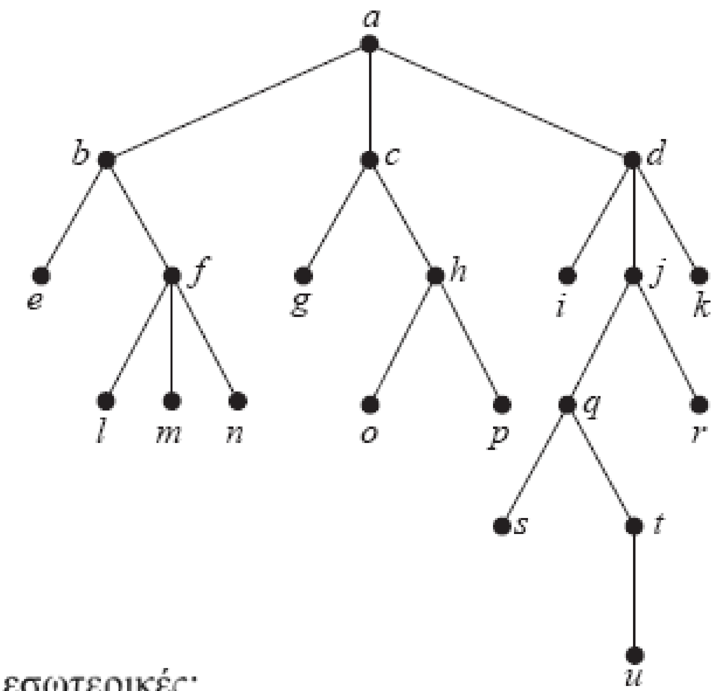
Άσκηση: ποια από τα γραφήματα είναι δένδρα;



Άσκηση: ποια από τα γραφήματα είναι δένδρα;



Άσκηση



a) Ποιά κορυφή είναι ρίζα;

b) Ποιές κορυφές είναι εσωτερικές;

c) Ποιές κορυφές είναι φύλλα;

d) Ποιές κορυφές είναι παιδιά της j;

e) Ποιά κορυφή είναι ο γονέας της h;

f) Ποιές κορυφές είναι αδέλφια της o;

g) Ποιές κορυφές είναι πρόγονοι της m;

h) Ποιές κορυφές είναι απόγονοι της b;

Μήπως το ριζωμένο δένδρο της Ασκησης είναι πλήρες δένδρο τάξης m για κάποιον θετικό ακέραιο m;

Ποιό είναι το επίπεδο κάθε κορυφής του ριζωμένου δένδρου της Ασκησης ;

Άσκηση

- Να αποδειχθεί ότι απλό γράφημα είναι δένδρο αν και μόνον αν είναι συνεκτικό αλλά η διαγραφή οποιασδήποτε ακμής του δίνει γράφημα που δεν είναι συνεκτικό

(α)

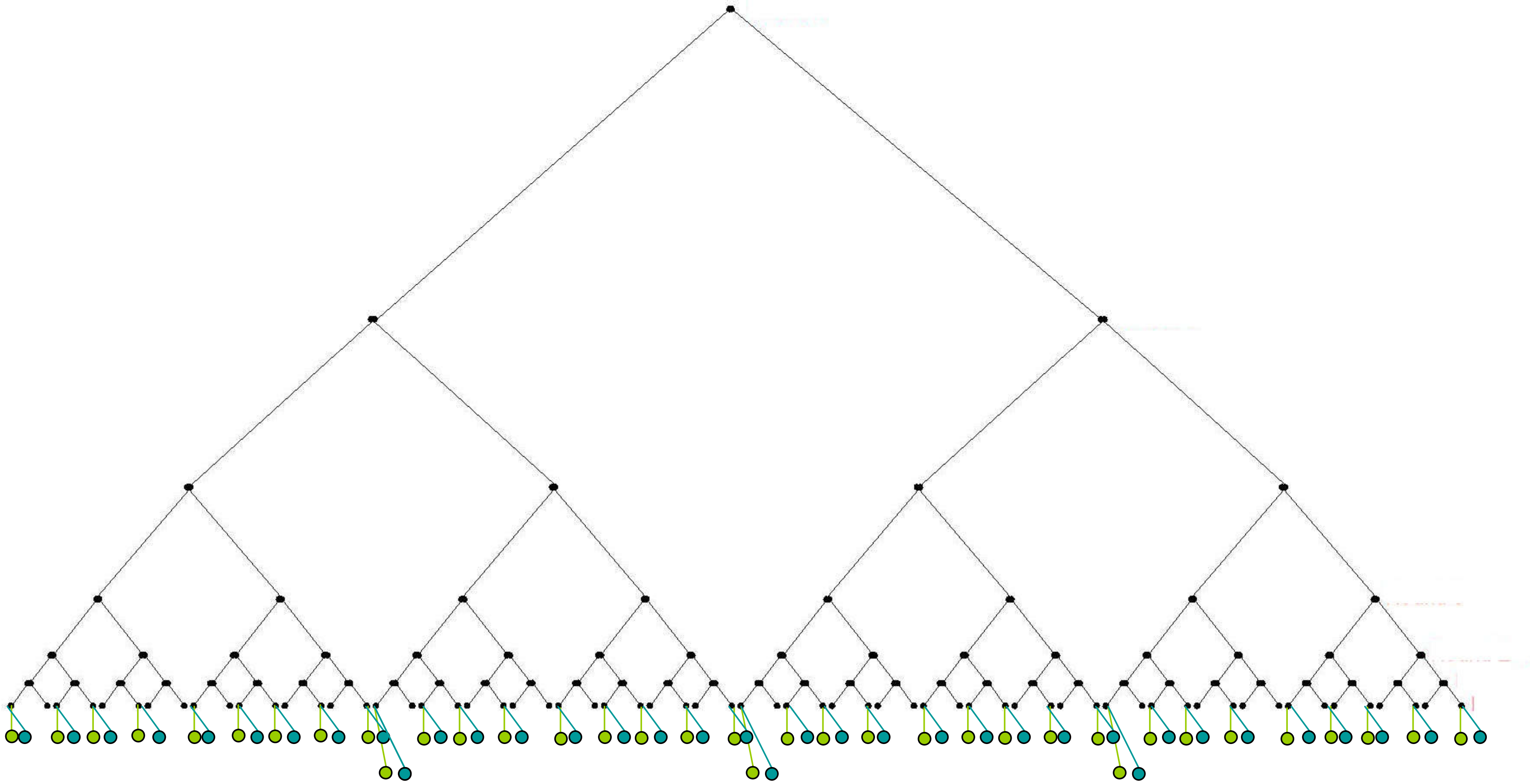
- Αν έχουμε γράφημα που είναι δένδρο ⇒ είναι συνεκτικό και έχει μοναδικό μονοπάτι μεταξύ οποιωνδήποτε 2 κορυφών του
- Απομακρύνοντας 1 αυθαίρετη ακμή ⇒ δεν υπάρχει πλέον μονοπάτι μεταξύ των κορυφών στα άκρα της ακμής αυτής ⇒ το γράφημα που προκύπτει ΔΕΝ είναι πλέον συνεκτικό

(β)

- Έστω ότι έχουμε συνεκτικό γράφημα και η διαγραφή οποιασδήποτε ακμής του δίνει γράφημα που δεν είναι συνεκτικό ⇒ μεταξύ οποιωνδήποτε 2 κορυφών του υπάρχει μοναδικό μονοπάτι ⇒ το εν λόγω γράφημα είναι δένδρο

Ασκήσεις

- Πόσες ακμές έχει δένδρο με 10.000 κορυφές;
- 10.000-1=9.999 ακμές
- Πόσες ακμές έχει πλήρες δένδρο τάξης 5 με 100 εσωτερικές κορυφές;
- 5*100=500 ακμές
- Πόσες ακμές έχει πλήρες δυαδικό δένδρο με 1.000 εσωτερικές κορυφές;
- 2*1.000=2.000 ακμές
- Είτε να σχεδιαστεί πλήρες δυαδικό δένδρο με 100 φύλλα και ύψος 7, είτε να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει αυτό το δένδρο
- μπορεί να κατασκευαστεί το ζητούμενο δένδρο: φτιάχνουμε δέντρο ύψους 6 με τα περισσότερα φύλλα (2^6=64) και διαλέγουμε αυθαίρετα 36 από αυτά και τα κάνουμε εσωτερικές κορυφές



Εφαρμογές: δένδρα δυαδικής αναζήτησης (binary search trees)

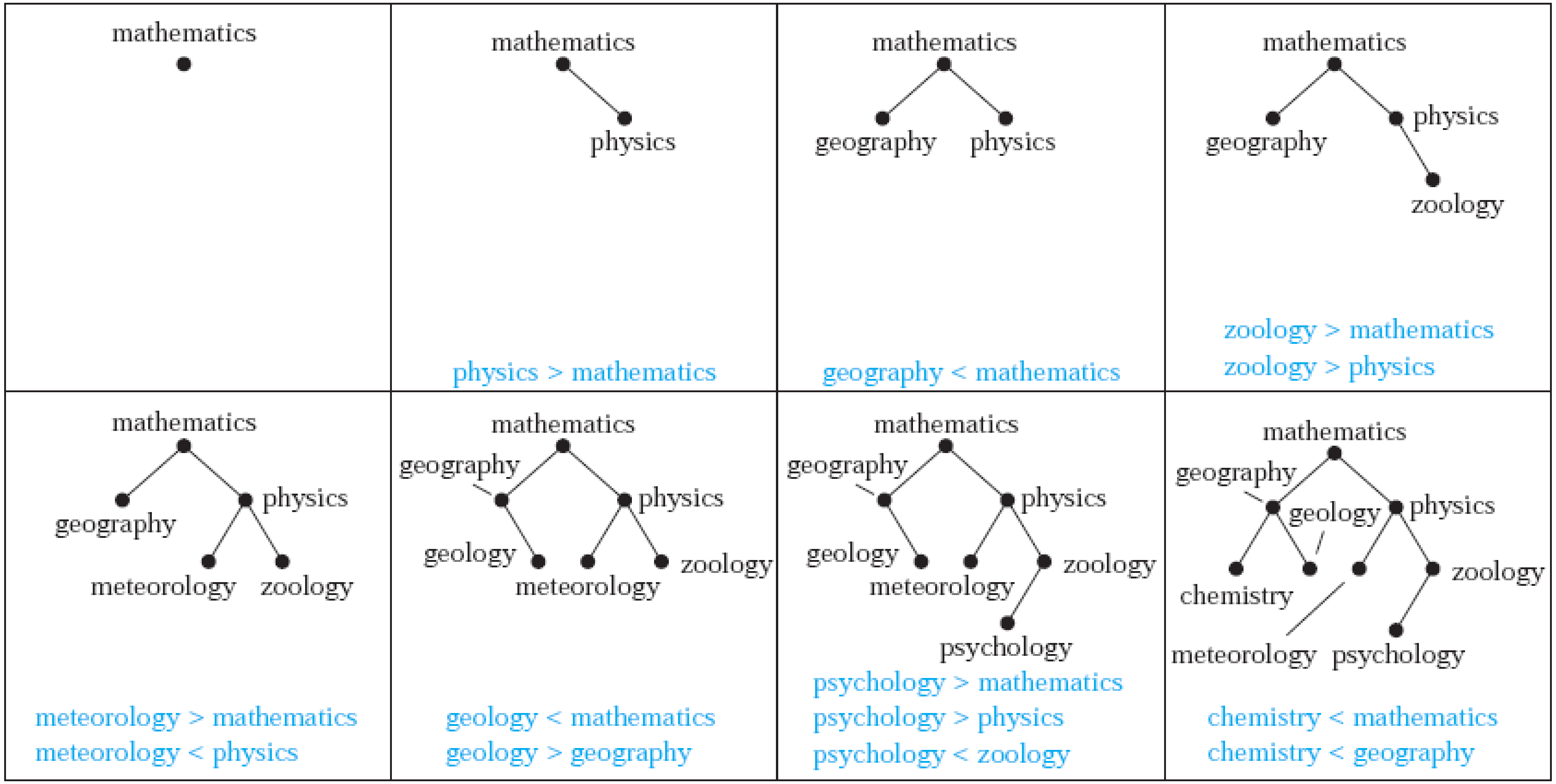
- Αναζήτηση αντικειμένων σε ταξινομημένο κατάλογο
- Χρησιμοποιούμε δένδρο δυαδικής αναζήτησης
  - Δυαδικό δένδρο
  - Κάθε παιδί κορυφής ορίζεται σα δεξιό ή σαν αριστερό παιδί
  - Καμία κορυφή δεν έχει περισσότερα από ένα δεξιό ή ένα αριστερό παιδί
  - Κάθε κορυφή ονομάζεται με ένα κλειδί που είναι ένα από τα αντικείμενα

Εφαρμογές: δένδρα δυαδικής αναζήτησης (binary search trees)

- Αναδρομική διαδικασία κατασκευής δένδρου δυαδικής αναζήτησης
  - Ξεκινάμε με δένδρο που περιέχει μία μόνο κορυφή: τη ρίζα – το πρώτο αντικείμενο του καταλόγου ονομάζεται κλειδί της ρίζας
  - Για να προσθέσουμε νέο αντικείμενο, το συγκρίνουμε με τα κλειδιά των κορυφών που ήδη βρίσκονται στο δένδρο ξεκινώντας από τη ρίζα και πηγαίνοντας προς
    - τα αριστερά (εφόσον υπάρχει αριστερό παιδί) αν το αντικείμενο είναι μικρότερο από το κλειδί της αντίστοιχης κορυφής
      - Αν δεν υπάρχει αριστερό παιδί, εισάγουμε νέα κορυφή με το αντικείμενο σαν κλειδί της
    - τα δεξιά (εφόσον υπάρχει δεξιό παιδί) αν το αντικείμενο είναι μεγαλύτερο από το κλειδί της αντίστοιχης κορυφής
      - Αν δεν υπάρχει δεξιό παιδί, εισάγουμε νέα κορυφή με το αντικείμενο σαν κλειδί της

Εφαρμογές: δένδρα δυαδικής αναζήτησης (binary search trees)

- Σχηματισμός δένδρου δυαδικής αναζήτησης για τις λέξεις mathematics, physics, geography, zoology, meteorology, geology, psychology, chemistry με χρήση αλφαβητικής σειράς



Εφαρμογές: δένδρα αποφάσεων (decision trees)

- Κατασκευή μοντέλων προβλημάτων όπου μια σειρά αποφάσεων οδηγεί σε λύση
- Π.χ., εντοπισμός αντικειμένων σε βάση δεδομένων μέσω σειράς συγκρίσεων
  - Κάθε σύγκριση υποδεικνύει αν έχει εντοπιστεί το αντικείμενο ή αν θα πρέπει να αναζητηθεί στο αριστερό ή δεξί υποδένδρο
- Δένδρο αποφάσεων: ριζωμένο δένδρο όπου
  - Κορυφή = απόφαση
  - Υποδένδρα κορυφής = δυνατά αποτελέσματα της απόφασης αυτής
  - Δυνατές λύσεις = μονοπάτια προς τα φύλλα

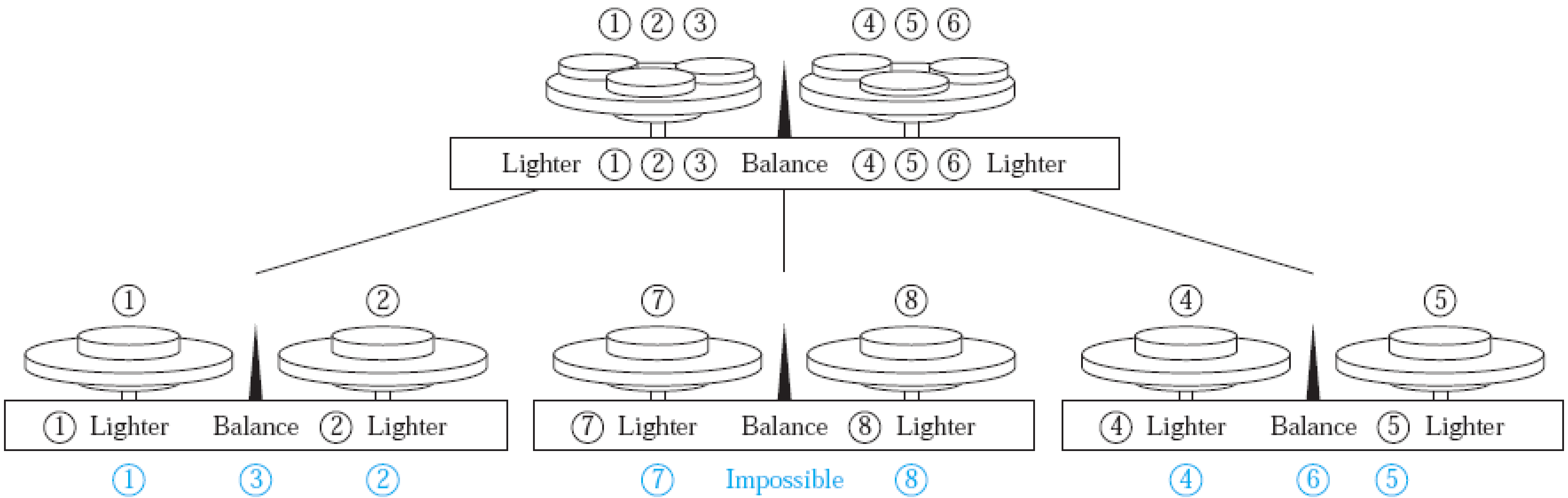
- Χρησιμοποιούμε δένδρο δυαδικής αναζήτησης
  - Δυαδικό δένδρο
  - Κάθε παιδί κορυφής ορίζεται σα δεξιό ή σαν αριστερό παιδί
  - Καμία κορυφή δεν έχει περισσότερα από ένα δεξιό ή ένα αριστερό παιδί
  - Κάθε κορυφή ονομάζεται με ένα κλειδί που είναι ένα από τα αντικείμενα

Εφαρμογές: δένδρα αποφάσεων (decision trees)

- Έστω ότι υπάρχουν 7 νομίσματα που όλα έχουν το ίδιο βάρος και 1 κάλπικο νόμισμα που ζυγίζει λιγότερο από τα άλλα. Πόσες ζυγίσεις χρειάζονται με μια ζυγαριά για να προσδιορίσουμε ποιο από τα 8 νομίσματα είναι το κάλπικο;
- Κάθε ζύγιση έχει 3 πιθανά αποτελέσματα
  - Και οι δύο δίσκοι της ζυγαριάς δείχνουν το ίδιο βάρος
  - Ο αριστερά δίσκος δείχνει μεγαλύτερο βάρος
  - Ο δεξιά δίσκος δείχνει μεγαλύτερο βάρος
- $\Rightarrow$ το δένδρο αποφάσεων για το πρόβλημα είναι τάξης 3
- Στο δένδρο αποφάσεων υπάρχουν 8 φύλλα που αναπαριστούν τα 8 δυνατά αποτελέσματα: 1 από τα 8 νομίσματα είναι το κάλπικο
- Το μέγιστο πλήθος απαιτούμενων ζυγίσεων είναι το ύψος, h, ενός πλήρους δένδρου τάξης 3 με 8 φύλλα
  - Ισχύει $h \geq$ άνω ακέραιο μέρος $\log_{\text{τάξη δένδρου}}$φύλλα$\Rightarrow$ h= άνω ακέραιο μέρος $\log_3 8$ = άνω ακέραιο μέρος 1,892789261=2
- $\Rightarrow$ Θα χρειαστούν τουλάχιστον 2 ζυγίσεις

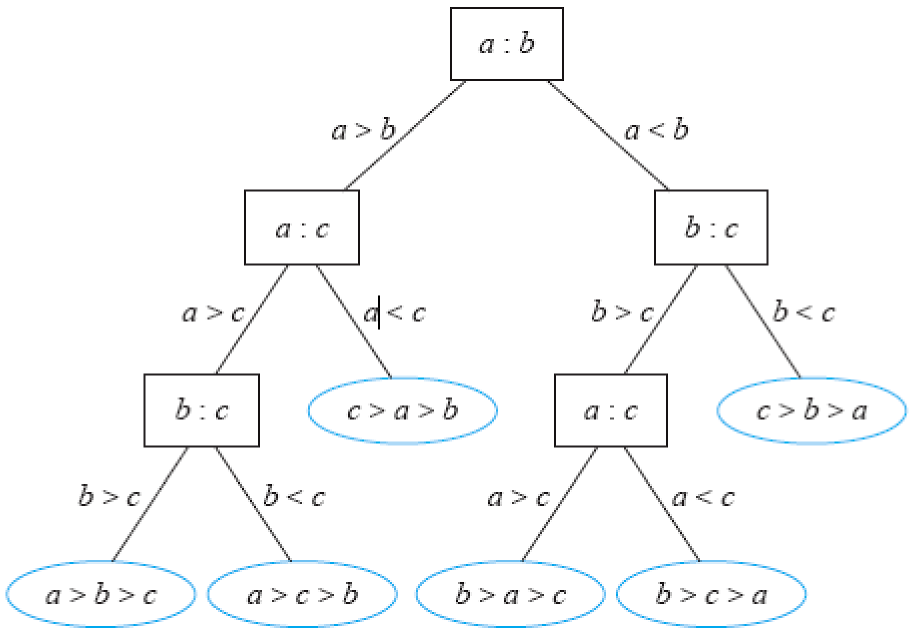
Εφαρμογές: δένδρα αποφάσεων (decision trees)

- Έστω ότι υπάρχουν 7 νομίσματα που όλα έχουν το ίδιο βάρος και 1 κάλπικο νόμισμα που ζυγίζει λιγότερο από τα άλλα. Πόσες ζυγίσεις χρειάζονται με μια ζυγαριά για να προσδιορίσουμε ποιο από τα 8 νομίσματα είναι το κάλπικο;
- Πώς γίνονται οι ζυγίσεις αυτές;



Εφαρμογές: δένδρα αποφάσεων (decision trees)

- Ειδική περίπτωση: Δυαδικές συγκρίσεις
  - συγκρίνω 2 στοιχεία κάθε φορά
- Δένδρο αποφάσεων για σύγκριση των στοιχείων της λίστας a,b,c



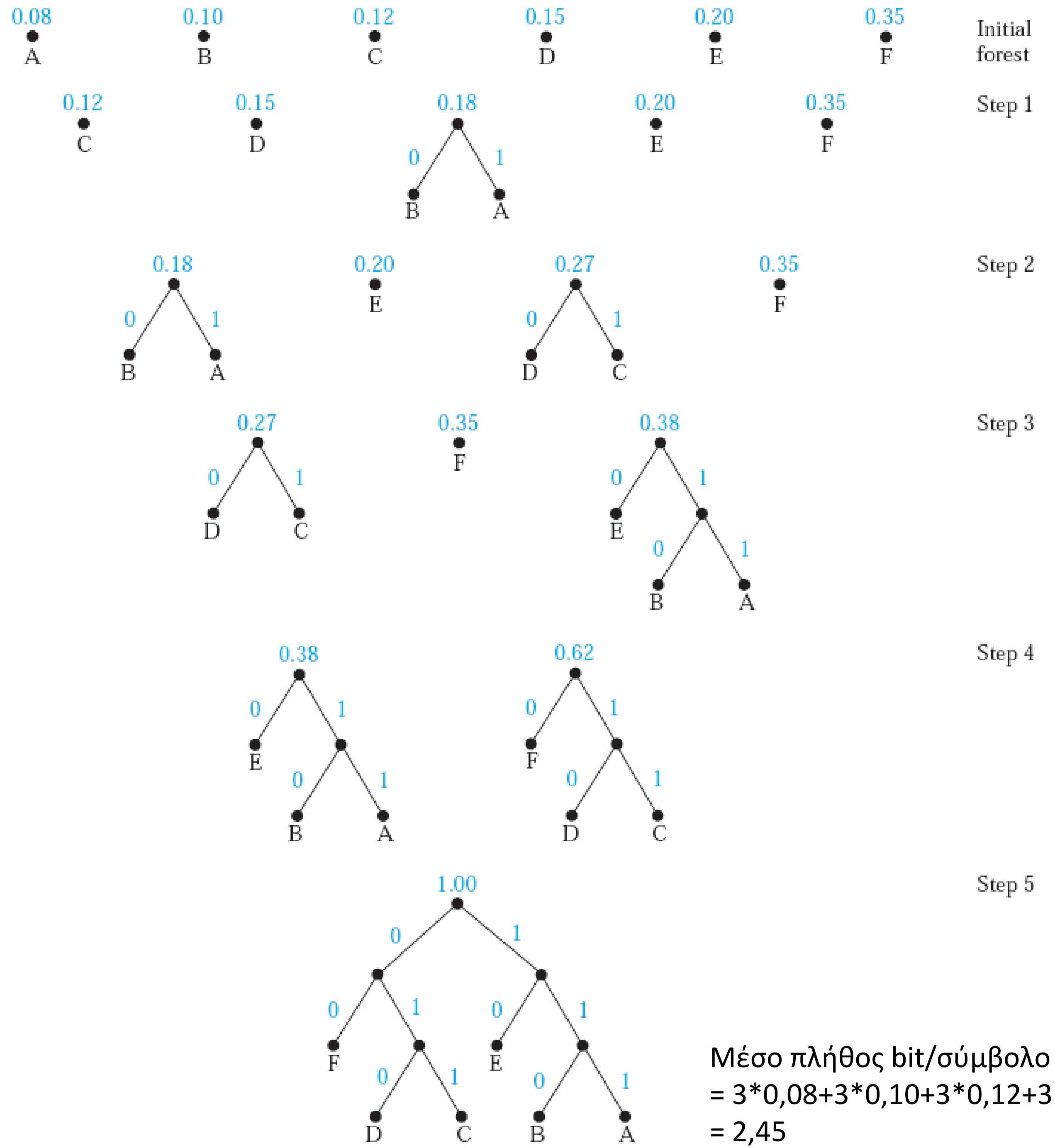
Εφαρμογές: κωδικοποίηση Huffman

- Δεδομένο: συχνότητες εμφάνισης συνόλου χαρακτήρων (π.χ., σε ένα κείμενο)
- Ζητούμενο: ανάθεση δυαδικών ακολουθιών (με 0 και 1) στους χαρακτήρες ώστε να ελαχιστοποιείται συνολικά το πλήθος των χρησιμοποιούμενων συμβόλων (0/1)
- Λύση: προτάθηκε από το David Huffman to 1951 όταν ήταν μεταπτυχιακός φοιτητής στο MIT
  - Εγγυάται το ελάχιστο μέσο πλήθος bit / σύμβολο

DAVID A. HUFFMAN (1925–1999)

Εφαρμογές: κωδικοποίηση Huffman

- Ξεκινάμε από τη διαταγμένη (από το μικρότερο στο μεγαλύτερο) λίστα των συμβόλων με βάση τις συχνότητες εμφάνισής τους
- Ενώνουμε τα δύο αριστερότερα στοιχεία σε ένα νέο δένδρο όπου
  - η ρίζα έχει τιμή ίση με το άθροισμα των τιμών των παιδιών της
  - Το αριστερό παιδί είναι ο χαρακτήρας με τη μεγαλύτερη συχνότητα και το δεξιό παιδί είναι ο χαρακτήρας με τη μικρότερη συχνότητα
  - Η ακμή μεταξύ ρίζας και αριστερού παιδιού επιγράφεται με 0 ενώ η ακμή μεταξύ ρίζας και δεξιού παιδιού επιγράφεται με 1
  - Τοποθετούμε το νέο κατασκευάσμα-δένδρο στη σωστή θέση στην λίστα με τα στοιχεία συμβόλων
- Σταματάμε όταν έχει σχηματιστεί 1 μοναδικό δένδρο
- Διαβάζοντας τις επιγραφές του μονοπατιού που οδηγεί από τη ρίζα σε κάθε σύμβολο λαμβάνουμε τη δυαδική κωδικοποίηση του συμβόλου αυτού



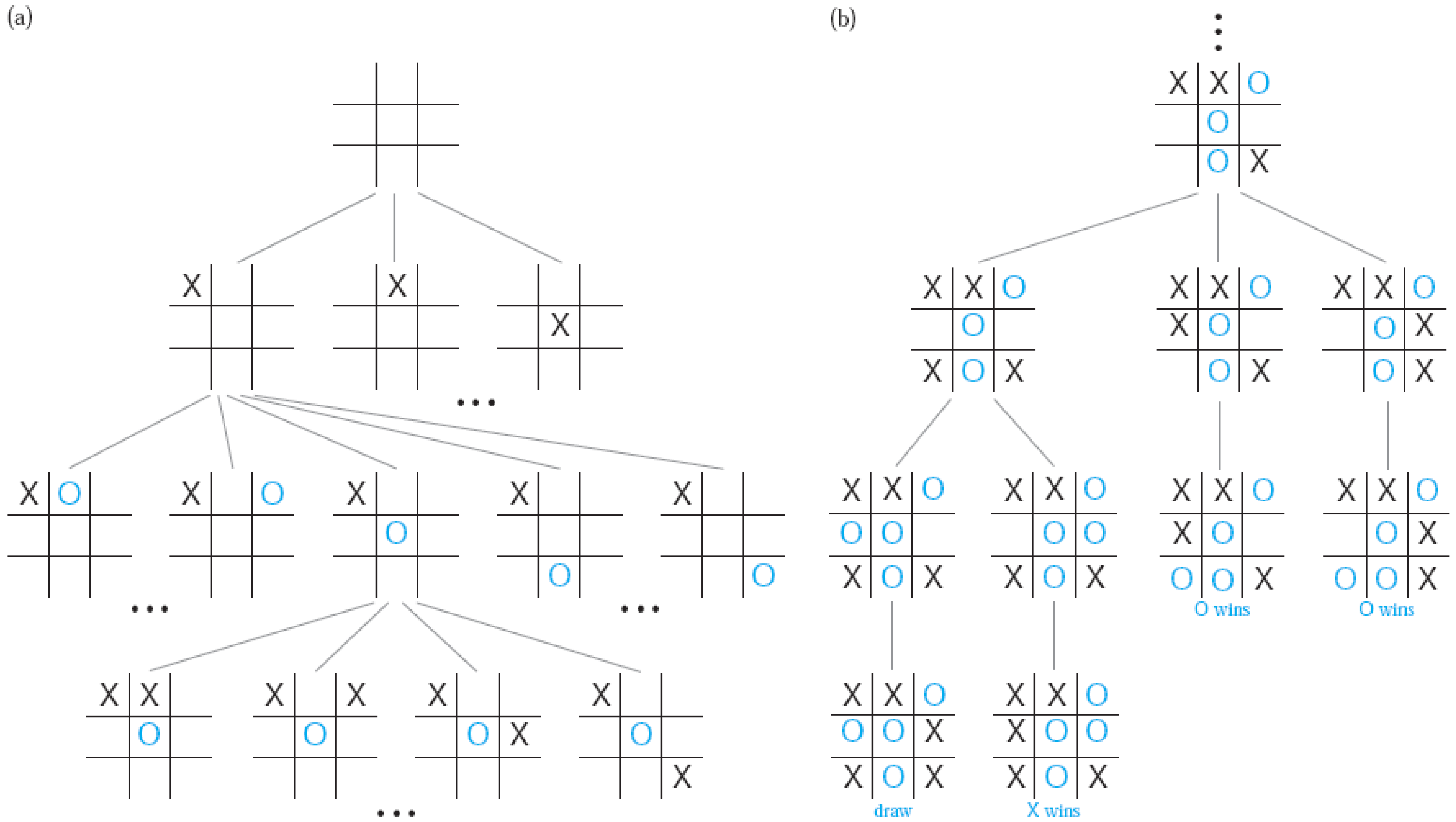
A=111
B=110
C=011
D=010
E=10
F=00

Μέσο πλήθος bit/σύμβολο
= 3*0,08+3*0,10+3*0,12+3*0,15+2*0,20+2*0,35
= 2,45

Εφαρμογές: δένδρα παιγνίων

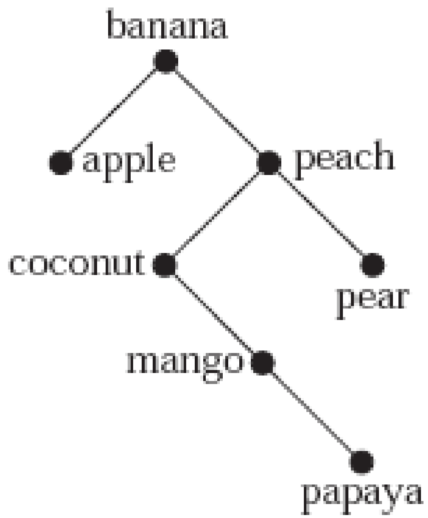
- Δένδρα παιγνίων: δένδρα που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση παιχνιδιών όπως η τρίλιζα, η ντάμα, το σκάκι, κτλ
- Υπάρχουν 2 παίκτες που παίζουν ο ένας μετά τον άλλον (ακολουθιακά)
- Κάθε παίκτης γνωρίζει τις κινήσεις που έκανε ο άλλος χωρίς να μαντεύει (δεν υπεισέρχεται η τύχη)
- Κορυφές: θέσεις που μπορεί να βρίσκεται το παιχνίδι καθώς εξελίσσεται
  - Για οικονομία χώρου, συμμετρικές θέσεις του παιχνιδιού συμπεριλαμβάνονται στην ίδια κορυφή
  - Κορυφές άρτιων επιπέδων: κουτάκια
    - Στα άρτια επίπεδα παίζει ο πρώτος παίκτης
  - Κορυφές περιττών επιπέδων: κύκλοι
    - Στα περιττά επίπεδα παίζει ο δεύτερος παίκτης
- Ακμές: έγκυρες κινήσεις μεταξύ των θέσεων αυτών
- Ρίζα: θέση εκκίνησης
- Φύλλα: τελικές θέσεις παιχνιδιού
  - Αναθέτουμε τιμή σε κάθε φύλλο που δείχνει τη βαθμολογία του πρώτου παίκτη όταν το παιχνίδι τελειώνει στη θέση αυτή

Εφαρμογές: δένδρα παιγνίων



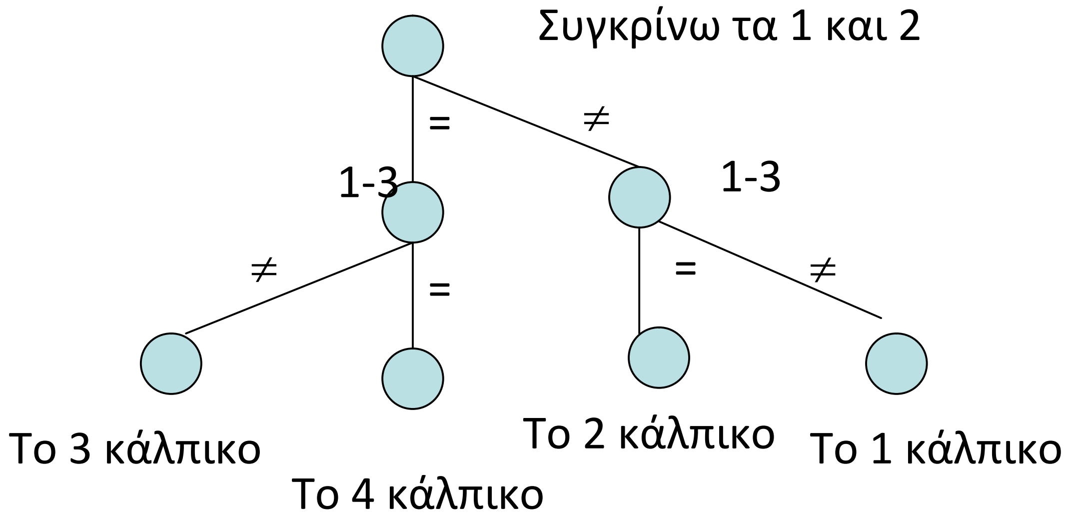
Άσκηση

- Να κατασκευαστεί δένδρο δυαδικής αναζήτησης για τις λέξεις: banana, peach, apple, pear, coconut, mango, papaya με χρήση αλφαβητικής σειράς



Άσκηση

- Πόσες ζυγίσεις με ζυγαριά χρειάζονται για να βρεθεί το κάλπικο ανάμεσα σε 4 νομίσματα, αν το κάλπικο νόμισμα είναι είτε ελαφρύτερο είτε βαρύτερο από τα άλλα;
  - $\lceil \log_3 4 \rceil = 2$ ζυγίσεις
- Περιγράψτε τρόπο (δηλ., αλγόριθμο) εντοπισμού του κάλπικου νομίσματος



Άσκηση

23. Με χρήση κωδικοποίησης Huffman να κωδικοποιηθούν τα παρακάτω σύμβολα με τις συχνότητες που δίνονται: *a*: 0,20, *b*: 0,10, *c*: 0,15, *d*: 0,25, *e*: 0,30. Ποιό είναι το μέσο πλήθος των bit που χρειάζονται για κωδικοποίηση χαρακτήρα;

a: 11; b: 101; c: 100; d: 01; e: 00; 2.25 bits

Άσκηση

37. Να σχεδιαστεί υποδένδρο του δένδρου παιχνιδιού για την τρίλιζα, αν ξεκινούμε από την κάθε μια από τις παρακάτω καταστάσεις. Να προσδιοριστεί η τιμή του καθενός από αυτά τα υποδένδρα

a)

O	X	X
X	O	O
		X

b)

X	O	X
O	X	X
		O