d) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές οκτάδων στην περιοχή δεδομένων μπορούν να μεταδοθούν αν το μήκος επικεφαλίδας είναι 20 οκτάδες και το συνολικό μήκος έχει όσο το δυνατό μεγαλύτερο μήκος;

4.2 Η Αρχή του Περιστερώνα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εστω ότι ένα κοπάδι περιστεριών πετά σε ένα σύνολο από φωλιές για να φωλιάσει. Η αρχή του περιστερώνα αναφέρει ότι αν υπάρχουν περισσότερα περιστέρια από φωλιές, τότε θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια φωλιά με τουλάχιστο δύο περιστέρια (βλ. Σχήμα 1). Βέβαια, αυτή η αρχή εφαρμόζεται και σε άλλα αντικείμενα εκτός από περιστέρια και περιστερώνες.

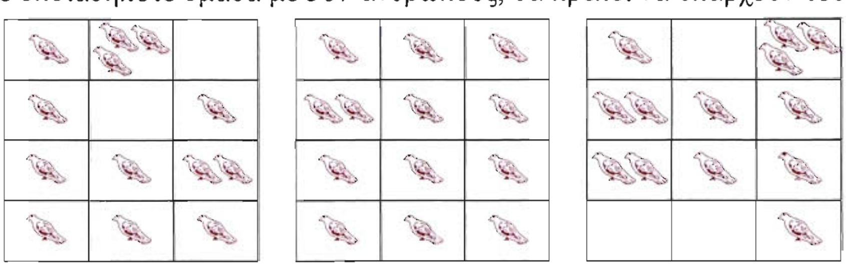
***ΘΕΩΡΗΜΑ 1* ΗΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ** Αν $k+1$ ή περισσότερα αντικείμενα τοποθετηθούν μέσα σε k κουτιά, τότε τουλάχιστο ένα κουτί θα περιέχει δύο ή περισσότερα από τα αντικείμενα.

Απόδειξη: Εστω ότι κανένα από τα k κουτιά δεν περιέχει περισσότερα από ένα αντικείμενα. Τότε το συνολικό πλήθος των αντικειμένων θα είναι το πολύ k. Το γεγονός αυτό αποτελεί αντίφαση, επειδή υπάρχουν τουλάχιστον $k+1$ αντικείμενα.

Η αρχή της φωλιάς περιστεριών ονομάζεται και **αρχή συρταριού του Dirichlet**, από τον Γερμανό μαθηματικό του δέκατου έννατου αιώνα Dirichlet, που συχνά χρησιμοποιούσε αυτή την αρχή στις εργασίες του. Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται η αρχή του περιστερώνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε οποιαδήποτε ομάδα με 367 ανθρώπους, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχι-



(a) (b) (c)

ΣΧΗΜΑ 1 Υπάρχουν Περισσότερα Περιστέρια από Περιστερώνες.

G. LEJEUNE DIRICHLET (1805 - 1859) Ο G. Lejeune Dirichlet γεννήθηκε από Γαλλική οικογένεια που ζούσε κοντά στην Κολωνία της Γερμανίας. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού και είχε θέσεις στα Πανεπιστήμια του Breslau και του Βερολίνου. Το 1855 επελέγη να διαδεχτεί τον Gauss στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Λέγεται ότι ο Dirichlet ήταν ο πρώτος άνθρωπος που έμαθε το *Disquisitiones Arithmeticae* του Gauss, που είχε εμφανιστεί πριν από 20 χρόνια. Λέγεται ότι πάντοτε είχε ένα αντίγραφο δίπλα του ακόμη και όταν ταξίδευε. Ο Dirichlet έκανε πολλές σημαντικές ανακαλύψεις στην θεωρία αριθμών, μαζί με το θεώρημα ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί σε αριθμητικές προόδους $an+b$ όταν οι a και b είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί. Απέδειξε την περίπτωση για $n=5$ του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν μη προφανείς λύσεις με ακέραιους στην $x^5+y^5=z^5$. Ο Dirichlet έκανε και πολλές συνεισφορές στην μαθηματική ανάλυση.

στο δύο που έχουν την ίδια ημερομηνία γέννησης, επειδή υπάρχουν μόνο 366 δυνατές ημερομηνίες γέννησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε οποιαδήποτε ομάδα 27 λέξεων στα Αγγλικά, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστο δύο που αρχίζουν με το ίδιο γράμμα, επειδή υπάρχουν 26 γράμματα στο λατινικό αλφάβητο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Πόσοι σπουδαστές θα πρέπει να υπάρχουν σε μια τάξη για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστο δύο σπουδαστές θα πάρουν τον ίδιο βαθμό στο τελικό διαγώνισμα, αν η βαθμολογία είναι από 0 μέχρι 100;

Λύση: Στο τελικό διαγώνισμα υπάρχουν 101 δυνατές βαθμολογίες. Η αρχή της φωλιάς περιστεριών δείχνει ότι μεταξύ οποιωνδήποτε 102 σπουδαστών θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστο 2 σπουδαστές με την ίδια βαθμολογία.

Η αρχή του περιστερώνα αποτελεί χρήσιμο εργαλείο σε πολλές αποδείξεις, μαζί με αποδείξεις με αποτελέσματα που προκαλούν έκπληξη, όπως τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να δειχτεί ότι, για κάθε ακέραιο n, υπάρχει πολλαπλάσιο του n που έχει μόνο 0 και 1 στο δεκαδικό του ανάπτυγμα.

Λύση: Εστω ότι ο n είναι θετικός ακέραιος. Θεωρούμε τους n ακέραιους 1, $11, 111, \ldots, 11\cdots1$ (όπου ο τελευταίος ακέραιος της λίστας είναι ο ακέραιος με $(n+1)/1$ στο δεκαδικό του ανάπτυγμα). Σημειώνουμε ότι υπάρχουν n δυνατά υπόλοιπα όταν ένας ακέραιος διαιρείται δια n. Επειδή υπάρχουν $n + 1$ ακέραιοι στην λίστα αυτή, σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα θα πρέπει να υπάρχουν δύο με το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται δια n. Η διαφορά αυτών των δύο ακέραιων θα έχει δεκαδικό ανάπτυγμα που θα αποτελείται αποκλειστικά από 0 και 1 και θα διαιρείται δια n.

Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ

Η αρχή του περιστερώνα αναφέρει ότι θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστο δύο αντικείμενα στο ίδιο κουτί όταν υπάρχουν περισσότερα αντικείμενα από κουτιά. Ωστόσο, μπορούμε να πούμε περισσότερα όταν το πλήθος των αντικειμένων είναι μεγαλύτερο από πολλαπλάσιο του πλήθους των κουτιών. Για παράδειγμα, μεταξύ οποιουδήποτε συνόλου 21 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει να υπάρχουν 3 ίδια. Αυτό έπεται επειδή, όταν σε 10 κουτιά μοιράζονται 21 αντικείμενα, ένα κουτί θα πρέπει να έχει περισσότερα από 2 αντικείμενα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ** Αν N αντικείμενα τοποθετηθούν σε k κουτιά, τότε θα υπάρχει τουλάχιστο ένα κουτί που θα περιέχει τουλάχιστον $\lceil N/k \rceil$ αντικείμενα.

Απόδειξη: Εστω ότι κανένα από τα κουτιά δεν περιέχει περισσότερα από $\lceil N/k \rceil - 1$ αντικείμενα. Τότε, το συνολικό πλήθος αντικειμένων θα είναι το πολύ

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N,$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η ανισότητα $\lceil N/k \rceil < (n/k) + 1$. Αυτό αποτελεί αντίφαση επειδή υπάρχουν συνολικά N αντικείμενα.

Ενα συνηθισμένο είδος προβλήματος ζητάει το ελάχιστο πλήθος αντικειμένων έτσι ώστε τουλάχιστον r από αυτά να βρίσκονται σε ένα από k κουτιά όταν τα αντικείμενα αυτά είναι κατανεμημένα στα κουτιά. Οταν έχουμε N αντικείμενα, η γενικευμένη αρχή της φωλιάς περιστεριών μας λέει ότι θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστο r αντικείμενα σε ένα από τα κουτιά εφ' όσον ισχύει η $\lceil N/k \rceil \geq r$. Ο μικρότερος ακέραιος N με $N/k > r - 1$, δηλαδή ο $N = k(r-1)+1$, είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα $\lceil N/k \rceil \geq r$. Θα αρκούσε μικρότερη τιμή του N; Η απάντηση είναι όχι, επειδή αν έχουμε $k(r - 1)$ αντικείμενα, θα μπορούσαμε να βάλουμε $r - 1$ από αυτά στο καθένα από τα k κουτιά και κανένα κουτί δεν θα είχε τουλάχιστον r αντικείμενα.

Οταν εξετάζουμε προβλήματα αυτού του είδους, είναι χρήσιμο να εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αποφύγουμε να έχουμε τουλάχιστο r αντικείμενα σε ένα από τα κουτιά καθώς προσθέτουμε διαδοχικά αντικείμενα. Για να αποφύγουμε την πρόσθεση του αντικείμενου r τάξης σε οποιοδήποτε κουτί, φτάνουμε τελικά να έχουμε r–1 αντικείμενα σε κάθε κουτί. Δεν υπάρχει τρόπος να προσθέσουμε το επόμενο αντικείμενο χωρίς να βάλουμε το αντικείμενο r τάξης στο κουτί αυτό.

Τα Παραδείγματα 5-8 δείχνουν τον τρόπο εφαρμογής της γενικευμένης αρχής του περιστερώνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Μεταξύ 100 ανθρώπων υπάρχουν τουλάχιστο $\lceil 100/12 \rceil = 9$ που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος σπουδαστών που χρειάζεται να βρίσκονται σε μάθημα διακριτών μαθηματικών για να είναι σίγουρο ότι τουλάχιστον έξη θα πάρουν την ίδια βαθμολογία, αν υπάρχουν πέντε δυνατές βαθμολογίες, οι A, B, C, D, και F;

Λύση: Το ελάχιστο πλήθος σπουδαστών που χρειάζονται για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστο έξη σπουδαστές θα πάρουν την ίδια βαθμολογία είναι ο μικρότερος ακέραιος N έτσι ώστε να είναι $\lceil N/5 \rceil = 6$. Ο μικρότερος τέτοιος ακέραιος είναι ο $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$. Αν έχουμε μόνο 25 σπουδαστές, είναι δυνατό να υπάρχουν πέντε που να έχουν πάρει την ίδια βαθμολογία έτσι ώστε να μην υπάρχουν έξη σπουδαστές με την ίδια βαθμολογία. Ετσι, το 26 είναι το ελάχιστο πλήθος σπουδαστών που χρειάζονται για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστο έξη σπουδαστές θα πάρουν την ίδια βαθμολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

a) Πόσα χαρτιά πρέπει να επιλεγούν από μια τράπουλα με 52 χαρτιά για να εξασφαλιστεί ότι επιλέγονται τρία χαρτιά του ιδίου χρώματος; **b)** Πόσα χαρτιά πρέπει να επιλεγούν για να εξασφαλιστεί ότι θα επιλεγούν τουλάχιστον τρεις κούπες;

Λύση: **a)** Εστω ότι υπάρχουν τέσσερα κουτιά, και, καθώς επιλέγονται χαρτιά, αυτά τοποθετούνται στο κουτί που προορίζεται για τα χαρτιά αυτού του χρώματος. Με χρήση της γενικευμένης αρχής του περιστερώνα, βλέπουμε ότι αν επιλεγούν N χαρτιά, θα υπάρχει τουλάχιστο ένα κουτί που περιέχει τουλάχιστον $\lceil N/4 \rceil$ χαρτιά. Κατά συνέπεια, γνωρίζουμε ότι επιλέγονται τουλάχιστο τρία χαρτιά ενός χρώματος αν $\lceil N/4 \rceil \geq 3$. Ο μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε να είναι $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ είναι ο $N = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, και έτσι αρκούν εννέα χαρτιά. Ας σημειωθεί ότι αν επιλεγούν οκτώ χαρτιά, είναι δυνατό να έχουμε δύο χαρτιά ιδίου χρώματος, και έτσι χρειάζονται περισσότερα από οκτώ χαρτιά. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να επιλεγούν εννέα χαρτιά για να εξασφαλιστεί ότι επιλέγονται τουλάχιστον τρία χαρτιά του ιδίου χρώματος. Ενας καλός τρόπος σκέψης είναι η παρατήρηση ότι, μετά την επιλογή του όγδοου χαρτιού, δεν υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε τρίτο χαρτί του ιδίου χρώματος.

b) Δεν χρησιμοποιούμε την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα για την απάντηση αυτής της ερώτησης, επειδή θέλουμε να βεβαιωθούμε ότι υπάρχουν τρεις κούπες, και όχι απλά τρία χαρτιά του ιδίου χρώματος. Παρατηρούμε ότι στην χειρότερη περίπτωση, μπορούμε να επιλέξουμε όλα τα μπαστούνια, τα καρρώ, και τα σπαθιά, συνολικά 39 χαρτιά, πριν επιλέξουμε μια κούπα. Τα επόμενα τρία χαρτιά θα είναι και τα τρία κούπες, και έτσι θα πρέπει να επιλέξουμε 42 χαρτιά για να έχουμε τρεις κούπες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος κωδίκων περιοχής που χρειάζεται για να εξασφαλιστεί ότι τα 25 εκατομμύρια τηλέφωνα σε ένα κράτος θα έχουν ξεχωριστούς δεκαψήφιους τηλεφωνικούς αριθμούς; (Θεωρούμε ότι οι τηλεφωνικοί αριθμοί έχουν την μορφή *NXX-NXX-XXXX* όπου τα πρώτα τρία ψηφία σχηματίζουν τον κώδικα περιοχής, το N παριστάνει ψηφία από το 2 μέχρι το 9 συμπεριλαμβανομένων, και το X παριστάνει οποιοδήποτε ψηφίο.)

Λύση: Υπάρχουν οκτώ εκατομμύρια τηλεφωνικοί αριθμοί με την μορφή *NXX-XXXX* (όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 7 της Παραγράφου 4.1). Συνεπώς, σύμφωνα με την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα, μεταξύ 25 εκατομμυρίων τηλεφώνων, τουλάχιστον $\lceil 25.000.000/8.000.000 \rceil$ από αυτά θα πρέπει να έχουν τους ίδιους τηλεφωνικούς αριθμούς. Αρα, χρειάζονται τουλάχιστο τέσσερεις κώδικες περιοχής για να εξασφαλιστεί ότι όλοι οι δεκαψήφιοι αριθμοί θα είναι διαφορετικοί.

Το Παράδειγμα 9, αν και δεν πρόκειται για εφαρμογή της γενικευμένης αρχής του περιστερώνα, χρησιμοποιεί παρόμοιες αρχές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Εστω ότι ένα εργαστήριο επιστήμης υπολογιστών έχει 15 σταθμούς εργασίας και 10 εξυπηρετητές (server). Για την απευθείας σύνδεση σταθμού εργασίας με εξυπηρετητή χρησιμοποιείται ένα καλώδιο. Σε οποιαδήποτε στιγμή, μόνο μια απευθείας σύνδεση με εξυπηρετητή μπορεί να είναι ενεργή. Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι οποιαδήποτε στιγμή οποιαδήποτε ομάδα δέκα ή λιγότερων σταθμών εργασίας μπορούν να έχουν ταυτόχρονη πρόσβαση σε διαφορετικούς εξυπηρετητές μέσω απευθείας συνδέσεων. Αν και θα μπορούσαμε να το κάνουμε αυτό με απευθείας σύνδεση κάθε σταθμού εργασίας με κάθε εξυπηρετητή (με 150 συνδέσεις), ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος απευθείας συνδέσεων που χρειάζονται για να πετύχουμε τον στόχο μας;

Λύση: Εστω ότι ονομάζουμε τους σταθμούς εργασίας $W_1, W_2, \ldots, W_{15}$ και τους εξυπηρετητές $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$. Επιπλέον, έστω ότι συνδέουμε τον W_k με τον S_k για $k = 1, 2, \ldots, 10$ και τον καθένα από τους W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}, και W_{15} και με τους δέκα εξυπηρετητές. Θα έχουμε συνολικά 60 απευθείας συνδέσεις. Είναι φανερό ότι οποιαδήποτε ομάδα δέκα ή λιγότερων σταθμών εργασίας μπορεί να έχει ταυτόχρονη πρόσβαση σε διαφορετικούς εξυπηρετητές. Αυτό το βλέπουμε αν παρατηρήσουμε ότι, αν συμπεριλάβουμε τον σταθμό εργασίας W_j με $1 \leq j \leq 10$, αυτός μπορεί να έχει πρόσβαση στον εξυπηρετητή S_j, και για κάθε σταθμό εργασίας W_k, με $k \geq 11$, συμπεριλαμβανομένου, θα πρέπει να υπάρχει αντίστοιχος σταθμός εργασίας W_j με $1 \leq j \leq 10$, μη συμπεριλαμβανόμενος, έτσι ώστε ο W_k να έχει πρόσβαση στον εξυπηρετητή S_j. (Αυτό έπεται επειδή υπάρχουν τουλάχιστον τόσοι διαθέσιμοι εξυπηρετητές S_j όσοι και σταθμοί εργασίας W_j με $1 \leq j \leq 10$ μη συμπεριλαμβανόμενοι.)

Εστω, τώρα, ότι υπάρχουν λιγότερες από 60 απευθείας συνδέσεις μεταξύ σταθμών εργασίας και εξυπηρετητών. Τότε, κάποιος εξυπηρετητής θα συνδέονταν πολύ με το $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ σταθμούς εργασίας. (Αν όλοι οι εξυπηρετητές συνδέονταν με τουλάχιστον έξη σταθμούς εργασίας, θα υπήρχαν τουλάχιστον $6 \cdot 10 = 60$ απευθείας συνδέσεις.) Αυτό σημαίνει ότι οι υπόλοιποι εννέα εξυπηρετητές δεν είναι αρκετοί έτσι ώστε να επιτρέπουν στους άλλους δέκα σταθμούς εργασίας να έχουν ταυτόχρονη πρόσβαση σε διαφορετικούς εξυπηρετητές. Κατά συνέπεια, χρειάζονται τουλάχιστον 60 απευθείας συνδέσεις. Επεται ότι η απάντηση είναι 60.

ΚΑΠΟΙΕΣ ΚΟΜΨΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ

Σε πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές της αρχής του περιστερώνα, τα αντικείμενα που πρόκειται να τοποθετηθούν σε κουτιά πρέπει να επιλεγούν με έξυπνο τρόπο. Θα περιγράψουμε μερικές παρόμοιες εφαρμογές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Κατά την διάρκεια ενός μηνός με 30 ημέρες μια ομάδα παίζει τουλάχιστο ένα παιχνίδι την ημέρα, αλλά δεν παίζει περισσότερα από 45 παιχνίδια. Να δειχτεί ότι πρέπει να υπάρχει μια χρονική περίοδος διαδοχικών ημερών, κατά την διάρκεια της οποίας η ομάδα θα πρέπει να παίζει ακριβώς 14 παιχνίδια.

Λύση: Εστω ότι a_j είναι το πλήθος των παιχνιδιών που παίζονται πριν ή κατά την *j-οστή* ημέρα του μηνός. Τότε η $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ είναι αύξουσα ακολουθία διακεκριμένων θετικών ακέραιων με $1 \leq a_j \leq 45$. Επιπλέον, η $a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14$ είναι και αυτή αύξουσα ακολουθία διακεκριμένων θετικών ακέραιων, με $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.
Οι 60 θετικοί ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+14$ είναι όλοι μικρότεροι από ή ίσοι με 59. Συνεπώς, σύμφωνα με την αρχή της φωλιάς περιστεριών δύο από αυτούς τους ακέραιους είναι ίσοι. Επειδή οι ακέραιοι a_j, $j = 1, 2, \ldots, 30$ είναι όλοι διακεκριμένοι και οι ακέραιοι $a_j + 14, j = 1, 2, \ldots, 30$ είναι όλοι διακεκριμένοι, θα πρέπει να υπάρχουν δείκτες i και j με $a_i = a_j + 14$. Αυτό σημαίνει ότι από την ημέρα $j + 1$ μέχρι την ημέρα i παίχτηκαν 14 παιχνίδια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να δειχτεί ότι μεταξύ οποιωνδήποτε $n + 1$ θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από $2n$ θα πρέπει να υπάρχει ακέραιος που διαιρεί έναν από τους άλλους ακέραιους.

Λύση: Γράφουμε τον καθένα από τους $n + 1$ ακέραιους $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ σαν δύναμη του 2 επί περιττό ακέραιο. Με άλλα λόγια, έστω ότι $a_j = 2^{k_j} q_j$ για $j = 1, 2, \ldots, n + 1$, όπου ο k_j είναι μη αρνητικός ακέραιος και ο q_j είναι περιττός. Οι ακέραιοι $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ είναι όλοι περιττοί θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από $2n$. Επειδή υπάρχουν μόνο n περιττοί θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από $2n$, από την αρχή του περιστερώνα έπεται ότι δύο από τους ακέραιους $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ θα πρέπει να είναι ίσοι. Κατά συνέπεια, υπάρχουν ακέραιοι i και j έτσι ώστε να είναι $q_i = q_j$. Εστω ότι q είναι η κοινή τιμή των q_i και q_j. Τότε, $a_i = 2^{k_i} q$ και $a_j = 2^{k_j} q$. Επεται ότι αν $k_i < k_j$, τότε ο a_i θα διαιρεί τον a_j. Ενώ αν $k_i > k_j$, τότε ο a_{ij} θα διαιρεί τον a_i.

Μια έξυπνη εφαρμογή της αρχής του περιστερώνα δείχνει την ύπαρξη αύξουσας ή φθίνουσας υποακολουθίας ορισμένου μήκους σε ακολουθία ξεχωριστών ακέραιων. Πριν παρουσιαστεί αυτή η εφαρμογή θα κάνουμε επανάληψη σε κάποιους ορισμούς. Εστω ότι η $a_1, a_2, \ldots, a_N$ είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών. **Υποακολουθία** αυτής της ακολουθίας είναι μια ακολουθία με την μορφή $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$, όπου $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq N$. Κατά συνέπεια, υποακολουθία είναι μια ακολουθία που λαμβάνεται από την αρχική ακολουθία αν συμπεριλάβουμε κάποιους από τους όρους της αρχικής ακολουθίας με την αρχική τους σειρά, και ίσως χωρίς να περιλάβουμε άλλους όρους. Ακολουθία ονομάζεται **αυστηρά αύξουσα** αν κάθε όρος είναι μεγαλύτερος από τον όρο που προηγείται από αυτόν, και **αυστηρά φθίνουσα** αν κάθε όρος είναι μικρότερος από τον όρο που προηγείται από αυτόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Κάθε ακολουθία με n^2+1 διακεκριμένους πραγματικούς αριθμούς περιέχει υποακολουθία με μήκος $n + 1$, η οποία είναι είτε αυστηρά αύξουσα είτε αυστηρά φθίνουσα.

Πριν παρουσιάσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3 θα δώσουμε ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Η ακολουθία 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 περιέχει δέκα όρους. Παρατηρούμε ότι $10 = 3^2 + 1$. Υπάρχουν τέσσερεις αύξουσες υποακολουθίες με μήκος τέσσερα, η 1, 4, 6, 12, η 1, 4, 6, 7, η 1, 4, 6, 10, και η 1, 4, 5, 7. Υπάρχει, ακόμη, μια φθίνουσα υποακολουθία με μήκος τέσσερα, η 11, 9, 6, 5.

Θα δώσουμε, τώρα, την απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη: Εστω ότι η $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ είναι ακολουθία με n^2+1 διακεκριμένους πραγματικούς αριθμούς. Με κάθε όρο της ακολουθίας συσχετίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος, δηλαδή, συσχετίζουμε το (i_k, d_k) με τον όρο a_k, όπου i_k είναι το μήκος της αύξουσας υποακολουθίας με το μεγαλύτερο μήκος αν ξεκινήσουμε από τον a_k, και d_k είναι το μήκος της φθίνουσας υποακολουθίας με το μεγαλύτερο μήκος αν αρχίσουμε από τον a_k.

Εστω ότι δεν υπάρχουν αύξουσες ή φθίνουσες υποακολουθίες με μήκος $n + 1$. Τότε οι i_k και d_k είναι και οι δύο θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από ή ίσοι με το n, για $k = 1, 2, \ldots, n^2+1$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου υπάρχουν n^2 δυνατά διατεταγμένα ζεύγη για το (i_k, d_k). Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, δύο από αυτά τα n^2+1 διατεταγμένα ζεύγη είναι ίσα. Με άλλα λόγια, υπάρχουν όροι a_s και a_t, με $s < t$, έτσι ώστε να είναι $i_s = i_t$ και $d_s = d_t$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο. Επειδή οι όροι της ακολουθίας είναι διακεκριμένοι, θα είναι είτε $a_s<a_t$ είτε $a_s>a_t$. Αν $a_s<a_t$, τότε, επειδή $i_s = i_t$, μπορεί να κατασκευαστεί αύξουσα υποακολουθία με μήκος $i_t + 1$ αν αρχίσουμε από τον a_s, με το να πάρουμε τον a_s ακολουθούμενο από αύξουσα υποακολουθία με μήκος i_t που αρχίζει στον a_t. Αυτό είναι αντίφαση. Με παρόμοιο τρόπο, αν $a_s>a_t$, μπορεί να δειχτεί ότι ο d_s θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον d_t, το οποίο είναι αντίφαση.

Το τελευταίο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα εφαρμόζεται σε ένα σημαντικό τμήμα της συνδυαστικής ανάλυσης που ονομάζεται **θεωρία Ramsey**, από τον Αγγλο μαθηματικό F. P. Ramsey. Γενικά, η θεωρία Ramsey ασχολείται με την κατανομή υποσυνόλων στοιχείων συνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Θεωρούμε ότι σε μια ομάδα έξη ατόμων, κάθε ζεύγος ατόμων αποτελείται από δύο φίλους ή από δύο εχθρούς. Να δειχτεί ότι στην ομάδα υπάρχουν είτε τρεις φίλοι μεταξύ τους είτε τρεις εχθροί μεταξύ τους.

Λύση: Εστω ότι ο A είναι το ένα από τα έξη άτομα. Από τα πέντε άλλα άτομα στην ομάδα, υπάρχουν είτε τρεις ή περισσότεροι που είναι φίλοι του A, είτε τρεις ή περισσότεροι που είναι εχθροί του A. Αυτό έπεται από την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα, επειδή όταν πέντε αντικείμενα μοιράζονται σε δύο σύνολα, το ένα από τα σύνολα θα έχει τουλάχιστο $\lceil 5/2 \rceil = 3$ στοιχεία. Στην πρώτη περίπτωση, έστω ότι οι B, C, και D είναι φίλοι του A. Αν οποιαδήποτε δύο από αυτά τα τρία άτομα είναι φίλοι, τότε αυτοί οι δύο και ο A σχηματίζουν μια ομάδα τριών φίλων μεταξύ τους. Διαφορετικά, οι B, C, και D σχηματίζουν ένα σύνολο τριών εχθρών μεταξύ τους. Η απόδειξη της δεύτερης περίπτωσης, όταν υπάρχουν τρεις ή περισσότεροι έχθροί του A, προχωρεί με παρόμοιο τρόπο.

Ο **αριθμός Ramsey** $R(m, n)$, όπου οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι από ή ίσοι με 2, συμβολίζει το ελάχιστο πλήθος ανθρώπων σε συγκέντρωση έτσι ώστε να υπάρχουν ή m φίλοι μεταξύ τους ή n εχθροί μεταξύ τους, αν θεωρηθεί ότι κάθε ζεύγος ανθρώπων στην συγκέντρωση είναι φίλοι ή εχθροί. Το Παράδειγμα 13 δείχνει ότι $R(3,3) \leq 6$. Συμπεραίνουμε ότι $R(3,3) = 6$ επειδή σε μια ομάδα πέντε ανθρώπων όπου κάθε δύο άνθρωποι είναι φίλοι ή εχθροί, δεν μπορούν να υπάρξουν τρεις φίλοι μεταξύ τους ή τρεις εχθροί μεταξύ τους (βλ. Ασκηση 24).

Είναι δυνατή η απόδειξη κάποιων χρήσιμων ιδιοτήτων των αριθμών Ramsey, αλλά στο μεγαλύτερο μέρος είναι δύσκολο να βρεθούν οι ακριβείς τους τιμές. Σημειώνουμε ότι με συμμετρία μπορεί να δειχτεί ότι $R(m, n) = R(n, m)$ (βλ. Ασκηση 28). Εχουμε, επίσης, $R(2, n) = n$ για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ (βλ. Ασκηση 27).

FRANK PLUMPTON RAMSEY (1903 - 1930) Ο Frank Plumpton Ramsey, γιος του προέδρου του Magdalene College, του Cambridge, μορφώθηκε στα Κολλέγια Winchester και Trinity. Μετά την αποφοίτησή του το 1923, εκλέχθηκε εταίρος του King's College, του Cambridge, όπου πέρασε το υπόλοιπο της ζωής του. Ο Ramsey έκανε σημαντικές συνεισφορές στην μαθηματική λογική. Αυτό που σήμερα ονομάζουμε θεωρία Ramsey ξεκίνησε με τα έξυπνα επιχειρήματά του στην συνδυαστική ανάλυση, που δημοσιεύτηκαν στην εργασία "On a Problem of Formal Logic." Ο Ramsey έκανε συνεισφορές στην μαθηματική θεωρία των οικονομικών. Ηταν γνωστός για τις εξαιρετικές του διαλέξεις σχετικά με τα θεμέλια των μαθηματικών. Ο θάνατος του στην ηλικία των 26 χρόνων στέρησε την μαθηματική κοινότητα και το Πανεπιστήμιο Cambridge από έναν λαμπρό νέο επιστήμονα.

Είναι γνωστές οι ακριβείς τιμές μόνο εννέα αριθμών Ramsey $R(m, n)$ με $3 \leq m \leq n$, μαζί με τον $R(4, 4) = 18$. Για πολλούς άλλους αριθμούς Ramsey είναι γνωστά μόνο όρια, όπως του $R(5, 5)$, που είναι γνωστό ότι ικανοποιεί την $43 \leq R(5,5) \leq 49$. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να μάθει περισσότερα για αριθμούς Ramsey θα πρέπει να συμβουλευθεί τα [MiRo91] ή [GrRoSp90].

Ασκήσεις

1. Να δειχτεί ότι σε οποιοδήποτε σύνολο έξη μαθημάτων θα πρέπει να υπάρχουν δύο που πραγματοποιούνται την ίδια ημέρα, με την προϋπόθεση ότι δεν γίνονται μαθήματα τα Σαββατοκύριακα.

2. Να δειχτεί ότι αν υπάρχουν 30 σπουδαστές σε ένα μάθημα, τότε τουλάχιστο δύο έχουν επώνυμα που αρχίζουν με το ίδιο γράμμα.

3. Ενα συρτάρι περιέχει δώδεκα καφέ κάλτσες και δώδεκα μαύρες κάλτσες, όλες ανακατεμένες. Κάποιος παίρνει τυχαία κάλτσες στο σκοτάδι.

a) Πόσες κάλτσες θα πρέπει να πάρει για να είναι σίγουρος ότι θα έχει τουλάχιστον δύο κάλτσες με το ίδιο χρώμα;

b) Πόσες κάλτσες θα πρέπει να πάρει για να είναι σίγουρος ότι θα έχει τουλάχιστο δύο μαύρες κάλτσες;

4. Ένα κύπελο περιέχει δέκα κόκκινες μπάλες και δέκα μπλέ μπάλες. Μια γυναίκα μαζεύει μπάλες τυχαία χωρίς να κοιτάζει.

a) Πόσες μπάλες θα πρέπει να επιλέξει για να είναι σίγουρη ότι θα έχει τουλάχιστον τρεις μπάλες με το ίδιο χρώμα;

b) Πόσες μπάλες θα πρέπει να επιλέξει για να είναι σίγουρη ότι θα έχει τουλάχιστον τρεις μπάλες;

5. Να δειχτεί ότι σε οποιαδήποτε ομάδα πέντε (όχι απαραίτητα διαδοχικών) ακέραιων, υπάρχουν δύο με το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται δια 4.

6. Εστω ότι ο d είναι θετικός ακέραιος. Να δειχτεί ότι σε οποιαδήποτε ομάδα $d + 1$ (όχι απαραίτητα διαδοχικών) ακέραιων, υπάρχουν δύο με το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται δια d.

7. Εστω ότι ο n είναι θετικός ακέραιος. Να δειχτεί ότι σε οποιοδήποτε σύνολο n διαδοχικών ακέραιων υπάρχει μόνο ένας που διαιρείται δια d.

8. Να δειχτεί ότι αν η f είναι συνάρτηση από το S προς το T, όπου τα S και T είναι πεπερασμένα σύνολα με $|S| > |T|$, τότε υπάρχουν στοιχεία s_1 και s_2 του S έτσι ώστε να είναι $f(s_1)=f(s_2)$, ή με άλλα λόγια, η f δεν είναι ένα-προς-ένα.

9. Ποιό θα είναι το ελάχιστο πλήθος σπουδαστών, ο καθένας από τους οποίους προέρχεται από τις 50 Πολιτείες των ΗΠΑ, που είναι εγεγραμμένοι σε πανεπιστήμιο για να εξασφαλιστεί ότι θα υπάρχουν τουλάχιστο 100 από την ίδια Πολιτεία;

***10.** Εστω ότι το (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, είναι σύνολο πέντε διακεκριμένων σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στο επίπεδο xy. Να δειχτεί ότι το μέσο της ευθείας, που συνδέει τουλάχιστον ένα ζεύγος από τα σημεία αυτά, έχει ακέραιες συντεταγμένες.

***11.** Εστω ότι το (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, είναι σύνολο εννέα διακεκριμένων σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στον χώρο xyz. Να δειχτεί ότι το μέσο της ευθείας που συνδέει τουλάχιστον ένα ζεύγος από τα σημεία αυτά έχει ακέραιες συντεταγμένες.

12. Πόσα διατεταγμένα ζεύγη ακέραιων (a, b) χρειάζονται για να εξασφαλιστεί ότι θα υπάρχουν δύο διατεταγμένα ζεύγη (a_1, b_1) και (a_2, b_2), έτσι ώστε να είναι $a_1 \mathbf{\ mod\ } 5 = a_2 \mathbf{\ mod\ } 5$ και $b_1 \mathbf{\ mod\ } 5 = b_2 \mathbf{\ mod\ } 5$;

13. **a)** Να δειχτεί ότι αν επιλεγούν πέντε ακέραιοι από τους πρώτους οκτώ θετικούς ακέραιους, θα πρέπει να υπάρχει ένα ζεύγος από τους ακέραιους αυτούς με άθροισμα ίσο με 9.

b) Μήπως ισχύει το συμπέρασμα του (a) αν αντί για πέντε ακέραιους επιλεγούν τέσσερεις ακέραιοι;

14. **a)** Να δειχτεί ότι αν από τους πρώτους 10 θετικούς ακέραιους επιλεγούν επτά ακέραιοι, τότε θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ζεύγη αυτών των ακέραιων με άθροισμα 11.

b) Μήπως ισχύει το συμπέρασμα του (a) αν αντί για επτά ακέραιους επιλεγούν έξη ακέραιοι;

15. Πόσοι αριθμοί θα πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστον δύο από αυτούς τους αριθμούς θα έχουν άθροισμα επτά;

16. Πόσοι αριθμοί θα πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστον δύο από αυτούς τους αριθμούς θα έχουν άθροισμα δέκα έξη;

17. Μια εταιρεία αποθηκεύει προϊόντα σε αποθήκη. Τα κουτιά αποθήκευσης στην αποθήκη αυτή καθορίζονται από την πτέρυγά τους, από την θέση στην πτέρυγα, και από το ράφι. Υπάρχουν 50 πτέρυγες, 85 οριζόντιες θέσεις σε κάθε πτέρυγα, και πέντε ράφια σε όλη την έκταση της αποθήκης. Ποιό είναι το ελάχιστο πλήθος προϊόντων που μπορεί να έχει η εταιρεία, έτσι ώστε το ελάχιστον δύο προϊόντα να πρέπει να αποθηκεύονται στο ίδιο κουτί;

18. Εστω ότι σε μάθημα διακριτών μαθηματικών ενός μικρού κολλεγίου υπάρχουν εννέα σπουδαστές.

a) Να δειχτεί ότι το μάθημα θα πρέπει να έχει τουλάχιστον πέντε άνδρες σπουδαστές ή τουλάχιστον πέντε γυναίκες σπουδάστριες.

b) Να δειχτεί ότι το μάθημα θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις άνδρες σπουδαστές ή τουλάχιστο επτά γυναίκες σπουδάστριες.

19. Εστω ότι κάθε σπουδαστής σε μάθημα διακριτών μαθηματικών με 25 σπουδαστές είναι τριτοετής, δευτεροετής, ή πρωτοετής.

a) Να δειχτεί ότι στο μάθημα θα υπάρχουν τουλάχιστον εννέα τριτοετείς, τουλάχιστο εννέα δευτεροετείς, ή τουλάχιστον εννέα πρωτοετείς σπουδαστές.

b) Να δειχτεί ότι στο μάθημα θα υπάρχουν τουλάχιστον τρεις τριτοετείς, τουλάχιστον 19 δευτεροετείς, ή τουλάχιστον πέντε πρωτοετείς σπουδαστές.

20. Να βρεθεί αύξουσα υποακολουθία με μέγιστο μήκος και φθίνουσα υποακολουθία με μέγιστο μήκος στην ακολουθία 22, 5, 7, 2, 23, 10, 15, 21, 3, 17.

21. Να κατασκευαστεί ακολουθία με 16 θετικούς ακέραιους που δεν έχει αύξουσα ή φθίνουσα υποακολουθία με πέντε όρους.

22. Να δειχτεί ότι αν σε μια σειρά στέκονται 101 άνθρωποι με διαφορετικά ύψη, είναι δυνατόν να βρεθούν 11 άνθρωποι με την σειρά που στέκονται στην σειρά με ύψη που είτε αυξάνουν είτε ελαττώνονται.

***23.** Να περιγραφεί αλγόριθμος σε ψευδοκώδικα που να δημιουργεί την μεγαλύτερη αύξουσα ή φθίνουσα υποακολουθία μιάς ακολουθίας με διακεκριμένους ακέραιους.

24. Να δειχτεί ότι σε ομάδα με πέντε ανθρώπους (όπου οποιοιδήποτε άνθρωποι ανά δύο είναι φίλοι ή εχθροί), δεν υπάρχουν απαραίτητα τρεις φίλοι μεταξύ τους ή τρεις εχθροί μεταξύ τους.

25. Να δειχτεί ότι σε ομάδα με δέκα ανθρώπους (όπου οποιοιδήποτε άνθρωποι ανά δύο είναι φίλοι ή εχθροί), υπάρχουν είτε τρεις φίλοι μεταξύ τους ή τέσσερεις εχθροί μεταξύ τους, και ότι υπάρχουν είτε τρεις εχθροί μεταξύ τους ή τέσσερεις φίλοι μεταξύ τους.

26. Με χρήση της Ασκησης 25 να δειχτεί ότι μέσα σε οποιαδήποτε ομάδα με 25 άτομα (όπου οποιοιδήποτε άνθρωποι ανά δύο είναι φίλοι ή εχθροί), υπάρχουν είτε τέσσερεις φίλοι μεταξύ τους είτε τέσσερεις εχθροί μεταξύ τους.

27. Να δειχτεί ότι αν ο n είναι θετικός ακέραιος με $n \geq 2$, τότε ο αριθμός Ramsey $R(2, n)$ είναι ίσος με n.

28. Να δειχτεί ότι αν οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι με $m \geq 2$ και $n \geq 2$, τότε οι αριθμοί Ramsey $R(m, n)$ και $R(n, m)$ είναι ίσοι.

29. Να δειχτεί ότι στην Καλιφόρνια (με πληθυσμό 34 εκατομμυρίων) υπάρχουν τουλάχιστο έξη άνθρωποι με τα ίδια τρία αρχικά του ονόματός τους που γεννήθηκαν την ίδια ημέρα του έτους (αλλά όχι απαραίτητα και την ίδια χρονιά).

30. Να δειχτεί ότι αν στις ΗΠΑ υπάρχουν 100.000.000 άνθρωποι που κερδίζουν λιγότερα από 1.000.000 \$ (το έτος), τότε υπάρχουν δύο που την προηγούμενη χρονιά κέρδισαν ακριβώς το ίδιο ποσό χρημάτων, μέχρι δεκάρας.

31. Υπάρχουν 38 διαφορετικές χρονικές περίοδοι κατά την διάρκεια των οποίων μπορούν να προγραμματιστούν μαθήματα σε πανεπιστήμιο. Αν υπάρχουν 677 διαφορετικά μαθήματα, πόσες διαφορετικές αίθουσες χρειάζονται;

32. Ενα δίκτυο υπολογιστών αποτελείται από έξη υπολογιστές. Κάθε υπολογιστής συνδέεται απευθείας με τουλάχιστον έναν από τους άλλους υπολογιστές. Να δειχτεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο υπολογιστές στο δίκτυο που συνδέονται απευθείας με το ίδιο πλήθος άλλων υπολογιστών.

33. Ενα δίκτυο υπολογιστών αποτελείται από έξη υπολογιστές. Κάθε υπολογιστής συνδέεται απευθείας με κανέναν ή με περισσότερους από τους άλλους υπολογιστές. Να δειχτεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο υπολογιστές στο δίκτυο που συνδέονται απευθείας με το ίδιο πλήθος άλλων υπολογιστών.

34. Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος καλωδίων που χρειάζονται για την σύνδεση οκτώ υπολογιστών με τέσσερεις εκτυπωτές έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ότι τέσσερεις υπολογιστές θα έχουν απευθείας πρόσβαση σε τέσσερεις διαφορετικούς εκτυπωτές. Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

35. Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος καλωδίων που χρειάζονται για την σύνδεση 100 υπολογιστών με 20 εκτυπωτές έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ότι 20 υπολογιστές θα έχουν απευθείας πρόσβαση σε 20 διαφορετικούς εκτυπωτές. Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

***36.** Να αποδειχτεί ότι σε συγκέντρωση όπου υπάρχουν τουλάχιστο δύο άνθρωποι, υπάρχουν δύο άνθρωποι που γνωρίζουν το ίδιο πλήθος ανθρώπων στην συγκέντρωση.

37. Ενας παλαιστής του bra-de-fer είναι πρωταθλητής για χρονική περίοδο 75 ωρών. Ο παλαιστής είχε τουλάχιστον έναν αγώνα την ώρα, αλλά όχι περισσότερους από 125 συνολικά αγώνες. Να δειχτεί ότι υπάρχει χρονική περίοδος συνεχόμενων ωρών κατά την οποία ο παλαιστής είχε ακριβώς 24 αγώνες.

***38.** Πότε είναι αληθής η δήλωση στην Ασκηση 37; Αν το 24 αντικατασταθεί με
a) 2; **b)** 23; **c)** 25; **d)** 30;

39. Να δειχτεί ότι αν η f είναι συνάρτηση από το S προς το T όπου τα S και T είναι πεπερασμένα σύνολα και $n = \lceil |S|/|T| \rceil$, τότε θα υπάρχουν τουλάχιστο m στοιχεία του S που απεικονίζονται στην ίδια τιμή του T. Δηλαδή, να δειχτεί ότι υπάρχουν στοιχεία $s_1, s_2, \ldots, s_m$ του S έτσι ώστε να είναι $f(s_1) = f(s_2) = \cdots = f(s_m)$.

40. Σε ένα δρόμο υπάρχουν 51 σπίτια. Κάθε σπίτι έχει διεύθυνση μεταξύ 1000 και 1099, περιλαμβανόμενων. Να δειχτεί ότι τουλάχιστον δύο σπίτια έχουν διευθύνσεις που είναι διαδοχικοί ακέραιοι.

***41.** Εστω ότι ο x είναι άρρητος αριθμός. Να δειχτεί ότι για κάποιον θετικό ακέραιο j που δεν είναι μεγαλύτερος από n, η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ jx και του πλησιέστερου ακέραιου στον jx είναι μικρότερη από $1/n$.

42. Εστω ότι οι $n_1, n_2, \ldots, n_t$ είναι θετικοί ακέραιοι. Να δειχτεί ότι αν σε t κουτιά τοποθετηθούν $n_1 + n_2 + \cdots + n_t - t + 1$ αντικείμενα, τότε για κάποιο i, $i = 1, 2, \ldots, t$, το κουτί τάξης i θα περιέχει τουλάχιστον n_i αντικείμενα.

***43.** Στο πρόβλημα αυτό περιγράφεται μια απόδειξη του Θεωρήματος 3 με βάση την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται είναι οι ίδιοι με τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη.

a) Θεωρούμε ότι $i_k \le n$ για $k = 1, 2, \ldots, n^2+1$. Με χρήση της γενικευμένης αρχής του περιστερώνα να δειχτεί ότι υπάρχουν $n + 1$ όροι $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{n+1}}$ με $i_{k_1} = i_{k_2} = \cdots = i_{k_{n+1}}$, όπου $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$.

b) Να δειχτεί ότι $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$ για $j = 1, 2, \ldots, n$. (*Υπόδειξη:* Θεωρούμε ότι $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$, και δείχνουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $i_{k_j} > i_{k_{j+1}}$, το οποίο είναι αντίφαση.)

c) Με χρήση των (a) και (b) να δειχτεί ότι αν δεν υπάρχει αύξουσα υποακολουθία με μήκος $n + 1$, τότε θα πρέπει να υπάρχει φθίνουσα υποακολουθία με αυτό το μήκος.