71. Να αποδειχτεί ότι τουλάχιστο ένας από τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον μέσο αυτών των αριθμών. Τι είδος απόδειξης χρησιμοποιούμε;

72. Να χρησιμοποιηθεί η Ασκηση 71 για να δειχτεί ότι αν οι πρώτοι 10 θετικοί ακέραιοι μπουν γύρω από περιφέρεια, με οποιαδήποτε σειρά, υπάρχουν τρεις ακέραιοι σε διαδοχικές θέσεις στην περιφέρεια που έχουν άθροισμα μεγαλύτερο ή ίσο με 17.

73. Να αποδειχτεί ότι αν ο n είναι ακέραιος, οι παρακάτω τέσσερεις δηλώσεις είναι ισοδύναμες: (*i*) ο n είναι άρτιος, (*ii*) ο $n + 1$ είναι περιττός, (*iii*) ο $3n + 1$ είναι περιττός, (*iv*) ο $3n$ είναι άρτιος.

74. Να αποδειχτεί ότι οι παρακάτω τέσσερεις δηλώσεις είναι ισοδύναμες: (*i*) ο n^2 είναι περιττός, (*ii*) ο $1-n$ είναι άρτιος, (*iii*) ο n^3 είναι περιττός, (*iv*) ο n^2+1 είναι άρτιος.

75. Ποιοί κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων χρησιμοποιούνται για να δειχτεί το συμπέρασμα του επιχειρήματος του Lewis Carroll που περιγράφεται στο Παράδειγμα 19 της Παραγράφου 1.3;

76. Ποιοί κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων χρησιμοποιούνται για να δειχτεί το συμπέρασμα του επιχειρήματος του Lewis Carroll που περιγράφεται στο Παράδειγμα 20 της Παραγράφου 1.3;

***77.** Να προσδιοριστεί αν ισχύει το παρακάτω επιχείρημα, που έχει ληφθεί από τον Backhouse [Ba86].

Αν ο Σούπερμαν μπορούσε και ήθελε να προλάβει το κακό, θα το έκανε. Αν ο Σούπερμαν δεν μπορούσε να προλάβει το κακό, θα ήταν ανίκανος. Αν δεν ήθελε να προλάβει το κακό, θα ήταν μοχθηρός. Ο Σούπερμαν δεν προλαμβάνει το κακό. Αν ο Σούπερμαν υπάρχει, δεν είναι ούτε ανίκανος ούτε μοχθηρός. Αρα, ο Σούπερμαν δεν υπάρχει.

1.6 Σύνολα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο βιβλίο αυτό θα μελετήσουμε μια μεγάλη ποικιλία διακριτών δομών. Αυτές περιλαμβάνουν τις σχέσεις, που αποτελούνται από διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων, συνδυασμούς, που είναι μη διατεταγμένες συλλογές στοιχείων, και γραφήματα, που είναι σύνολα κορυφών και ακμών που συνδέουν τις κορυφές. Επιπλέον, θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται αυτές και άλλες διακριτές δομές στην προτυποποίηση και στην λύση προβλημάτων. Ειδικότερα, θα περιγραφούν πολλά παραδείγματα της χρήσης των διακριτών δομών σε αποθήκευση, επικοινωνία, και χειρισμό δεδομένων. Στην Παράγραφο αυτή μελετούμε την θεμελιώδη διακριτή δομή πάνω στην οποία κατασκευάζονται όλες οι άλλες διακριτές δομές, δηλαδή το σύνολο.

Τα σύνολα χρησιμοποιούνται για να ομαδοποιούν μεταξύ τους αντικείμενα.

Συχνά, τα αντικείμενα σε ένα σύνολο έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Για παράδειγμα, όλοι οι σπουδαστές, που αυτήν την στιγμή είναι γραμμένοι στο σχολείο μας αποτελούν ένα σύνολο. Παρόμοια, όλοι οι σπουδαστές, που αυτήν την στιγμή παρακολουθούν μάθημα διακριτών μαθηματικών σε οποιοδήποτε σχολείο, αποτελούν ένα σύνολο. Επιπλέον, οι σπουδαστές, που αυτή την στιγμή είναι γραμμένοι στο σχολείο μας και παρακολουθούν μάθημα διακριτών μαθηματικών, αποτελούν ένα σύνολο που μπορεί να ληφθεί αν πάρουμε τα κοινά στοιχεία των δύο πρώτων συλλογών. Η γλώσσα των συνόλων αποτελεί μέσο μελέτης παρόμοιων συλλογών με οργανωμένο τρόπο. Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Σύνολο* είναι μια μη διατεταγμένη συλλογή αντικειμένων.

Παρατηρούμε ότι ο όρος *αντικείμενο* έχει χρησιμοποιηθεί χωρίς να προσδιοριστεί τί είναι αντικείμενο. Αυτή η περιγραφή συνόλου σαν συλλογή αντικειμένων, με βάση την διαισθητική έννοια αντικειμένου, αναφέρθηκε για πρώτη φορά από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor το 1895. Η θεωρία που είναι αποτέλεσμα αυτού του διαισθητικού ορισμού του συνόλου οδηγεί σε **παράδοξα**, ή λογικές ασυνέπειες, όπως έδειξε το 1902 ο Αγγλος φιλόσοφος Bertrand Russell (βλ.Ασκηση 30 για περιγραφή ενός από αυτά τα παράδοξα). Μπορούμε να αποφύγουμε αυτές τις λογικές ασυνέπειες αν κατασκευάσουμε θεωρία συνόλων, ξεκινώντας με βασικές παραδοχές, που ονομάζονται **αξιώματα**. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχική εκδοχή της θεωρίας συνόλων του Cantor, που είναι γνωστή σαν **απλοϊκή θεωρία συνόλων**, χωρίς να αναπτύξουμε αξιωματική εκδοχή της θεωρίας συνόλων, επειδή μπορούμε να εξετάσουμε με επιτυχία όλα τα σύνολα του βιβλίου αυτού με χρήση της αρχικής θεωρίας του Cantor.

Θα προχωρήσουμε στην εξέτασή μας για τα σύνολα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Τα αντικείμενα συνόλου ονομάζονται και *στοιχεία*, ή *μέλη*, του συνόλου. Λέμε ότι σύνολο *περιέχει* τα στοιχεία του.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι περιγραφής ενός συνόλου. Ενας τρόπος είναι η καταγραφή όλων των μελών του συνόλου, όταν αυτό είναι δυνατό. Χρησιμοποιούμε συμβολισμό όπου όλα τα μέλη του συνόλου αναγράφονται μεταξύ αγκύλων. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός $\{a, b, c, d\}$ παριστάνει σύνολο με τα τέσσερα στοιχεία a, b, c, και d.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Το σύνολο V όλων των φωνήεντων στο Αγγλικό αλφάβητο γράφεται $V = \{a, e, i, o, u\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το σύνολο O των περιττών θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από το 10 εκφράζεται με το $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν και τα σύνολα συνήθως χρησιμοποιούνται για να ομαδοποιούν στοιχεία με κοινές ιδιότητες, δεν υπάρχει τίποτε που να μην επιτρέπει σε ένα σύνολο από το να έχει φαινομενικά άσχετα στοιχεία. Για παράδειγμα, το $\{a, 2, \text{Fred}, \text{New Jersey}\}$ είναι το σύνολο που περιέχει τα τέσσερα στοιχεία a, 2, Fred, και New Jersey.

Μερικές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός με αγκύλες για να περιγράφει σύνολο χωρίς να αναγράφονται όλα τα μέλη του. Αναγράφονται κάποια μέλη του συνόλου, και ύστερα χρησιμοποιούνται *τελείες* (. . .) όταν είναι φανερή η γενική μορφή των στοιχείων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Το σύνολο των θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από το 100 μπορεί να συμβολιστεί με $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$.

Τα παρακάτω σύνολα, που συμβολίζονται με έντονα γράμματα, παίζουν σημαντικό ρόλο στα διακριτά μαθηματικά:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, τό σύνολο των **φυσικών αριθμών**

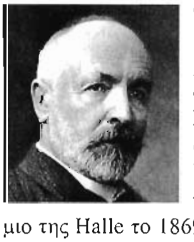
$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, το σύνολο των **ακέραιων**

$\mathbf{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, το σύνολο των **θετικών ακέραιων**

$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$, το σύνολο των **ρητών αριθμών**

$\mathbf{R}$, το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**

(Σημειώνεται ότι κάποιοι δεν θεωρούν το 0 σαν φυσικό αριθμό, και θα πρέπει να



GEORG CANTOR (1845-1918) Ο Georg Cantor γεννήθηκε στο St. Petersburg της Ρωσσίας, όπου ο πατέρας του ήταν εύπορος έμπορος. Ο Cantor ανέπτυξε το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά κατά την εφηβεία του. Ξεκίνησε τις πανεπιστημιακές του σπουδές στην Ζυρίχη το 1826, αλλά όταν ο πατέρας του πέθανε έφυγε από την Ζυρίχη. Συνέχισε τις πανεπιστημιακές του σπουδές στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου το 1863, όπου σπούδασε κάτω από τους διάσημους μαθηματικούς Weierstrass, Kummer, και Kronecker. Πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα το 1867 αφού είχε γράψει την διπλωματική του εργασία για την θεωρία αριθμών. Ο Cantor ανέλαβε μια θέση στο Πανεπιστήμιο της Halle το 1869, όπου συνέχισε να εργάζεται μέχρι τον θάνατό του.

Ο Cantor θεωρείται ιδρυτής της θεωρίας συνόλων. Οι συνεισφορές του στον τομέα αυτό περιλαμβάνουν την ανακάλυψη ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μη μετρήσιμο. Είναι γνωστός και για τις πολλές σημαντικές συνεισφορές του στην μαθηματική ανάλυση. Ο Cantor ενδιαφερόταν και για την φιλοσοφία και έγραψε εργασίες που συσχέτιζαν την θεωρία των συνόλων με την μεταφυσική.

Ο Cantor παντρεύτηκε το 1874 και απέκτησε πέντε παιδιά. Ο μελαγχολικός του χαρακτήρας ισορροπούσε με την ευτυχισμένη διάθεση της συζύγου του. Αν και πήρε μεγάλη κληρονομιά από τον πατέρα του, έπαιρνε λίγα χρήματα σαν καθηγητής. Για να μετριάσει το γεγονός αυτό, προσπάθησε να πάρει μια θέση με καλύτερα χρήματα στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Ο διορισμός του εκεί εμποδίστηκε από τον Kronecker, που δεν συμφωνούσε με τις απόψεις του Cantor για την θεωρία συνόλων. Κατά τα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Cantor υπέφερε από ψυχική ασθένεια. Πέθανε το 1918 σε ψυχιατρική κλινική.

προσέχουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται ο όρος *φυσικοί αριθμοί* όταν διαβάζουμε άλλα βιβλία.)

Επειδή πολλές μαθηματικές δηλώσεις βεβαιώνουν ότι δύο διαφορετικά καθορισμένες συλλογές αντικειμένων είναι στην πραγματικότητα το ίδιο σύνολο, χρειάζεται να κατανοήσουμε τί σημαίνει το γεγονός της ισότητας δύο συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 Δύο σύνολα είναι *ίσα* αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Τα σύνολα $\{1, 3, 5\}$ και $\{3, 5, 1\}$ είναι ίσα, επειδή έχουν τα ίδια στοιχεία. Παρατηρούμε ότι η σειρά με την οποία αναφέρονται τα στοιχεία συνόλου δεν έχει σημασία. Παρατηρούμε, ακόμη, ότι δεν έχει σημασία αν ένα στοιχείο συνόλου αναφέρεται περισσότερες από μια φορές, έτσι ώστε το $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ είναι ίδιο με το σύνολα $\{1, 3, 5\}$ επειδή έχουν τα ίδια στοιχεία.

Ενας άλλος τρόπος περιγραφής συνόλου είναι να χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός **κατασκευής συνόλου**. Χαρακτηρίζουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου με αναφορά της ιδιότητας ή των ιδιοτήτων που πρέπει να έχουν για να αποτελούν μέλη. Για παράδειγμα, το σύνολο O όλων των περιττών θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από 10 μπορεί να γραφεί

$$O = \left\{x \,\middle|\, \text{Ο } x \text{ είναι περιττός θετικός ακέραιος μικρότερος από } 10\right\}$$

Συχνά χρησιμοποιούμε αυτό το είδος συμβολισμού για να περιγράψουμε σύνολα όταν είναι αδύνατο να αναφέρουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου. Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών μπορεί να γραφεί ως

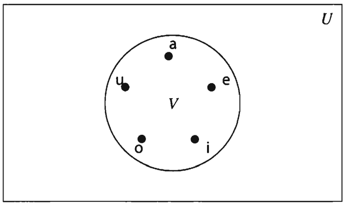
$$\mathbf{R} = \left\{x \,\middle|\, \text{Ο } x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\right\}$$

Τα σύνολα μπορούν να παρασταθούν και με γραφική παράσταση με χρήση διαγραμμάτων Venn, που ονομάστηκαν έτσι από τον Αγγλο μαθηματικό John Venn, που παρουσίασε την χρήση τους το 1881. Στα διαγράμματα Venn το **γενικό** (ή **καθολικό**) σύνολο U, που περιέχει όλα τα αντικείμενα που εξετάζονται, παριστάνεται με ένα ορθογώνιο. Μέσα στο ορθογώνιο αυτό, για την παράσταση συνόλων χρησιμοποιούνται περιφέρειες ή άλλα γεωμετρικά σχήματα. Κάποτε χρησιμοποιούνται σημεία για να παραστήσουν τα συγκεκριμένα στοιχεία συνόλου. Συχνά χρησιμοποιούνται διαγράμματα Venn για να δείξουν τις σχέσεις μεταξύ συνόλων. Στο επόμενο διάγραμμα δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα διάγραμμα Venn.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να σχεδιαστεί διάγραμμα Venn που να παριστάνει το V, το σύνολο των φωνήεντων του Αγγλικού αλφαβήτου.

Λύση: Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο για να δείξουμε το γενικό σύνολο U, που είναι το σύνολο των 26 γραμμάτων του Αγγλικού αλφάβητου. Μέσα στο ορθογώνιο αυτό σχεδιάζουμε μια περιφέρεια που θα παριστάνει το V. Μέσα στην περιφέρεια αυτή δείχνουμε το στοιχεία του V με σημεία (βλ. Σχήμα 1).



ΣΧΗΜΑ 1 Διάγραμμα Venn για το Σύνολο των Φωνήεντων.

Θα παρουσιάσουμε, τώρα, τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της συμμετοχής στα σύνολα. Γράφουμε $a \in A$ για να συμβολίσουμε ότι το a είναι στοιχείο του συνόλου A. Ο συμβολισμός $a \notin A$ δείχνει ότι το a δεν είναι μέλος του συνόλου A. Σημειώνεται ότι συνήθως χρησιμοποιούνται πεζά γράμματα για να συμβολίζουν τα στοιχεία των συνόλων.

Υπάρχει ένα ιδιαίτερο σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό ονομάζεται **κενό σύνολο**, ή **μηδενικό σύνολο**, και συμβολίζεται με το $\emptyset$. Το κενό σύνολο μπορεί να συμβολιστεί με το $\{\ \}$ (δηλ., παριστάνουμε το κενό σύνολο με ένα ζευγάρι αγκύλων που περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου.) Συχνά, σύνολο στοιχείων με ορισμένες ιδιότητες καταλήγει να είναι το κενό σύνολο. Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των θετικών ακέραιων που είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους είναι το μηδενικό σύνολο.

Ενα συνηθισμένο λάθος είναι να παρανοούμε το κενό σύνολο $\emptyset$ με το σύνολο $\{\emptyset\}$, που είναι **μοναδιαίο σύνολο**, δηλ., σύνολο με ένα στοιχείο. Το μοναδικό στοιχείο του συνόλου $\{\emptyset\}$ είναι το ίδιο το κενό σύνολο!

BERTRAND RUSSELL (1872-1970) Ο Bertrand Russell ήταν παιδί μιας εξέχουσας Αγγλικής οικογένειας που είχε ενεργό συμμετοχή στο προοδευτικό κίνημα και έντονη δέσμευση στην ελευθερία. Εμεινε ορφανός σε μικρή ηλικία και ανατέθηκε στην φροντίδα των γονέων του πατέρα του, οι οποίοι τον εκπαίδευσαν στο σπίτι. Μπήκε στο Trinity College του Cambridge το 1890, όπου διέπρεψε στα μαθηματικά και στις ηθικές επιστήμες. Κέρδισε μια υποτροφία με βάση την εργασία του στα θεμέλια της γεωμετρίας. Το 1910 το Trinity College τον διόρισε λέκτωρα της λογικής και της φιλοσοφίας των μαθηματικών.

Σε όλη του την ζωή, ο Russell πολέμησε για προοδευτικούς σκοπούς. Είχε ισχυρές ειρηνιστικές απόψεις, και οι διαμαρτυρίες του εναντίον του Πρώτου Παγκόσμιου Πολέμου οδήγησαν στην απόλυσή του από την θέση του Trinity College. Το 1918 φυλακίστηκε για 6 μήνες εξαιτίας ενός άρθρου που έγραψε το οποίο θεωρήθηκε στασιαστικό. Ο Russell πολέμησε για τα δικαιώματα των γυναικών στην Μεγάλη Βρεττανία. Το 1961, σε ηλικία 89 ετών, φυλακίστηκε για δεύτερη φορά για τις διαμαρτυρίες του υπέρ του πυρηνικού αφοπλισμού.

Το μεγαλύτερο έργο του Russell ήταν η ανάπτυξη από αυτόν των αρχών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν θεμέλια για όλα τα μαθηματικά. Το διασημότερο έργο του είναι το *Principia Mathematica*, που γράφτηκε μαζί με τον Alfred North Whitehead, όπου γίνεται προσπάθεια να αναπτυχθούν όλα τα μαθηματικά με χρήση μιάς ομάδας αρχικών αξιωμάτων. Εγραψε πολλά βιβλία φιλοσοφίας, φυσικής, και για τις πολιτικές του ιδέες. Του απονεμήθηκε το Βραβείο Nobel λογοτεχνίας το 1950.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 Λέμε ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του B αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A \subseteq B$ για να δείξουμε ότι το A είναι υποσύνολο του συνόλου B.

Βλέπουμε ότι $A \subseteq B$ αν και μόνο αν είναι αληθής η ποσοτικοποίηση

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των περιττών θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από 10 είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από 10. Το σύνολο όλων των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών στο σχολείο μας είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των σπουδαστών του σχολείου μας.

Το Θεώρημα 1 δείχνει ότι κάθε μη κενό σύνολο S είναι εξασφαλισμένο ότι έχει τουλάχιστο δύο υποσύνολα, το κενό σύνολο και το ίδιο το σύνολο S, δηλ., $\emptyset \subseteq S$ και $S \subseteq S$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Για κάθε σύνολο S,

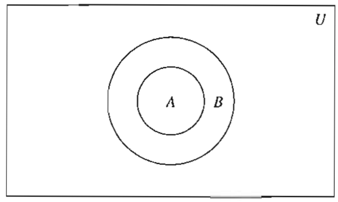
$$\text{(i) } n>1 \subseteq S \text{ και (ii) } S \subseteq S.$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την (i) και θα αφήσουμε την (ii) σαν άσκηση.

Έστω ότι S είναι ένα σύνολο. Για να δείξουμε ότι $\emptyset \subseteq S$, πρέπει να δείξουμε ότι είναι αληθής η $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$. Επειδή το κενό σύνολο δεν περιέχει στοιχεία, έπεται ότι η $x \in \emptyset$ είναι πάντοτε ψευδής. Επεται ότι η συνεπαγωγή $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ είναι πάντοτε αληθής, επειδή η υπόθεσή της είναι πάντοτε ψευδής και συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση είναι πάντοτε αληθής. Δηλαδή, η $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ είναι αληθής. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (i). Σημειώνεται ότι αυτό είναι παράδειγμα κενής απόδειξης.

JOHN VENN (1834-1923) Ο John Venn ήταν παιδί μιάς οικογένειας προαστείου του Λονδίνου που ήταν γνωστή για την φιλανθρωπία της. Παρακολούθησε σχολεία στο Λονδίνο και πήρε το πτυχίο του στα μαθηματικά από το Caius College του Cambridge το 1857. Εξελέγη μέλος αυτού του κολλεγίου και διατήρησε εκεί την ιδιότητα αυτή μέχρι τον θάνατό του. Χειροτονήθηκε ιερέας το 1859 και, μετά από σύντομη απασχόληση με το θρησκευτικό έργο, επέστρεψε στο Cambridge, όπου ανέπτυξε προγράμματα ηθικών επιστημών. Ο Venn, εκτός από το μαθηματικό του έργο, ενδιαφερόταν για την Ιστορία και έγραψε σε μεγάλη έκταση για το κολλέγιό του και για την οικογένειά του.

Το βιβλίο του Venn *Συμβολική Λογική* διευκρινίζει ιδέες που αρχικά παρουσιάστηκαν από τον Boole. Ο Venn παρουσιάζει στο βιβλίο του μια συστηματική ανάπτυξη μιάς μεθόδου που χρησιμοποιεί γεωμετρικά σχήματα, γνωστά στα διαγράμματα Venn. Σήμερα, τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται κύρια για την ανάλυση λογικών επιχειρημάτων και για να δείχνουν σχέσεις μεταξύ συνόλων. Ο Venn, εκτός από την εργασία του για την συμβολική λογική, έκανε συνεισφορές στην θεωρία πιθανοτήτων που περιγράφονται στο ευρέως χρησιμοποιούμενο βιβλίο του για το αντικείμενο αυτό.



ΣΧΗΜΑ 2 Διάγραμμα Venn που δείχνει ότι το A είναι υποσύνολο του B.

Οταν θέλουμε να τονίσουμε ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B αλλά ότι $A \neq B$, γράφουμε $A \subset B$ και λέμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B. Χρησιμοποιούνται διαγράμματα Venn για να δείξουν ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B. Σχεδιάζουμε το γενικό σύνολο U σαν ορθογώνιο. Μέσα στο ορθογώνιο σχεδιάζουμε μια περιφέρεια για το B. Επειδή το A είναι υποσύνολο του B, σχεδιάζουμε την περιφέρεια του A μέσα στην περιφέρεια του B. Η σχέση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 2.

Ενας τρόπος για να δείξουμε ότι δύο σύνολα έχουν τα ίδια στοιχεία είναι να δείξουμε ότι κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του άλλου. Με άλλα λόγια, μπορούμε να δείξουμε ότι αν τα A και B είναι σύνολα με $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$. Αυτό καταλήγει να είναι ένας χρήσιμος τρόπος για να δείχνουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα. Δηλαδή, $A = B$, όπου τα A και B είναι σύνολα, αν και μόνο αν $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ και $\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$, ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Τα σύνολα μπορούν να έχουν σαν μέλη άλλα σύνολα. Για παράδειγμα, έχουμε τα σύνολα

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ και } \{x \mid x \text{ είναι υποσύνολο του συνόλου } \{a, b\}\}$$

Σημειώνεται ότι αυτά τα δύο σύνολα είναι ίσα.

Τα σύνολα χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό σε προβλήματα απαρίθμησης, και για παρόμοιες εφαρμογές χρειάζεται να εξετάσουμε το μέγεθος των συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 Έστω ότι το S είναι σύνολο. Αν υπάρχουν ακριβώς n ξεχωριστά στοιχεία στο S όπου ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος, λέμε ότι το S είναι *πεπερασμένο σύνολο* και ότι ο n είναι ο πληθάριθμος (ή πληθικός αριθμός) του S. Ο πληθάριθμος του S συμβολίζεται με $|S|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Εστω ότι A είναι το σύνολο των περιττών θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από 10. Τότε $|A| = 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Εστω ότι το S είναι το σύνολο των γραμμάτων του Αγγλικού αλφαβήτου. Τότε $|S| = 26$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Επειδή το μηδενικό σύνολο δεν έχει στοιχεία, έπεται ότι $|\emptyset| = 0$.

Θα ενδιαφερθούμε και για σύνολα που δεν είναι πεπερασμένα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 Λέμε ότι ένα σύνολο είναι *άπειρο* αν δεν είναι πεπερασμένο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Το σύνολο των θετικών ακέραιων είναι άπειρο.

Στην Παράγραφο 3.2 θα εξετάσουμε τον πληθάριθμο των άπειρων συνόλων. Στην Παράγραφο αυτή, θα εξετάσουμε τι σημαίνει ένα σύνολο να είναι μετρήσιμο (ή αριθμήσιμο) και θα δείξουμε ότι ορισμένα σύνολα είναι μετρήσιμα ενώ άλλα όχι.

ΤΟ ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ

Πολλά προβλήματα περιέχουν την δοκιμή κάθε συνδυασμού στοιχείων συνόλου για να φανεί αν ικανοποιούν κάποια ιδιότητα. Για να εξετάσουμε όλους αυτούς τους συνδυασμούς των στοιχείων συνόλου S, κατασκευάζουμε ένα νέο σύνολο που σαν μέλη του έχει όλα τα υποσύνολα του S.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 Αν δίνεται σύνολο S, *δυναμοσύνολο* του S είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου S. Το δυναμοσύνολο του S συμβολίζεται με $P(S)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Ποιό είναι το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{0, 1, 2\}$;

Λύση: Το δυναμοσύνολο $P(\{0, 1, 2\})$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\{0, 1, 2\}$. Αρα,

$$P(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

Σημειώνεται ότι το κενό σύνολο και το ίδιο το σύνολο είναι μέλη αυτού του συνόλου υποσυνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Ποιό είναι το δυναμοσύνολο του κενού συνόλου; Ποιό είναι το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{\emptyset\}$;

Λύση: Το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του. Κατά συνέπεια,

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Το σύνολο $\{\emptyset\}$ έχει μόνο δύο υποσύνολα, δηλ., το $\{\emptyset\}$ και το ίδιο το σύνολο $\{\emptyset\}$. Αρα,

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Αν ένα σύνολο έχει n στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολό του έχει 2^n στοιχεία. Θα δείξουμε αυτό το γεγονός με πολλούς τρόπους σε επόμενες παραγράφους του βιβλίου.

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Συχνά είναι σημαντική η σειρά (τάξη) των στοιχείων μιας συλλογής. Επειδή τα σύνολα δεν είναι διατεταγμένα, για την παράσταση διατεταγμένων συλλογών χρειάζεται μια διαφορετική δομή. Αυτή η δομή προσφέρεται με τις **διατεταγμένες ομάδες *n* στοιχείων**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 Η *διατεταγμένη ομάδα n στοιχείων* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι η διατεταγμένη συλλογή που έχει το a_1 πρώτο στοιχείο, το a_2 δεύτερο στοιχείο, ... , και το a_n n-στό στοιχείο.

Λέμε ότι δύο διατεταγμένες ομάδες n στοιχείων είναι ίσες αν και μόνο αν κάθε αντίστοιχο ζευγάρι των στοιχείων τους είναι ίσο. Με άλλα λόγια , $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ αν και μόνο αν $a_i = b_i$, για $i = 1, 2, \ldots, n$. Ειδικότερα, οι διατεταγμένες ομάδες 2 στοιχείων ονομάζονται *διατεταγμένα ζεύγη*. Τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b) και (c, d) είναι ίσα αν και μόνο αν $a = c$ και $b = d$. Σημειώνεται ότι τα (a, b) και (b, a) δεν είναι ίσα εκτός και αν $a = b$.

Πολλές από τις διακριτές δομές που θα μελετήσουμε σε επόμενα Κεφάλαια βασίζονται στην έννοια του *Καρτεσιανού γινόμενου* συνόλων (που ονομάστηκαν από τον René Descartes). Πρώτα ορίζουμε το Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Το *Καρτεσιανό γινόμενο* των A και B, που συμβολίζεται με $A \times B$, είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$. Αρα,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Εστω ότι το A παριστάνει όλους τους φοιτητές ενός πανεπιστημίου, και έστω ότι το B παριστάνει όλα τα μαθήματα που προσφέρονται στο πανεπιστήμιο. Ποιό είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$;

Λύση: Το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που έχουν την μορφή (a, b), όπου το a είναι ένας φοιτητής του πανεπιστημίου και το b ένα μάθημα που προσφέρεται στο πανεπιστήμιο. Το σύνολο $A \times B$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παριστάνει όλες τις δυνατές εγγραφές σε μαθήματα του πανεπιστημίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Ποιό είναι το Καρτεσιανό γινόμενο των $A = \{1, 2\}$ και $B = \{a, b, c\}$;

Λύση: Το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}.$$

Υποσύνολο R του Καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ ονομάζεται **σχέση** από το σύνολο A προς το σύνολο B. Τα στοιχεία του R είναι διατεταγμένα ζεύγη, όπου το πρώτο στοιχείο ανήκει στο A και το δεύτερο στο B. Για παράδειγμα, το $R = \{(a, 0), (a, 1), (b, 1), (c, 0)\ (c, 3)\}$ είναι σχέση από το σύνολο $\{a, b, c\}$ προς το σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Θα εξετάσουμε τις σχέσεις με λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 7.

Τα Καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$ και $B \times A$ δεν είναι ίσα, εκτός και αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ (έτσι ώστε $A \times B = \emptyset$) ή εκτός και αν $A = B$ (βλ. Ασκηση 26, στο τέλος αυτή της Παραγράφου). Αυτό φαίνεται στο Παράδειγμα 15.

RENÉ DESCARTES (1596-1650) Ο René Descartes ήταν παιδί οικογένειας ευγενών που ζούσαν κοντά στην πόλη Tours της Γαλλίας, περίπου 350 χιλιόμετρα νοτιοδυτικά του Παρισιού. Ηταν το τρίτο παιδί της πρώτης συζύγου του πατέρα του. Η μητέρα του πέθανε μερικές ημέρες μετά την γέννησή του. Ο πατέρας του, που ήταν τοπικός δικαστής, άργησε να στείλλει το παιδί στο σχολείο εξαιτίας της κακής υγείας του μέχρι την ηλικία των 8 ετών, οπότε ο René μπήκε στο κολλέγιο Ιησουιτών στην πόλη La Flèche. Ο προϊστάμενος του σχολείου τον συμπάθησε και τον επέτρεψε να μένει στο κρεβάτι μέχρι αργά το πρωί εξαιτίας της εύθραυστης υγείας του. Από τότε, ο Descartes περνούσε τα πρωινά του στο κρεβάτι, και θεωρούσε αυτές τις ώρες τις περισσότερο παραγωγικές για σκέψη.

Ο Descartes τελείωσε το σχολείο το 1612, και μετακόμισε στο Παρίσι, όπου πέρασε 2 χρόνια με σπουδές μαθηματικών. Το 1616 πήρε πτυχίο νομικής από το Πανεπιστήμιο του Poitiers. Σε ηλικία 18 ετών αηδίασε με τις σπουδές και αποφάσισε να δει τον κόσμο. Πήγε στο Παρίσι όπου έγινε επιτυχημένος χαρτοπαίχτης. Κουράστηκε, όμως, από την κακή ζωή και μετακόμισε στο προάστειο του Saint-Germaine, όπου αφιερώθηκε στην μελέτη των μαθηματικών. Οταν οι χαρτοπαίκτες φίλοι του τον βρήκαν, αποφάσισε να φύγει από την Γαλλία και να κάνει στρατιωτική σταδιοδρομία. Ποτέ του, ωστόσο, δεν πολέμησε. Μια ημέρα, όταν βγήκε στο κρύο από ένα υπερβολικά ζεστό δωμάτιο σε ένα στρατόπεδο, του ήρθε πυρετός με όνειρα που αποκάλυψαν την μελλοντική του σταδιοδρομία σαν μαθηματικού και φιλόσοφου.

Μετά το τέλος της στρατιωτικής του σταδιοδρομίας, ταξίδεψε σε όλη την Ευρώπη. Εμεινε αρκετά χρόνια στο Παρίσι, όπου μελέτησε μαθηματικά και φιλοσοφία και κατασκεύασε οπτικά όργανα. Αποφάσισε να πάει στην Ολλανδία, όπου έμεινε 20 χρόνια περιπλανώμενος στην χώρα και ολοκλήρωσε τις σπουδαιότερες εργασίες του. Την εποχή αυτή, έγραψε πολλά βιβλία, μεταξύ των οποίων το *Discours*, που περιέχει την συνεισφορά του στην αναλυτική γεωμετρία, για την οποία είναι πολύ γνωστός. Είχε, ακόμη, θεμελιώδη συνεισφορά στην φιλοσοφία.

Το 1649 ο Descartes προσκλήθηκε από την Βασίλισσα Χριστίνα να επισκεφθεί την Αυλή της στην Σουηδία για να τής διδάξει φιλοσοφία. Αν και δεν είχε διάθεση να μείνει εκεί που ονόμαζε "χώρα με αρκούδες ανάμεσα σε βράχια και πάγους," τελικά δέχτηκε την πρόσκληση και πήγε στην Σουηδία. Δυστυχώς, ο χειμώνας του 1649-1650 ήταν εξαιρετικά κρύος. Ο Descartes έπαθε πνευμονία και πέθανε στα μέσα Φεβρουαρίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Να δειχτεί ότι το Καρτεσιανό γινόμενο $B \times A$ δεν είναι ίσο με το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$, όπου τα A και B είναι όπως στο Παράδειγμα 14.

Λύση: Το Καρτεσιανό γινόμενο $B \times A$ είναι

$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}.$$

Αυτό δεν είναι ίσο με το $A \times B$, που βρέθηκε στο Παράδειγμα 14.

Μπορεί να οριστεί και το Καρτεσιανό γινόμενο περισσότερων από δύο συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 Το *Καρτεσιανό γινόμενο* των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$, που συμβολίζεται με $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, είναι το σύνολο των διατεταγμένων ομάδων n στοιχείων $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, όπου το a_i ανήκει στο A_i για $i = 1, 2, \ldots, n$. Με άλλα λόγια

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ για } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Ποιό είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$, όπου $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, και $C = \{0, 1, 2\}$;

Λύση: Το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες τριάδες (a, b, c), όπου $a \in A$, $b \in B$, και $c \in C$. Αρα,

$$A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}.$$

ΧΡΗΣΗ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ ΜΕ ΠΟΣΟΤΙΚΟΠΟΙΗΤΕΣ

Μερικές φορές προσδιορίζουμε με σαφήνεια στον συμβολισμό το πεδίο ορισμού δήλωσης. Ειδικότερα, η $\forall x \in S P(x)$ συμβολίζει την καθολική ποσοτικοποίηση της $P(x)$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο S. Με παρόμοιο τρόπο, η $\exists x \in S P(x)$ συμβολίζει την υπαρξιακή ποσοτικοποίηση τής $P(x)$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Τι σημαίνουν οι δηλώσεις $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ και $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$;

Λύση: Η δήλωση $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ αναφέρει ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x, $x^2 \geq 0$. Η δήλωση αυτή μπορεί να εκφραστεί σαν "Το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικό." Αυτή είναι μια αληθής δήλωση.

Η δήλωση $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ αναφέρει ότι υπάρχει ακέραιος x, έτσι ώστε να είναι $x^2 = 1$. Η δήλωση αυτή μπορεί να εκφραστεί σαν "Υπάρχει ακέραιος του οποίου το τετράγωνο είναι το 1." Και αυτή είναι αληθής δήλωση, επειδή ο $x = 1$ είναι ένας τέτοιος ακέραιος (όπως και ο -1).

Ασκήσεις

1. Να αναφερθούν τα μέλη των παρακάτω συνόλων.

a) $\{x \mid$ ο x είναι πραγματικός αριθμός έτσι ώστε να είναι $x^2 = 1\}$

b) $\{x \mid$ ο x είναι θετικός ακέραιος μικρότερος από $12\}$

c) $\{x \mid$ ο x είναι το τετράγωνο ακέραιου και $x < 100\}$

d) $\{x \mid$ ο x είναι ακέραιος, έτσι ώστε να είναι $x^2 = 2\}$

2. Να χρησιμοποιηθεί συμβολισμός κατασκευής συνόλου για να δοθεί περιγραφή των παρακάτω συνόλων.

a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ **b)** $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **c)** $\{m, n, o, p\}$

3. Να προσδιοριστεί αν τα παρακάτω ζεύγη συνόλων είναι ίσα.

a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}, \{5, 3, 1\}$ **b)** $\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$ **c)** $\emptyset, \{\emptyset\}$

4. Εστω ότι $A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 6\}, C = \{4, 6\}$, και $D = \{4, 6, 8\}$. Να προσδιοριστεί ποιά από αυτά τα σύνολα είναι υποσύνολα ποιών άλλων από αυτά τα σύνολα.

5. Στα παρακάτω σύνολα, να προσδιοριστεί αν το 2 είναι στοιχείο του κάθε ενός συνόλου.

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid$ ο x είναι ακέραιος μεγαλύτερος από $1\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid$ ο x είναι το τετράγωνο ακέραιου$\}$

c) $\{2, \{2\}\}$ **d)** $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$ **e)** $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ **f)** $\{\{\{2\}\}\}$

6. Στα σύνολα της Άσκησης 5, να προσδιοριστεί αν το $\{2\}$ είναι στοιχείο ποιού συνόλου.

7. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

a) $0 \in \emptyset$ **b)** $\emptyset \in \{0\}$ **c)** $\{0\} \subset \emptyset$ **d)** $\emptyset \subset \{0\}$

e) $\{0\} \in \{0\}$ **f)** $\{0\} \subset \{0\}$ **g)** $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

8. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **b)** $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **c)** $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ **d)** $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **f)** $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **g)** $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

9. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

a) $x \in \{x\}$ **b)** $\{x\} \subseteq \{x\}$ **c)** $\{x\} \in \{x\}$ **d)** $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\emptyset \subseteq \{x\}$ **f)** $\emptyset \in \{x\}$

10. Να χρησιμοποιηθεί διάγραμμα Venn για να δειχτεί η σχέση $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$.

11. Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα, έτσι ώστε να είναι $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$. Να δειχτεί ότι $A \subseteq C$.

12. Να βρεθούν δύο σύνολα A και B έτσι ώστε να είναι $A \in B$ και $A \subseteq B$.

13. Ποιός είναι ο πληθάριθμος των παρακάτω συνόλων;

a) $\{a\}$ **b)** $\{\{a\}\}$ **c)** $\{a,\{a\}\}$ **d)** $\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$

14. Ποιός είναι ο πληθικός αριθμός των παρακάτω συνόλων;

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset\}$ **c)** $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ **d)** $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

15. Να βρεθεί το δυναμοσύνολο των παρακάτω συνόλων.

a) $\{a\}$ **b)** $\{a,b\}$ **c)** $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

16. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $A = B$ αν τα A και B είναι δύο σύνολα με το ίδιο δυναμοσύνολο;

17. Πόσα στοιχεία έχει το καθένα από τα παρακάτω σύνολα;

a) $P(\{a,b,\{a,b\}\})$ **b)** $P(\{\emptyset,a,\{a\},\{\{a\}\}\})$ **c)** $P(P(\emptyset))$

18. Να προσδιοριστεί αν καθένα από τα παρακάτω σύνολα είναι δυναμοσύνολο κάποιου συνόλου.

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset,\{a\}\}$ **c)** $\{\emptyset,\{a\},\{\emptyset,a\}\}$ **d)** $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

19. Εστω ότι $A = \{\mathrm{a}, b, c, d\}$ και $B = \{y, z\}$. Να βρεθούν τα

a) $A\times B$ **b)** $B\times A$

20. Ποιό είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $A\times B$, όπου A είναι το σύνολο των μαθημάτων που προσφέρονται από τον μαθηματικό τομέα πανεπιστημίου και B είναι το σύνολο των καθηγητών μαθηματικών αυτού του πανεπιστήμιου;

21. Ποιό είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $A\times B\times C$, όπου A είναι το σύνολο όλων των αεροπορικών εταιρειών και B και C είναι και τα δύο το σύνολο όλων των πόλεων στις ΗΠΑ;

22. Εστω ότι $A\times B=\emptyset$, όπου τα A και B είναι σύνολα. Τι συμπεραίνουμε;

23. Εστω ότι το A είναι σύνολο. Να δειχτεί ότι $\emptyset\times A = A\times\emptyset=\emptyset$.

24. Εστω ότι $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, και $C = \{0,1\}$. Να βρεθούν τα

a) $A\times B\times C$ **b)** $C\times B\times A$ **c)** $C\times A\times B$ **d)** $B\times B\times B$

25. Πόσα διαφορετικά στοιχεία έχει το $A\times B$, αν το A έχει m στοιχεία και το B n στοιχεία;

26. Να δειχτεί ότι $A\times B \neq B\times A$, όπου τα A και B είναι μη κενά σύνολα, εκτός και αν $A = B$.

27. Να μεταφραστούν οι παρακάτω ποσοτικοποιήσεις στην καθομιλουμένη και να προσδιοριστεί η τιμή αληθείας τους.

a) $\forall x\in \mathbf{R}(x^2 \neq -1$ **b)** $\exists x\in \mathbf{Z}(x^2=2)$ **c)** $\forall x\in \mathbf{Z}(x^2>0)$ **d)** $\exists x\in \mathbf{R}(x^2=x)$

28. Να μεταφραστούν οι παρακάτω ποσοτικοποιήσεις στην καθομιλουμένη και να προσδιοριστεί η τιμή τους αληθείας.

a) $\exists x \in \mathbf{R}(x^3 = -1)$ **b)** $\exists x \in \mathbf{Z}(x+1 > x)$

c) $\forall x \in \mathbf{Z}(x-1 \in \mathbf{Z})$ **d)** $\forall x \in \mathbf{Z}(x^2 \in \mathbf{Z})$

***29.** Να δειχτεί ότι το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) μπορεί να οριστεί ως σύνολο τύπου με το $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. (*Υπόδειξη:* Πρώτα να δειχτεί ότι $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ αν και μόνο αν $a = c$ και $b = d$.)

***30.** Στην άσκηση αυτή παρουσιάζεται το **παράδοξο του Russell**. Εστω ότι το S είναι το σύνολο που περιέχει σύνολο x αν το σύνολο x δεν ανήκει στον εαυτό του, έτσι ώστε να είναι $S = \{x \mid x \notin x\}$.

a) Να δειχτεί ότι η υπόθεση ότι το S είναι μέλος του S οδηγεί σε αντίφαση.

b) Να δειχτεί ότι η υπόθεση ότι το S δεν είναι μέλος του S οδηγεί σε αντίφαση.

Από τα μέρη (*a*) και (*b*) έπεται ότι το σύνολο S δεν μπορεί να οριστεί με τον τρόπο που ορίστηκε. Μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το παράδοξο, αν περιορίσουμε τα είδη στοιχείων που μπορούν να έχουν τα σύνολα.

***31.** Να περιγραφεί μια διαδικασία αναγραφής όλων των υποσυνόλων πεπερασμένου συνόλου.

1.7 Πράξεις επί των Συνόλων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

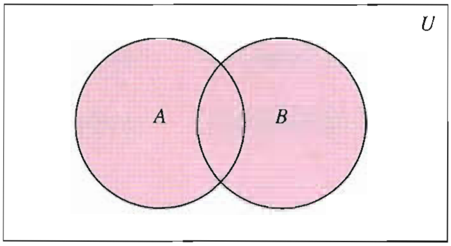
Δύο σύνολα μπορούν να συνδυαστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, αν ξεκινήσουμε με το σύνολο των σπουδαστών μαθηματικών και το σύνολο των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών στο σχολείο μας, μπορούμε να σχηματίσουμε το σύνολο των φοιτητών μαθηματικών ή επιστήμης υπολογιστών, το σύνολο των φοιτητών μαθηματικών και ταυτόχρονα επιστήμης υπολογιστών, το σύνολο των φοιτητών που δεν είναι μαθηματικοί, κ.ο.κ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Η *ένωση* των συνόλων A και B, που συμβολίζεται με $A \cup B$, είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A ή στο B, είτε και στα δύο.

Στοιχείο x ανήκει στην ένωση των συνόλων A και B αν και μόνο αν το x ανήκει στο A ή το x ανήκει στο B. Αυτό μας λέει ότι

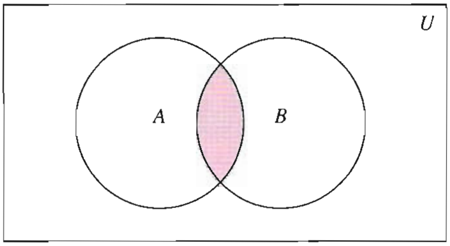
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Το διάγραμμα Venn που φαίνεται στο Σχήμα 1 παριστάνει την ένωση των δύο συνόλων A και B. Η σκιασμένη περιοχή μέσα στον κύκλο που παριστάνει το A ή



Είναι σκιασμένη η $A \cup B$

ΣΧΗΜΑ 1 Διάγραμμα Venn που παριστάνει την Ενωση των A και B.



Είναι σκιασμένη η $A \cap B$

ΣΧΗΜΑ 2 Διάγραμμα Venn που παριστάνει την Τομή των A και B.

στον κύκλο που παριστάνει το B είναι η περιοχή που παριστάνει την ένωση των A και B.

Θα δώσουμε μερικά παραδείγματα της ένωσης συνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Η ένωση των συνόλων $\{1, 3, 5\}$ και $\{1, 2, 3\}$ είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, 5\}$, δηλαδή $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Η ένωση του συνόλου όλων των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών και του συνόλου όλων των σπουδαστών μαθηματικών στο σχολείο μας είναι το σύνολο των σπουδαστών στο σχολείο μας που σπουδάζουν είτε μαθηματικά είτε επιστήμη υπολογιστών (ή και τα δύο).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Η *τομή* των συνόλων A και B, που συμβολίζεται με $A \cap B$, είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B.

Στοιχείο x ανήκει στην τομή των συνόλων A και B αν και μόνο αν το x ανήκει στο A και το x ανήκει στο B. Αυτό μας λέει ότι

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Το διάγραμμα Venn που φαίνεται στο Σχήμα 2 παριστάνει την τομή των δύο συνόλων A και B. Η σκιασμένη περιοχή μέσα και στους δύο κύκλους που παριστάνουν τα σύνολα A και B είναι η περιοχή που παριστάνει την τομή των A και B. Θα δώσουμε μερικά παραδείγματα της τομής συνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Η τομή των συνόλων $\{1, 3, 5\}$ και $\{1, 2, 3\}$ είναι το σύνολο $\{1, 3,\}$, δηλαδή $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Η τομή του συνόλου όλων των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών και του συνόλου όλων των σπουδαστών μαθηματικών στο σχολείο μας είναι το σύνολο όλων των σπουδαστών στο σχολείο μας που σπουδάζουν ταυτόχρονα μαθηματικά και επιστήμη υπολογιστών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 Δύο σύνολα ονομάζονται *διαζευγμένα ή ξένα μεταξύ τους*, αν η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Εστω $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ και $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Επειδή $A \cap B = \emptyset$, τα A και B είναι διαζευγένα.

Συχνά ενδιαφερόμαστε να βρούμε τον πληθάριθμο της ένωσης συνόλων. Για να βρούμε το πλήθος των στοιχείων στην ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων A και B, παρατηρούμε ότι η $|A|+|B|$ μετρά κάθε στοιχείο που βρίσκεται στο A αλλά όχι στο B ή στο B αλλά όχι στο A μόνο μια φορά, και κάθε στοιχείο που βρίσκεται και στο A και στο B δύο φορές. Ετσι, αν το πλήθος των στοιχείων που βρίσκονται και στο A και στο B αφαιρεθεί από την $|A|+|B|$, τα στοιχεία της $A \cap B$ θα μετρηθούν μόνο μια φορά. Αρα,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Η γενίκευση αυτού του αποτελέσματος στις ενώσεις αυθαίρετου πλήθους συνόλων ονομάζεται **αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού**. Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού αποτελεί σημαντική τεχνική που χρησιμοποιείται στην τέχνη της απαρίθμησης. Θα εξετάσουμε με λεπτομέρεια αυτή την αρχή και άλλες τεχνικές αρίθμησης στα Κεφάλαια 4 και 6.

Υπάρχουν άλλοι σημαντικοί τρόποι συνδυασμού συνόλων.

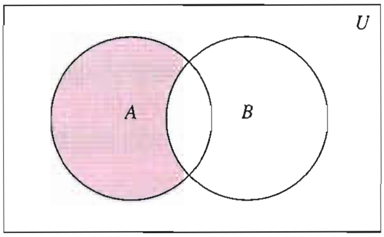
ΟΡΙΣΜΟΣ 4 Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Η *διαφορά* των συνόλων A και B, που συμβολίζεται με $A - B$, είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που βρίσκονται στο A αλλά όχι στο B. Η διαφορά των A και B ονομάζεται και *συμπλήρωμα* του B *ως προς* το A.

Ένα στοιχείο x ανήκει στην διαφορά των A και B αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \notin B$. Αυτό μας λέει ότι

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Το διάγραμμα Venn που φαίνεται στο Σχήμα 3 παριστάνει την διαφορά των συνόλων A και B. Η σκιασμένη περιοχή μέσα στον κύκλο που παριστάνει το A και έξω από τον κύκλο που παριστάνει το B είναι η περιοχή που παριστάνει την A–B.

Δίνουμε μερικά παραδείγματα διαφορών συνόλων.



Είναι σκιασμένη η $A-B$

ΣΧΗΜΑ 3 Διάγραμμα Venn για την Διαφορά των A και B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Η διαφορά των $\{1, 3, 5\}$ και $\{1, 2, 3\}$ είναι το σύνολο $\{5\}$, δηλ., $\{1, 3, 5\}-\{1, 2, 3\} = \{5\}$. Αυτή είναι διαφορετική από την διαφορά των $\{1, 2, 3\}$ και $\{1, 3, 5\}$, η οποία είναι το σύνολο $\{2\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Η διαφορά του συνόλου των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών στο σχολείο μας και του συνόλου των σπουδαστών μαθηματικών στο σχολείο μας είναι το σύνολο όλων των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών στο σχολείο μας που δεν είναι και σπουδαστές μαθηματικών.

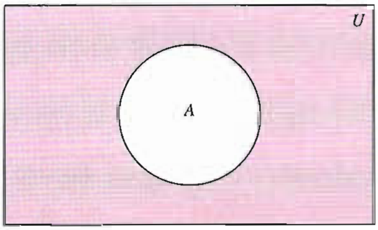
Από την στιγμή που έχει προσδιοριστεί το γενικό σύνολο U, μπορεί να οριστεί το **συμπλήρωμα** συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 Εστω ότι το U είναι το γενικό σύνολο. Το *συμπλήρωμα* του συνόλου A, που συμβολίζεται με $\overline{A}$, είναι το συμπλήρωμα του A ως προς το U. Με άλλα λόγια, το συμπλήρωμα του συνόλου A είναι το $U-A$.

Ένα στοιχείο ανήκει στο $\overline{A}$ αν και μόνο αν $x \notin A$. Αυτό μας λέει ότι

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Στο Σχήμα 4 η σκιασμένη περιοχή έξω από τον κύκλο που παριστάνει το A είναι η περιοχή που παριστάνει το $\overline{A}$. Δίνουμε μερικά παραδείγματα του συμπληρώματος συνόλου.



Είναι σκιασμένο το $\overline{A}$

ΣΧΗΜΑ 4 Διάγραμμα Venn για το Συμπλήρωμα του Συνόλου A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Έστω $A = \{a, e, i, o, u\}$ (όπου το γενικό σύνολο είναι το σύνολο των γραμμάτων του Αγγλικού αλφαβήτου). Τότε $\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω ότι A είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων που είναι μεγαλύτεροι από 10 (με γενικό σύνολο, το σύνολο όλων των θετικών ακέραιων). Τότε $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Στον Πίνακα 1 αναγράφονται οι σημαντικότερες ταυτότητες συνόλων. Εδώ θα αποδείξουμε μερικές από τις ταυτότητες αυτές, με τρεις διαφορετικές μεθόδους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 Ταυτότητες Συνόλων

Ταυτότητα	*Ονομα*
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Κανόνες ταυτότητας
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Κανόνες κυριότητας
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Μοναδιαίοι κανόνες
$\overline{(\overline{A})} = A$	Κανόνας συμπλήρωσης
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Αντιμεταθετικοί κανόνες
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Προσεταιριστικοί κανόνες
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Επιμεριστικοί κανόνες
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Κανόνες De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Κανόνες απορρόφησης
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Κανόνες συμπληρώματος

Οι μέθοδοι αυτές παρουσιάζονται για να δειχτεί ότι συχνά υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις για την λύση προβλήματος. Οι αποδείξεις των υπόλοιπων ταυτοτήτων θα αφεθούν σαν ασκήσεις. Ο αναγνώστης πρέπει να προσέξει την ομοιότητα μεταξύ αυτών των ταυτοτήτων συνόλων και των λογικών ισοδυναμιών που εξετάστηκαν στην Παράγραφο 1.2. Μάλιστα, οι ταυτότητες συνόλων μπορούν να αποδειχτούν απευθείας από τις αντίστοιχες λογικές ισοδυναμίες. Επιπλέον, και οι δύο είναι ειδικές περιπτώσεις των ταυτοτήτων που ισχύουν για την άλγεβρα Boole (που εξετάζεται στο Κεφάλαιο 10).

Ενας τρόπος απόδειξης ότι δύο σύνολα είναι ίσα είναι να δείξουμε ότι το ένα από τα σύνολα είναι υποσύνολο του άλλου και αντίστροφα. Θα δείξουμε αυτό το είδος απόδειξης με απόδειξη του δεύτερου κανόνα De Morgan.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να αποδειχτεί ότι $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι αυτά τα δύο σύνολα είναι ίσα με το να δείξουμε ότι το καθένα είναι υποσύνολο του άλλου.

Πρώτα, υποθέτουμε ότι $x \in \overline{A \cap B}$. Σύμφωνα με τον ορισμό του συμπληρώματος, $x \notin A \cap B$. Σύμφωνα με τον ορισμό της τομής, η $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ είναι αληθής. Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα De Morgan (από την λογική), βλέπουμε ότι $\neg(x \in A)$ ή ότι $\neg(x \in B)$. Αρα, σύμφωνα με τον ορισμό της άρνησης, $x \notin A$ ή $x \notin B$. Σύμφωνα με τον ορισμό του συμπληρώματος, $x \in \overline{A}$ ή $x \in \overline{B}$. Από τον ορισμό της ένωσης έπεται ότι $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Αυτή δείχνει ότι $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Έστω, τώρα, ότι $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Σύμφωνα με τον ορισμό της ένωσης, $x \in \overline{A}$ ή $x \in \overline{B}$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του συμπληρώματος, βλέπουμε ότι $x \notin A$ ή $x \notin B$. Κατά συνέπεια, είναι αληθής η $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$. Σύμφωνα με τον κανόνα De Morgan (από την λογική), συμπεραίνουμε ότι είναι αληθής η $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$. Σύμφωνα με τον ορισμό της τομής, έπεται ότι ισχύει η $\neg(x \in A \cap B)$. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του συμπληρώματος για να συμπεράνουμε ότι $x \in \overline{A \cap B}$. Αυτή δείχνει ότι $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Επειδή έχουμε δείξει ότι κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του άλλου, τα δύο σύνολα είναι ίσα, και αποδεικνύεται η ταυτότητα.

Μπορούμε να εκφράσουμε με περισσότερο λιτό τρόπο τις λογικές σκέψεις που χρησιμοποιούνται στο Παράδειγμα 10 με χρήση συμβολισμού κατασκευής συνόλων, όπως δείχνει το Παράδειγμα 11.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να χρησιμοποιηθεί συμβολισμός κατασκευής συνόλων και λογικές ισοδυναμίες για να δειχτεί ότι $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Λύση: Η παρακάτω αλυσίδα ισοτήτων δίνει μια επίδειξη αυτής της ταυτότητας:

$$\begin{aligned}\overline{A\cap B} &= \{x \mid x\notin A\cap B\}\\ &= \{x \mid \neg(x\in (A\cap B))\}\\ &= \{x \mid \neg(x\in A\wedge x\in B)\}\\ &= \{x \mid x\notin A\vee x\notin B\}\\ &= \{x \mid x\in \overline{A}\vee x\in \overline{B}\}\\ &= \{x \mid x\in \overline{A}\cup\overline{B}\}\\ &= \overline{A}\cup\overline{B}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην τέταρτη ισότητα αυτής της αλυσίδας χρησιμοποιήθηκε ο δεύτερος κανόνας De Morgan για λογικές ισοδυναμίες.

Η απόδειξη μιάς ταυτότητας συνόλων που περιέχει περισσότερα από δύο σύνολα με το να δείξουμε ότι κάθε πλευρά της ταυτότητας αποτελεί υποσύνολο της άλλης, συχνά απαιτεί να παρακολουθούμε τις διάφορες περιπτώσεις, όπως φαίνεται με την απόδειξη στο Παράδειγμα 12, ενός από τους επιμεριστικούς κανόνες συνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Να αποδειχτεί ότι $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ για όλα τα σύνολα A, B, και C.

Λύση: Θα αποδείξουμε αυτή την ταυτότητα αν δείξουμε ότι κάθε πλευρά είναι υποσύνολο της άλλης πλευράς.

Εστω ότι $x\in A\cap(B\cup C)$. Τότε $x\in A$ και $x\in B\cup C$. Σύμφωνα με τον ορισμό της ένωσης, έπεται ότι $x\in A$, και $x\in B$ ή $x\in C$ (ή και τα δύο). Κατά συνέπεια, γνωρίζουμε ότι $x\in A$ και $x\in B$ ή ότι $x\in A$ και $x\in C$. Σύμφωνα με τον ορισμό της τομής, έπεται ότι $x\in A\cap B$ ή ότι $x\in A\cap C$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της ένωσης, συμπεραίνουμε ότι $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Συμπεραίνουμε ότι $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Εστω, τώρα, ότι $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της ένωσης, $x\in A\cap B$ ή $x\in A\cap C$. Σύμφωνα με τον ορισμό της τομής, έπεται ότι $x\in A$ και $x\in B$ ή ότι $x\in A$ και $x\in C$. Από αυτό βλέπουμε ότι $x\in A$, και $x\in B$ ή $x\in C$. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον ορισμό της ένωσης βλέπουμε ότι $x\in A$ και $x\in B\cup C$.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό της τομής, έπεται ότι $x\in A\cap(B\cup C)$. Συμπεραίνουμε ότι $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη της ταυτότητας.

Οι ταυτότητες συνόλων μπορούν να αποδειχτούν και με χρήση **πινάκων μελών**. Εξετάζουμε κάθε συνδυασμό συνόλων όπου μπορεί να ανήκει ένα στοιχείο και επαληθεύουμε ότι στοιχεία στους ίδιους συνδυασμούς συνόλων ανήκουν και στα δύο σύνολα της ταυτότητας. Για να δείξουμε ότι ένα στοιχείο βρίσκεται σε σύνολο, χρησιμοποιείται ένα 1. Για να δείξουμε ότι ένα στοιχείο δεν βρίσκεται σε σύνολο, χρησιμοποιείται ένα 0. (Ο αναγνώστης θα διαπιστώσει την ομοιότητα μεταξύ πινάκων μελών και πινάκων αληθείας.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Να χρησιμοποιηθεί πίνακας μελών για να δειχτεί ότι

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Λύση: Στον Πίνακα 2 φαίνεται ο πίνακας μελών γι' αυτούς τους συνδυασμούς συνόλων. Ο πίνακας αυτός έχει οκτώ σειρές. Επειδή οι στήλες για τις $A \cap (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ είναι ίδιες, η ταυτότητα ισχύει.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 Πίνακας Μελών για την Επιμεριστική Ιδιότητα

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Μπορούν να βρεθούν και επιπλέον ταυτότητες συνόλων, αν χρησιμοποιηθούν οι ταυτότητες που ήδη έχουν αποδειχτεί. Βλ. Παράδειγμα 14.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

Λύση: Εχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) && \text{σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα De Morgan} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{σύμφωνα με τον δεύτερο κανόνα De Morgan} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{σύμφωνα με τον αντιμεταθετικό κανόνα για τομές} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{σύμφωνα με τον αντιμεταθετικό κανόνα για ενώσεις}
\end{aligned}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΕΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟΜΕΣ

Επειδή οι ενώσεις και οι τομές συνόλων ικανοποιούν τους προσεταιριστικούς κανόνες, τα σύνολα $A \cup B \cup C$ και $A \cap B \cap C$ ορίζονται όταν τα A, B, και C είναι σύνολα. Σημειώνεται ότι το $A \cup B \cup C$ περιέχει τα στοιχεία που βρίσκονται σε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα A, B, και C και ότι το $A \cap B \cap C$ περιέχει τα στοιχεία που βρίσκονται σε όλα τα A, B, και C. Αυτοί οι συνδυασμοί των τριών συνόλων, A, B, και C, φαίνονται στο Σχήμα 5.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Εστω ότι $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, και $C = \{0, 3, 6, 9\}$. Ποιά είναι η $A \cup B \cup C$ και ποιά η $A \cap B \cap C$;

Λύση: Το σύνολο $A \cup B \cup C$ περιέχει τα στοιχεία που βρίσκονται τουλάχιστο σε ένα από τα A, B, και C. Αρα,

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

Το σύνολο $A \cap B \cap C$ περιέχει τα στοιχεία που βρίσκονται και στα τρία από τα A, B, και C. Ετσι,

$$A \cap B \cap C = \{0\}.$$

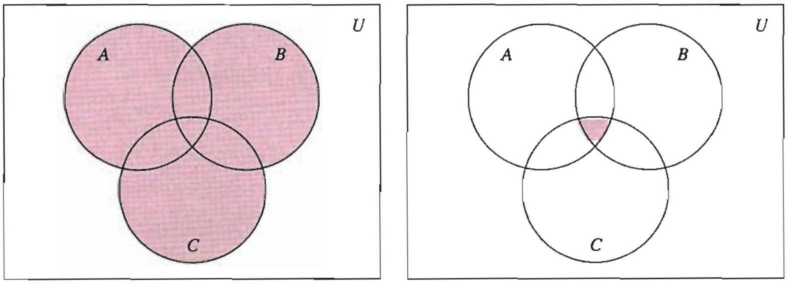
Μπορούμε να εξετάσουμε ενώσεις και τομές και από αυθαίρετο πλήθος συνόλων. Χρησιμοποιούμε τους παρακάτω ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 Η *ένωση* συλλογής συνόλων είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που είναι μέλη σε τουλάχιστον ένα σύνολο της συλλογής.

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=a}^{n} A_i$$

για να συμβολίζουμε την ένωση των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$.



(α) Είναι σκιασμένη η $A \cup B \cup C$ (β) Είναι σκιασμένη η $A \cap B \cap C$

ΣΧΗΜΑ 5 Η Ένωση και η Τομή των A, B, και C.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 Η *τομή* συλλογής συνόλων είναι το σύνολο που περιεχει τα στοιχεία που είναι μέλη όλων των συνόλων της συλλογής.

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

για να συμβολίζουμε την ένωση των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Με το Παράδειγμα 16 δείχνουμε γενικευμένες ενώσεις και τομές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Εστω ότι $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots.\}$. Τότε

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1,2,3,\ldots\},$$

και

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}.$$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αναπαράσταση συνόλων με υπολογιστή. Μια μέθοδος είναι η αποθήκευση των στοιχείων του συνόλου με μη διατεταγμένο τρόπο. Ωστόσο, αν γίνει κάτι τέτοιο, οι πράξεις υπολογισμού της ένωσης, της τομής, ή της διαφοράς δύο συνόλων θα είναι χρονοβόρα, επειδή η κάθε μια από τις πράξεις αυτές θα απαιτούσε μεγάλη αναζήτηση στοιχείων. Θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο αποθήκευσης στοιχείων με χρήση αυθαίρετης διάταξης των στοιχείων του γενικού συνόλου. Αυτή η μέθοδος παράστασης συνόλων κάνει εύκολους τους υπολογιστικούς συνδυασμούς των συνόλων.

Θεωρούμε ότι το γενικό σύνολο U είναι πεπερασμένο (και έχει μέγεθος τόσο ώστε το πλήθος των στοιχείων του U να μην είναι μεγαλύτερο από το μέγεθος της μνήμης του υπολογιστή που χρησιμοποιείται). Πρώτα, καθορίζουμε μια αυθαίρετη διάταξη των στοιχείων του U, για παράδειγμα $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Παριστάνουμε ένα υποσύνολο A του U με την συμβολοσειρά bit μήκους n, όπου το bit i τάξης στην συμβολοσειρά αυτή είναι 1 αν το a_i ανήκει στο A και 0 αν το a_i δεν ανήκει στο A. Στο Παράδειγμα 17 φαίνεται αυτή η τεχνική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Εστω $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, και η διάταξη των στοιχείων του U έχει τα στοιχεία σε αύξουσα σειρά, δηλ., $a_i = i$. Ποιές συμβολοσειρές bit παριστάνουν το υποσύνολο όλων των περιττών ακέραιων στο U, το υποσύνολο όλων των άρτιων ακέραιων στο U, και το υποσύνολο των ακέραιων που δεν ξεπερνά το 5 στο U;

Λύση: Η συμβολοσειρά bit που παριστάνει το σύνολο των περιττών ακέραιων στο U, δηλ., το $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, έχει bit 1 στην πρώτη, τρίτη, πέμπτη, έβδομη, και ένατη θέση, και bit 0 στις άλλες θέσεις. Είναι, δηλαδή

$$10\ 1010\ 1010.$$

(Εχουμε χωρίσει αυτή την συμβολοσειρά bit με μήκος δέκα σε κομμάτια με μήκος τέσσερα για να διαβάζεται εύκολα επειδή οι συμβολοσειρές bit με μεγάλο μήκος διαβάζονται δύσκολα.) Με παρόμοιο τρόπο, παριστάνουμε το υποσύνολο όλων των άρτιων ακέραιων του U, δηλ., το $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, με την συμβολοσειρά

$$01\ 0101\ 0101.$$

Το σύνολο όλων των ακέραιων στο U που δεν ξεπερνούν το 5, δηλ., το $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, παριστάνεται με την συμβολοσειρά

$$11\ 1110\ 0000.$$

Η χρήση συμβολοσειρών bit για την παράσταση συνόλων διευκολύνει την εύρεση συμπληρωμάτων συνόλων και ενώσεων, τομών, και διαφορών συνόλων. Για να βρούμε την συμβολοσειρά bit για το συμπλήρωμα συνόλου από την συμβολοσειρά bit αυτού του συνόλου, απλά αλλάζουμε κάθε 1 σε 0 και κάθε 0 σε 1, επειδή $x \in A$ αν και μόνο αν $x \notin \bar{A}$. Σημειώνεται ότι αυτή η πράξη αντιστοιχεί στην λήψη της άρνησης κάθε bit όταν συνδέουμε bit με τιμή αληθείας –όπου το 1 αντιστοιχεί σε αληθές και το 0 σε ψευδές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Είδαμε ότι η συμβολοσειρά bit για το σύνολο $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (με γενικό σύνολο το $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$) είναι

$$10\ 1010\ 1010.$$

Ποιά είναι η συμβολοσειρά bit για το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου;

Λύση: Η συμβολοσειρά bit για το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου λαμβάνεται αν αντικαταστήσουμε τα 0 με 1 και αντίστροφα. Το γεγονός αυτό δίνει την συμβολοσειρά

$$01\ 0101\ 0101,$$

η οποία αντιστοιχεί στο σύνολο $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Για να πάρουμε την συμβολοσειρά bit για την ένωση και για την τομή δύο συνόλων εκτελούμε πράξεις Boole σε bit στις συμβολοσειρές bit που παριστάνουν τα δύο σύνολα. Το bit στην θέση τάξης i της συμβολοσειράς bit της ένωσης είναι 1 αν ένα από τα bit στην θέση τάξης i στις δύο συμβολοσειρές είναι 1 (ή είναι και τα δύο 1), και είναι 0 όταν και τα δύο bit είναι 0. Αρα, η συμβολοσειρά bit για την ένωση είναι το *OR* σε bit των συμβολοσειρών bit των δύο συνόλων. Το bit στην θέση τάξης i της συμβολοσειράς bit της τομής είναι 1 όταν τα bit στην αντίστοιχη θέση στις δύο συμβολοσειρές είναι και τα δύο 1, και είναι 0 όταν ένα από τα δύο bit είναι 0 (ή και τα δύο). Αρα, η συμβολοσειρά bit για την τομή είναι το *AND* σε bit των συμβολοσειρών bit των δύο συνόλων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

Οι συμβολοσειρές bit των συνόλων $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ είναι 11 1110 0000 και 10 1010 1010, αντίστοιχα. Να χρησιμοποιηθούν συμβολοσειρές bit για να βρεθεί η ένωση και η τομή αυτών των συνόλων.

Λύση: Η συμβολοσειρά bit για την ένωση αυτών των συνόλων είναι

$$11\ 1110\ 0000 \vee 10\ 1010\ 1010 = 11\ 1110\ 1010,$$

που αντιστοιχεί στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Η συμβολοσειρά bit για την τομή αυτών των συνόλων είναι

$$11\ 1110\ 0000 \wedge 10\ 1010\ 1010 = 10\ 1010\ 0000$$

που αντιστοιχεί στο σύνολο $\{1, 3, 5\}$.

Ασκήσεις

1. Εστω ότι A είναι το σύνολο των σπουδαστών που ζούν σε απόσταση ενός χιλιομέτρου από το σχολείο και έστω ότι B είναι το σύνολο των σπουδαστών που πηγαίνουν στο μάθημα με τα πόδια. Να περιγραφούν οι σπουδαστές στα παρακάτω σύνολα

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

2. Εστω ότι A είναι το σύνολο των δευτεροετών στο σχολείο και B είναι το σύνολο των σπουδαστών που παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά στο σχολείο. Να εκφραστούν τα παρακάτω σύνολα σαν συνάρτηση των A και B.

a) το σύνολο των δευτεροετών σπουδαστών που παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά στο σχολείο

b) το σύνολο των δευτεροετών σπουδαστών που δεν παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά στο σχολείο

c) το σύνολο των σπουδαστών στο σχολείο που είτε είναι δευτεροετείς είτε παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά

d) το σύνολο των σπουδαστών στο σχολείο που είτε δεν είναι δευτεροετείς είτε δεν παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά.

3. Εστω $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{0, 3, 6\}$. Να βρεθούν τα

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

4. Εστω $A = \{a, b, c, d, e\}$ και $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Να βρεθούν τα

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $B - A$

5. Εστω ότι το A είναι σύνολο. Να δειχτεί ότι $\overline{\overline{A}} = A$.

6. Εστω ότι το A είναι σύνολο. Να δειχτεί ότι

a) $A \cup \emptyset = A$ **b)** $A \cap \emptyset = \emptyset$ **c)** $A \cup A = A$ **d)** $A \cap A = A$

e) $A - \emptyset = A$ **f)** $A \cup U = U$ **g)** $A \cap U = A$ **h)** $\emptyset - A = \emptyset$

7. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι

a) $A \cup B = B \cup A$ **b)** $A \cap B = B \cap A$

8. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι $A \cup (A \cap B) = A$.

9. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι $A \cap (A \cup B) = A$.

10. Να βρεθούν τα σύνολα A και B αν $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

11. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

a) με το να δείξουμε ότι κάθε πλευρά είναι υποσύνολο της άλλης πλευράς.

b) με χρήση πίνακα μελών.

12. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι

a) $(A \cap B) \subseteq A$. **b)** $A \subseteq (A \cup B)$. **c)** $A - B \subseteq A$.

d) $A \cap (B - A) = \emptyset$ **e)** $A \cup (B - A) = A \cup B$.

13. Να δειχτεί ότι αν τα A, B, και C είναι σύνολα, τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

a) με το να δείξουμε ότι κάθε πλευρά είναι υποσύνολο της άλλης πλευράς.

b) με χρήση πίνακα μελών.

14. Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$. **b)** $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.

c) $(A - B) - C \subseteq A - C$. **d)** $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$.

e) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

15. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε $A - B = A \cap \overline{B}$.

16. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

17. Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. **b)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

18. Εστω ότι τα A, B, κα C είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

19. Εστω $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, και $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Να βρεθούν τα παρακάτω:

a) $A \cap B \cap C$. **b)** $A \cup B \cup C$. **c)** $(A \cup B) \cap C$. **d)** $(A \cap B) \cup C$.

20. Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Venn για τους παρακάτω συνδυασμούς των συνόλων A, B, και C.

a) $A \cap (B \cup C)$ **b)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ **c)** $(A-B) \cup (A-C) \cup (B-C)$.

21. Τι μπορούμε να πούμε για τα σύνολα A και B αν γνωρίζουμε ότι

a) $A \cup B = A$; **b)** $A \cap B = A$; **c)** $A - B = A$;

d) $A \cap B = B \cap A$; **e)** $A - B = B - A$;

22. Μήπως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $A = B$ αν τα A, B, και C είναι σύνολα έτσι ώστε να είναι

a) $A \cup C = B \cup C$; **b)** $A \cap C = B \cap C$;

23. Εστω ότι τα A και B είναι υποσύνολα γενικού συνόλου U. Να δειχτεί ότι $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Η **συμμετρική διαφορά** των A και B, που συμβολίζεται με $A \oplus B$, είναι το σύνολο που περιέχει στοιχεία που βρίσκονται είτε στο A είτε στο B, αλλά όχι και στο A και στο B.

24. Να βρεθεί η συμμετρική διαφορά των $\{1, 3, 5\}$ και $\{1, 2, 3\}$.

25. Να βρεθεί η συμμετρική διαφορά του συνόλου των σπουδαστών επιστήμης υπολογιστών σε σχολείο και του συνόλου των φοιτητών μαθηματικών στο σχολείο αυτό.

26. Να σχεδιαστεί διάγραμμα Venn για την συμμετρική διαφορά των συνόλων A και B.

27. Να δειχτεί ότι $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

28. Να δειχτεί ότι $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

29. Να δειχτεί ότι αν το A είναι υποσύνολο γενικού συνόλου U, τότε

a) $A \oplus A = \emptyset$ **b)** $A \oplus \emptyset = A$ **c)** $A \oplus U = \overline{A}$ **d)** $A \oplus \overline{A} = U$

30. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε

a) $A \oplus B = B \oplus A$ **b)** $(A \oplus B) \oplus B = A$

31. Τι μπορούμε να πούμε για τα σύνολα A και B αν $A \oplus B = A$;

***32.** Να καθοριστεί αν η συμμετρική διαφορά είναι προσεταιριστική. Δηλαδή, αν τα A, B, κα C είναι σύνολα, μήπως έπεται ότι $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;

***33.** Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα έτσι ώστε να είναι $A \oplus C = B \oplus C$. Μήπως τότε θα πρέπει να είναι $A = B$;

34. Αν τα A, B, C, κα D είναι σύνολα, μήπως έπεται ότι $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$;

35. Αν τα A, B, C, κα D είναι σύνολα, μήπως έπεται ότι $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus D) \oplus (B \oplus C)$;

***36.** Να δειχτεί ότι αν τα A, B, και C είναι σύνολα, τότε
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

(Πρόκειται για ειδική περίπτωση της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού, που θα εξεταστεί στο Κεφάλαιο 6.)

***37.** Εστω ότι $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i)$ για $i = 1, 2, 3, \ldots$ Να βρεθούν τα παρακάτω

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

***38.** Εστω ότι $A_i = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, i\}$. Να βρεθούν τα παρακάτω

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

39. Εστω ότι A_i είναι το σύνολο όλων των μη κενών συμβολοσειρών bit (δηλ., στοιχειοσειρών bit με μήκος τουλάχιστο ένα) με μήκος που δεν ξεπερνά το i. Να βρεθούν τα παρακάτω

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

40. Εστω ότι το γενικό σύνολο είναι $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Να εκφραστούν τα παρακάτω σύνολα με συμβολοσειρές bit, όπου το bit τάξης i στην συμβολοσειρά είναι 1 αν το i βρίσκεται στο σύνολο, και 0 διαφορετικά.

a) $\{3, 4, 5\}$ **b)** $\{1, 3, 6, 10\}$ **c)** $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

41. Αν έχουμε το ίδιο γενικό σύνολο όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, να βρεθεί το σύνολο που καθορίζεται από τις παρακάτω στοιχειοσειρές bit.

a) 11 1100 1111 **b)** 01 0111 1000 **c)** 10 0000 0001

42. Ποιά υποσύνολα πεπερασμένου γενικού συνόλου παριστάνουν οι παρακάτω συμβολοσειρές bit;

a) οι συμβολοσειρές μόνο με 0 **b)** οι συμβολοσειρές μόνο με 1

43. Ποιά είναι η συμβολοσειρά bit που αντιστοιχεί στην διαφορά δύο συνόλων;

44. Ποιά είναι η συμβολοσειρά bit που αντιστοιχεί στην συμμετρική διαφορά δύο συνόλων;

45. Να δειχτεί ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν πράξεις με bit για να βρεθούν οι παρακάτω συνδυασμοί των $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, g, p, t, v\}$, $C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\}$, και $D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$.

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $(A \cup D) \cap (B \cup C)$ **d)** $A \cup B \cup C \cup D$

46. Με ποιό τρόπο μπορεί να βρεθεί η ένωση και η τομή n συνόλων, που όλα είναι υποσύνολα του γενικού συνόλου U, με χρήση συμβολοσειρών bit;

47. **Ακόλουθο** του συνόλου A είναι το σύνολο $A \cup \{A\}$. Να βρεθούν τα ακόλουθα των παρακάτω συνόλων

a) $\{1, 2, 3\}$ **b)** $\emptyset$ **c)** $\{\emptyset\}$ **d)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

48. Πόσα στοιχεία έχει το ακόλουθο συνόλου με n στοιχεία;

Μερικές φορές έχει σημασία το πόσες φορές εμφανίζεται ένα στοιχείο σε μια μη διατεταγμένη συλλογή. Τα **πολυσύνολα** είναι μη διατεταγμένες συλλογές στοιχείων όπου ένα στοιχείο μπορεί να εμφανιστεί σαν μέλος περισσότερες από μια φορές. Ο συμβολισμός $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_r \cdot a_r\}$ συμβολίζει το πολυσύνολο με το στοιχείο a_1 να εμφανίζεται m_1 φορές, το στοιχείο a_2 να εμφανίζεται m_2 φορές, κ.ο.κ. Οι αριθμοί m_i, i = 1, 2, ... , r ονομάζονται **πολλαπλότητες** των στοιχείων a_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Εστω ότι τα P και Q είναι πολυσύνολα. Η **ένωση** των πολυσυνόλων P και Q είναι το πολυσύνολο όπου η πολλαπλότητα στοιχείου είναι το μέγιστο των πολλαπλοτήτων του στο P και στο Q. Η **τομή** των P και Q είναι το πολυσύνολο όπου η πολλαπλότητα στοιχείου είναι το ελάχιστο των πολλαπλοτήτων του στο P και στο Q. Η **διαφορά** των P και Q είναι το πολυσύνολο όπου η πολλαπλότητα στοιχείου είναι η πολλαπλότητα του στοιχείου στο P μείον την πολλαπλότητά του στο Q εκτός και αν αυτή η διαφορά είναι αρνητική, οπότε η πολλαπλότητα είναι 0. Το **άθροισμα** των P και Q είναι το πολυσύνολο όπου η πολλαπλότητα στοιχείου είναι το άθροισμα των πολλαπλοτήτων στο P και στο Q. Η ένωση, η τομή, και η διαφορά των P και Q συμβολίζονται με $P \cup Q$, $P \cap Q$, και $P - Q$, αντίστοιχα (όπου οι πράξεις αυτές δεν πρέπει να συγχέονται με τις αντίστοιχες πράξεις των συνόλων). Το άθροισμα των P και Q συμβολίζεται με $P + Q$.

49. Εστω ότι τα A και B είναι τα πολυσύνολα $\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 1 \cdot c\}$ και $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot d\}$, αντίστοιχα. Να βρεθούν τα

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $B - A$ **e)** $A + B$

50. Εστω ότι A είναι το πολυσύνολο που έχει σαν στοιχεία του τα είδη εξοπλισμού υπολογιστών που χρειάζονται σε ένα τομέα πανεπιστημίου, όπου οι πολλαπλότητες είναι το πλήθος των κομματιών κάθε είδους που χρειάζεται, και B είναι το αντίστοιχο πολυσύνολο για έναν δεύτερο τομέα του πανεπιστημίου.Για παράδειγμα, το A θα μπορούσε να είναι το πολυσύνολο {107 · προσωπικοί υπολογιστές, 44 · router, 6 · server} και το B θα μπορούσε να είναι το πολυσύνολο {14 · προσωπικοί υπολογιστές, 6 · router, 2 · κύριοι υπολογιστές}.

a) Ποιός συνδυασμός των A και B παριστάνει τον εξοπλισμό που θα έπρεπε να αγοράσει το πανεπιστήμιο, αν θεωρήσουμε ότι και οι δύο τομείς χρησιμοποιούν τον ίδιο εξοπλισμό;

b) Ποιός συνδυασμός των A και B παριστάνει τον εξοπλισμό που θα χρησιμοποιηθεί και από τους δύο τομείς, αν και οι δύο τομείς χρησιμοποιούν τον ίδιο εξοπλισμό;

c) Ποιός συνδυασμός των A και B παριστάνει τον εξοπλισμό που χρησιμοποιεί ο δεύτερος τομέας, αλλά που δεν χρησιμοποιεί ο πρώτος τομέας, αν και οι δύο τομείς χρησιμοποιούν τον ίδιο εξοπλισμό;

d) Ποιός συνδυασμός των A και B παριστάνει τον εξοπλισμό που θα έπρεπε να αγοράσει το πανεπιστήμιο, αν θεωρήσουμε ότι οι τομείς δεν χρησιμοποιούν κοινό εξοπλισμό;