Τα **θολά σύνολα (ασταθή ή ασαφή)** χρησιμοποιούνται στην τεχνητή νοημοσύνη. Κάθε στοιχείο στο γενικό σύνολο U έχει έναν **βαθμό συμμετοχής**, που είναι πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1 (συμπεριλαμβανομένων), σε θολό σύνολο S. Το θολό σύνολο S συμβολίζεται με αναγραφή των στοιχείων με τους βαθμούς τους συμμετοχής (στοιχεία με 0 βαθμό συμμετοχής δεν αναγράφονται). Για παράδειγμα, γράφουμε {0.6 Alice, 0.9 Brian, 0.4 Fred, 0.1 Oscar, 0.5 Rita} για το σύνολο F (διάσημων ανθρώπων) για να δείξουμε ότι η Alice έχει βαθμό συμμετοχής 0.6 στο F, ο Brian έχει βαθμό συμμετοχής 0.9 στο F, ο Fred έχει βαθμό συμμετοχής 0.4 στο F, ο Oscar έχει βαθμό συμμετοχής 0.1 στο F, και η Rita έχει βαθμό συμμετοχής 0.5 στο F (και έτσι ο Brian είναι ο περισσότερο διάσημος και ο Oscar είναι ο λιγότερο διάσημος από όλους αυτούς τους ανθρώπους). Θεωρούμε, ακόμη, ότι το R είναι το σύνολο των πλούσιων με R = {0.4 Alice, 0.8 Brian, 0.2 Fred, 0.9 Oscar, 0.7 Rita}.

51. Το **συμπλήρωμα** θολού συνόλου S είναι το σύνολο $\overline{S}$, με τον βαθμό συμμετοχής στοιχείου στο $\overline{S}$ ίσο με 1 μείον τον βαθμό συμμετοχής αυτού του στοιχείου στο S. Να βρεθεί το $\overline{F}$ (το θολό σύνολο των ανθρώπων που δεν είναι διάσημοι) και το $\overline{R}$ (το θολό σύνολο των ανθρώπων που δεν είναι πλούσιοι).

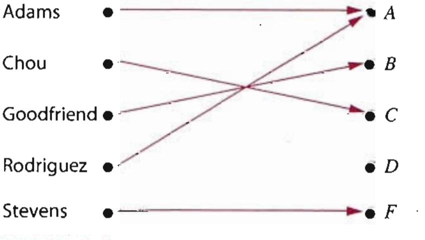
52. Η **ένωση** δύο θολών συνόλων S και T είναι το θολό σύνολο $S \cup T$, όπου ο βαθμός συμμετοχής στοιχείου στο $S \cup T$ είναι το μέγιστο των βαθμών συμμετοχής αυτού του στοιχείου στο S και στο T. Να βρεθεί το θολό σύνολο $F \cup R$ των πλούσιων ή των διασήμων.

53. Η **τομή** δύο θολών συνόλων S και T είναι το θολό σύνολο $S \cap T$, όπου ο βαθμός συμμετοχής στοιχείου στο $S \cap T$ είναι το ελάχιστο των βαθμών συμμετοχής αυτού του στοιχείου στο S και στο T. Να βρεθεί το θολό σύνολο $F \cap R$ των πλούσιων και των διασήμων.

1.8 Συναρτήσεις

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε πολλές περιπτώσεις, αναθέτουμε σε κάθε στοιχείο συνόλου ένα συγκεκριμένο στοιχείο δεύτερου συνόλου (το οποίο μπορεί να είναι το ίδιο με το πρώτο). Για παράδειγμα, έστω ότι σε κάθε σπουδαστή σε μια τάξη διακριτών μαθηματικών ανατίθεται ένα γράμμα από το σύνολο {A, B, C, D, F}. Και έστω ότι οι βαθμοί είναι A για τον Adams, C για τον Chou, B για τον Goodfriend, A για τον Rodriguez, και F για τον Stevens. Αυτή η ανάθεση βαθμών φαίνεται στο Σχήμα 1.



ΣΧΗΜΑ 1 Ανάθεση Βαθμών σε Τάξη Διακριτών Μαθηματικών.

Η ανάθεση αυτή αποτελεί παράδειγμα

συνάρτησης. Η έννοια της συνάρτησης είναι εξαιρετικά σημαντική στα διακριτά μαθηματικά. Οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται στον ορισμό διακριτών δομών όπως οι ακολουθίες και οι συμβολοσειρές. Οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται και για να παριστάνουν τον χρόνο που χρειάζεται ένας υπολογιστής για να λύνει προβλήματα δεδομένου μεγέθους. Οι αναδρομικές συναρτήσεις, που είναι συναρτήσεις που ορίζονται σαν συνάρτηση του εαυτού τους, χρησιμοποιούνται πολύ στην επιστήμη υπολογιστών. Θα τις εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 3. Το παρόν Κεφάλαιο εξετάζει τις βασικές έννοιες που αφορούν σε συναρτήσεις, οι οποίες χρειάζονται στα διακριτά μαθηματικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. *Συνάρτηση* f από το A προς το B είναι ανάθεση ενός μόνο στοιχείου του B σε κάθε στοιχείο του A. Γράφουμε $f(a) = b$ αν b είναι το μοναδικό στοιχείο του B που έχει ανατεθεί από την συνάρτηση f στο στοιχείο a του A. Αν η f είναι συνάρτηση από το A προς το B, γράφουμε $f : A \rightarrow B$.

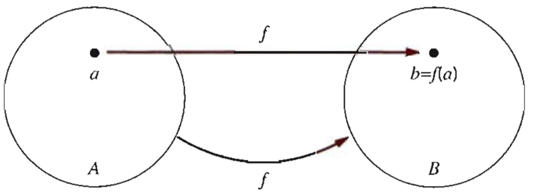
Οι συναρτήσεις καθορίζονται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Μερικές φορές αναφέρουμε με σαφήνεια τις αναθέσεις, όπως στο Σχήμα 1. Συχνά, για να ορίσουμε συνάρτηση, δίνουμε έναν τύπο όπως $f(x) = x + 1$. Αλλοτε, για να καθορίσουμε συνάρτηση, χρησιμοποιούμε πρόγραμμα υπολογιστή.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ μερικές φορές ορίζεται βάση κάποιας σχέσης από το A προς το B, που είδαμε στην Παράγραφο 1.6. Θα εξετάσουμε αυτή την προσέγγιση στο Κεφάλαιο 7.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Αν η f είναι συνάρτηση από το A προς το B, λέμε ότι το A είναι το *πεδίο ορισμού* της f και το B είναι το *πεδίο τιμών* της f. Αν $f(a) = b$, λέμε ότι το b είναι *εικόνα* του a και το a είναι *προ-εικόνα* του b. Το *πεδίο τιμών* της f είναι το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του A. Ακόμη, αν η f είναι συνάρτηση από το A προς το B, λέμε ότι η f *απεικονίζει* το A στο B.

Το Σχήμα 2 παριστάνει μια συνάρτηση f από το A προς το B.

Ας δούμε το παράδειγμα στην αρχή της Παραγράφου. Εστω ότι η G είναι η συνάρτηση που αναθέτει ένα βαθμό σε ένα σπουδαστή στην τάξη των διακριτών μαθηματικών. Παρατηρούμε, για παράδειγμα, ότι G(Adams) = A. Το πεδίο ορισμού της G είναι το σύνολο {Adams, Chou, Goodfriend, Ridriguez, Stevens},



ΣΧΗΜΑ 2 Η Συνάρτηση f απεικονίζει το A στο B.

και το πεδίο τιμών είναι το σύνολο $\{A, B, C, D, F\}$. Το εύρος τιμών της G είναι το σύνολο $\{A, B, C, F\}$, επειδή κάθε βαθμός, εκτός από D, έχει ανατεθεί σε κάποιον σπουδαστή. Βλ. Παραδείγματα 1 και 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Εστω ότι f είναι η συνάρτηση που αναθέτει τα τελευταία δύο bit μιάς συμβολοσειράς bit μήκους 2 ή μεγαλύτερου στην συμβολοσειρά αυτή. Τότε, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών bit μήκους 2 ή μεγαλύτερου, και το πεδίο τιμών και το εύρος τιμών είναι το σύνολο $\{00, 01, 10, 11\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Εστω ότι η $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ αναθέτει το τετράγωνο ενός ακέραιου στον ακέραιο αυτόν. Τότε, $f(x) = x^2$, όπου το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των ακέραιων, το πεδίο τιμών της f μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι το σύνολο όλων των ακέραιων, και το εύρος τιμών της f είναι το σύνολο όλων των μη αρνητικών ακέραιων που είναι τέλεια τετράγωνα, δηλ., $\{0, 1, 4, 9, ...\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Σε γλώσσες προγραμματισμού συχνά καθορίζονται το πεδίο ορισμού και το πεδίο συνορισμού συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η δήλωση της γλώσσας Java

int **floor** (float real){. . .}

και η δήλωση της γλώσσας Pascal

function *floor* (*x*: **real**): **integer**

αναφέρουν και οι δύο ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης floor είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο των ακέραιων.

Δύο συναρτήσεις πραγματικών τιμών με το ίδιο πεδίο ορισμού μπορούν να προστεθούν και να πολλαπλασιαστούν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 Εστω ότι οι f_1 και f_2 είναι συναρτήσεις από το A προς το $\mathbf{R}$. Τότε, οι $f_1 + f_2$ και $f_1 f_2$ είναι και αυτές συναρτήσεις από το A προς το $\mathbf{R}$ που ορίζονται από τις

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f_1 + f_2$ και $f_1 f_2$ έχουν οριστεί με καθορισμό των τιμών τους στο x σαν συνάρτηση των τιμών των f_1 και f_2 στο x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Εστω ότι οι f_1 και f_2 είναι συναρτήσεις από το **R** προς το **R**, έτσι ώστε να είναι $f_1(x) = x^2$ και $f_2(x)=x-x^2$. Ποιές είναι οι συναρτήσεις f_1+f_2 και $f_1 f_2$;

Λύση: Από τον ορισμό του αθροίσματος και του γινομένου συναρτήσεων, έπεται ότι

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = x^2+(x-x^2) = x$$

και

$$(f_1 f_2)(x) = x^2(x-x^2) = x^3 - x^4 .$$

Οταν η f είναι συνάρτηση από σύνολο A προς σύνολο B, μπορεί να οριστεί και η εικόνα υποσυνόλου του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 Εστω ότι f είναι συνάρτηση από το σύνολο A προς το σύνολο B και έστω ότι S είναι υποσύνολο του A. Η *εικόνα* του S είναι το υποσύνολο του B που αποτελείται από τις εικόνες των στοιχείων του S. Συμβολίζουμε την εικόνα του S με $f(S)$, έτσι ώστε να είναι

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\} .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Εστω $A = \{a, b, c, d, e\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4\}$ με $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$, και $f(e) = 1$. Η εικόνα του υποσυνόλου $S = \{b, c, d\}$ είναι το σύνολο $f(S) = \{1, 4\}$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΝΑ-ΠΡΟΣ-ΕΝΑ ΚΑΙ ΕΠΙ

Κάποιες συναρτήσεις έχουν ξεχωριστές εικόνες σε ξεχωριστά μέλη του πεδίου τους ορισμού. Λέμε ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι **ένα-προς-ένα**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 Μια συνάρτηση f λέγεται ότι είναι *ένα-προς-ένα*, αν και μόνο αν $f(x) = f(y)$ συνεπάγεται ότι $x = y$ για όλα τα x και y στο πεδίο ορισμού τής f.

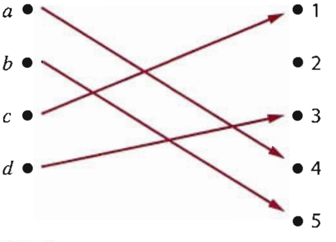
Παρατήρηση: Μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνον αν $f(x) \neq f(y)$ αν $x \neq y$. Αυτός ο τρόπος έκφρασης ότι η f είναι ένα-προς-ένα λαμβάνεται αν πάρουμε την αντιθετική της συνεπαγωγής στον ορισμό. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι η f είναι ένα-προς-ένα αν χρησιμοποιήσουμε ποσοτικοποιητές όπως $\forall x \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$ ή ισοδύναμα $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Θα δείξουμε αυτή την έννοια με παραδείγματα συναρτήσεων που είναι ένα-προς-ένα και άλλων συναρτήσεων που δεν είναι ένα-προς-ένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να προσδιοριστεί αν η συνάρτηση f από το $\{a, b, c, d\}$ προς το $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ με $f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1$, και $f(d) = 3$ είναι ένα-προς-ένα.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα επειδή η f λαμβάνει διαφορετικές τιμές στα τέσσερα στοιχεία του πεδίου ορισμού της. Το γεγονός αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.



ΣΧΗΜΑ 3 Συνάρτηση Ενα-Προς-Ενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να προσδιοριστεί αν η συνάρτηση $f(x) = x^2$ από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα επειδή, για παράδειγμα, $f(1) = f(-1) = 1$, αλλά $1 \neq -1$. Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα αν το πεδίο ορισμού της περιοριστεί στο $\mathbf{Z}^+$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να προσδιοριστεί αν η συνάρτηση $f(x) = x + 1$ είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = x + 1$ είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα. Για να δειχτεί αυτό, βλέπουμε ότι $x + 1 \neq y + 1$ όταν $x \neq y$.

Θα δώσουμε τώρα κάποια συμπεράσματα που εξασφαλίζουν ότι η συνάρτηση θα είναι ένα-προς-ένα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 Συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού και το πεδίο συνορισμού είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών ονομάζεται *αυστηρά αύξουσα* αν $f(x) < f(y)$ όταν $x < y$ και τα x και y βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f. Με παρόμοιο τρόπο, η f ονομάζεται *αυστηρά φθίνουσα* αν $f(x) > f(y)$ όταν $x < y$ και τα x και y βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f.

Παρατήρηση: Μια συνάρτηση f είναι αυστηρά αύξουσα αν $\forall x \forall y((x < y) \rightarrow (f(x) < f(y))$ και αυστηρά φθίνουσα αν $\forall x \forall y((x < y) \rightarrow (f(x) > f(y))$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το πεδίο ορισμού τής f.

Από τους ορισμούς αυτούς, βλέπουμε ότι συνάρτηση που είναι είτε αυστηρά αύξουσα είτε αυστηρά φθίνουσα πρέπει να είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

Σε κάποιες συναρτήσεις το πεδίο τιμών και το πεδίο τιμών είναι ίσα. Δηλαδή, κάθε μέλος του πεδίου τιμών είναι η εικόνα κάποιου στοιχείου του πεδίου ορισμού. Συναρτήσεις με την ιδιότητα αυτή ονομάζονται συναρτήσεις **επί**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 Μια συνάρτηση f από το A προς το B ονομάζεται συνάρτηση *επί*, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο $b \in B$ υπάρχει στοιχείο $a \in A$ με $f(a) = b$.

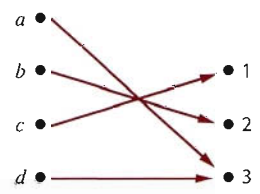
Παρατήρηση: Μια συνάρτηση f είναι συνάρτηση επί αν $\forall y \exists x (f(x) = y)$, όπου το πεδίο ορισμού της x είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το πεδίο ορισμού της y είναι το πεδίο συνορισμού της συνάρτησης.

Θα δώσουμε τώρα παραδείγματα συναρτήσεων επί και συναρτήσεων όχι επί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Εστω f η συνάρτηση από το $\{a, b, c, d\}$ προς το $\{1, 2, 3\}$ που ορίζεται από τις $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$, και $f(d) = 3$. Μήπως η f είναι συνάρτηση επί;

Λύση: Επειδή και τα τρία στοιχεία του πεδίου τιμών είναι εικόνες στοιχείων του πεδίου ορισμού, βλέπουμε ότι η f είναι συνάρτηση επί. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4. Σημειώνεται ότι αν το πεδίου τιμών ήταν το $\{1, 2, 3, 4\}$ τότε η f δεν θα ήταν συνάρτηση επί.



ΣΧΗΜΑ 4 Συνάρτηση Επί

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Μήπως η συνάρτηση $f(x) = x^2$ από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων είναι συνάρτηση επί;

Λύση: Η συνάρτηση f δεν είναι συνάρτηση επί επειδή, για παράδειγμα, δεν υπάρχει ακέραιος x με $x^2 = -1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Μήπως η συνάρτηση $f(x) = x + 1$ από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων είναι συνάρτηση επί;

Λύση: Η συνάρτηση είναι συνάρτηση επί, επειδή για κάθε ακέραιο y υπάρχει ακέραιος x έτσι ώστε να είναι $f(x) = y$. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι $f(x) = y$ αν και μόνο αν $x + 1 = y$, που ισχύει αν και μόνο αν $x = y - 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 Η συνάρτηση f είναι *αντιστοιχία ένα-προς-ένα*, αν είναι και συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί.

Τα παραδείγματα 12 και 13 δείχνουν την έννοια της αντιστοιχίας ένα-προς-ένα.

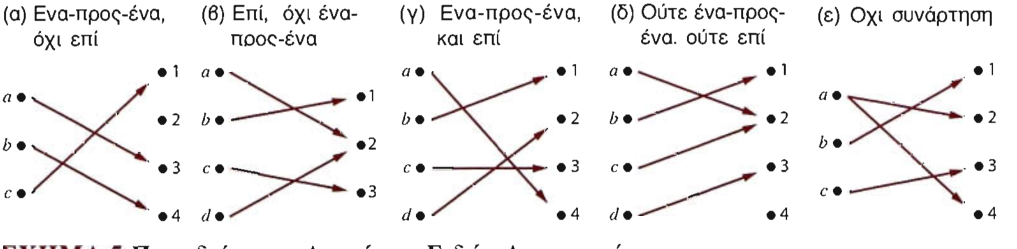
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Εστω ότι η f είναι η συνάρτηση από το $\{a, b, c, d\}$ προς το $\{1, 2, 3, 4\}$ με $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, και $f(d) = 3$. Μήπως η f είναι αντιστοιχία ένα-προς-ένα;

Λύση: Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί. Είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα επειδή η συνάρτηση παίρνει ξεχωριστές τιμές. Είναι συνάρτηση επί επειδή και τα τέσσερα στοιχεία του πεδίου συνορισμού είναι εικόνες στοιχείων στο πεδίο ορισμού. Αρα, η f είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα.

Στο Σχήμα 5 φαίνονται τέσσερεις συναρτήσεις όπου η πρώτη είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα αλλά όχι συνάρτηση επί, η δεύτερη είναι συνάρτηση επί αλλά όχι συνάρτηση ένα-προς-ένα, η τρίτη είναι και συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί, και η τέταρτη δεν είναι ούτε συνάρτηση ένα-προς-ένα ούτε συνάρτηση επί. Η πέμπτη αντιστοιχία στο Σχήμα 5 δεν είναι συνάρτηση, επειδή απεικονίζει ένα στοιχείο σε δύο διαφορετικά στοιχεία.

Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το σύνολο A προς τον εαυτό του. Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε η f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα αν και μόνο αν είναι επί. (Αυτό έπεται από το αποτέλεσμα της Ασκησης 64 στο τέλος της Παραγράφου.) Αυτό δεν ισχύει απαραίτητα για την περίπτωση όπου το A είναι άπειρο (όπως θα δειχτεί στην Παράγραφο 3.2).



ΣΧΗΜΑ 5 Παραδείγματα Διαφόρων Ειδών Αντιστοιχίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Εστω A ένα σύνολο. Η *συνάρτηση ταυτότητας* επί του A είναι η συνάρτηση $t_A : A \to A$ όπου

$$i_A(x)=x,$$

όπου $x \in A$. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση ταυτότητας t_A είναι η συνάρτηση που αναθέτει κάθε στοιχείο στον εαυτό του. Η συνάρτηση t_A είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα και επί, και έτσι είναι αντιστοιχία ένα-προς-ένα.

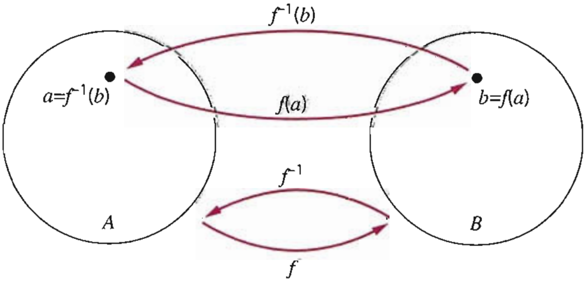
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εστω, τώρα, ότι έχουμε μια συνάρτηση f αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το σύνολο A προς το σύνολο B. Επειδή η f είναι συνάρτηση επί, κάθε στοιχείο του B είναι η εικόνα κάποιου στοιχείου του A. Επιπλέον, επειδή η f είναι και συνάρτηση ένα-προς-ένα, κάθε στοιχείο του B θα είναι η εικόνα ενός μοναδικού στοιχείου του A. Κατά συνέπεια, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση από το B προς το A η οποία αντιστρέφει την αντιστοιχία που δίνεται από την f. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον Ορισμό 9.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 Εστω ότι η f είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το σύνολο A προς το σύνολο B. Η *αντίστροφη συνάρτηση* τής f είναι η συνάρτηση, η οποία αναθέτει σε στοιχείο b που ανήκει στο B το μοναδικό στοιχείο a του A, έτσι ώστε να είναι $f(a) = b$. Η αντίστροφη συνάρτηση της f συμβολίζεται με f^{-1}. Αρα, $f^{-1}(b)=a$ όταν $f(a) = b$.

Στο Σχήμα 6 φαίνεται η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

Αν συνάρτηση f δεν είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, δεν μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της f. Οταν η f δεν είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, είτε δεν είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα είτε δεν είναι συνάρτηση επί. Αν η f δεν είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα, κάποιο στοιχείο b στο πεδίο τιμών θα είναι η εικόνα περισσότερων του ενός στοιχείων στο πεδίο τιμών. Αν η f δεν είναι συνάρτηση επί, για κάποιο στοιχείο b στο πεδίο συνορισμού, δεν θα υπάρχει στοιχείο a στο πεδίο ορισμού για το οποίο να είναι $f(a) = b$. Κατά συνέπεα, αν η f δεν είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, δεν μπορούμε να αναθέσουμε σε κάθε στοιχείο b στο πεδίο τιμών ένα μοναδικό στοιχείο a στο πεδίο ορισμού, έτσι ώστε να είναι $f(a) = b$ (επειδή για κάποιο b είτε θα υπάρχουν περισσότερα από ένα παρόμοια a είτε δεν θα υπάρχουν παρόμοια a.
Συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα ονομάζεται **αντιστρεπτή ή αντιστρέψιμη** επειδή μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφη αυτής της συνάρτησης. Συνάρτηση είναι **μη αντιστρέψιμη** αν δεν είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, επειδή η αντίστροφη μιάς τέτοιας συνάρτησης δεν υπάρχει.



ΣΧΗΜΑ 6 Η Συνάρτηση f^{-1} είναι η Αντίστροφη της Συνάρτησης f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Εστω ότι η f είναι η συνάρτηση από το $\{a, b, c\}$ προς το $\{1, 2, 3\}$ έτσι ώστε να είναι $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, και $f(c) = 1$. Μήπως η f είναι αντιστρέψιμη, και αν είναι, ποιά είναι η αντίστροφή της;

Λύση: Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη επειδή είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} αντιστρέφει την αντιστοιχία που δίνεται από την f, έτσι ώστε να είναι $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$, και $f^{-1}(3) = b$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Εστω ότι f είναι η συνάρτηση από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων, η οποία είναι $f(x) = x + 1$. Μήπως η f είναι αντιστρέψιμη, και αν είναι, ποιά είναι η αντίστροφή της;

Λύση: Η συνάρτηση f έχει αντίστροφη επειδή είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, όπως έχουμε δείξει. Για να αντιστρέψουμε την αντιστοιχία, έστω ότι η y είναι η εικόνα της x, έτσι ώστε $y = x + 1$. Τότε $x = y - 1$. Αυτό σημαίνει ότι το $y - 1$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $\mathbf{Z}$ που στέλνεται από την f στην y. Κατά συνέπεια, $f^{-1}(y) = y - 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Εστω ότι f είναι η συνάρτηση από το $\mathbf{Z}$ προς το $\mathbf{Z}$, με $f(x) = x^2$. Μήπως η f είναι αντιστρέψιμη;

Λύση: Επειδή $f(-1) = f(1) = 1$, η f δεν είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα. Αν ορίζονταν αντίστροφη συνάρτηση, αυτή θα έπρεπε να αναθέτει δύο στοιχεία στο 1. Αρα, η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

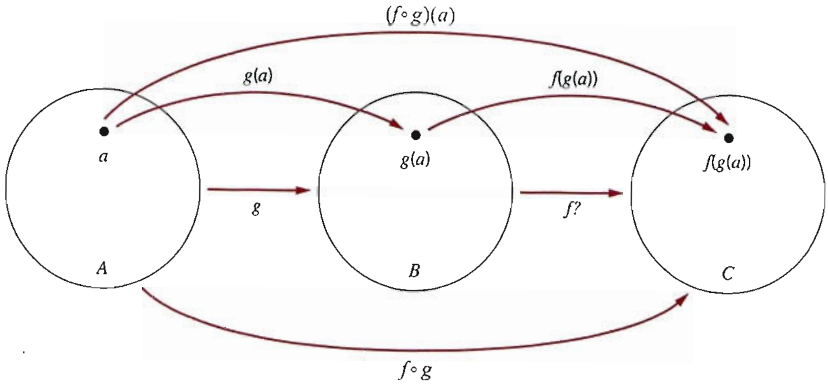
ΟΡΙΣΜΟΣ 10 Εστω ότι η g είναι συνάρτηση από το σύνολο A προς το σύνολο B και έστω ότι η f είναι συνάρτηση από το σύνολο B προς το σύνολο C. Η *σύνθεση* των συναρτήσεων g και f, που συμβολίζεται με $f \circ g$, ορίζεται από την

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Με άλλα λόγια, η $f \circ g$ είναι η συνάρτηση που αναθέτει στο στοιχείο a του A το στοιχείο που έχει ανατεθεί από την f στην $g(a)$. Σημειώνεται ότι η σύνθεση $f \circ g$ δεν μπορεί να οριστεί εκτός και αν το πεδίο ορισμού της g είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f. Στο Σχήμα 7 φαίνεται η σύνθεση συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Εστω ότι g είναι η συνάρτηση από το σύνολο $\{a, b, c\}$ προς τον εαυτό του έτσι ώστε να είναι $g(a) = b$, $g(b) = c$, και $g(c) = a$. Εστω ότι f είναι η συνάρτη-



ΣΧΗΜΑ 7 Η Σύνθεση των Συναρτήσεων f και g.

ση από το σύνολο $\{a, b, c\}$ προς το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ έτσι ώστε να είναι $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, και $f(c) = 1$. Ποιά είναι η σύνθεση των f και g, και ποιά είναι η σύνθεση των g και f;

Λύση: Η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται από την $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(a)) = f(b) = 2$, και $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$.

Σημειώνεται ότι η $g \circ f$ δεν ορίζεται, επειδή το πεδίο τιμών της f δεν είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Εστω ότι οι f και g είναι οι συναρτήσεις από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων που ορίζονται από τις $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = 3x + 2$. Ποιά είναι η σύνθεση των f και g; Ποιά είναι η σύνθεση των g και f;

Λύση: Ορίζονται και οι δύο συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$. Επιπλέον,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6z+11.$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι αν και οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται για τις συναρτήσεις f και g του Παραδείγματος 18, οι $f \circ g$ και $g \circ f$ δεν είναι ίσες. Με άλλα λόγια, δεν ισχύει ο αντιμεταθετικός κανόνας για τη σύνθεση συναρτήσεων. Οταν σχηματιστεί η σύνθεση συνάρτησης και της αντίστροφής της, με οποιαδήποτε σειρά, λαμβάνουμε συνάρτηση ταυτότητας. Για να το δούμε, έστω ότι η f είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το σύνολο A προς το σύνολο B. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει και είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το B προς το A. Η αντίστροφη συνάρτηση αντιστρέφει την αντιστοιχία της αρχικής συνάρτησης, έτσι ώστε να είναι $f^{-1}(b) = a$ όταν $f(a) = b$, και $f(a) = b$ όταν $f^{-1}(b) = a$. Αρα,

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a,$$

και

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

Κατά συνέπεια $f^{-1} \circ f = t_A$ και $f \circ f^{-1} = t_B$, όπου οι t_A και t_B είναι οι συναρτήσεις ταυτότητας στα σύνολα A και B, αντίστοιχα. Δηλαδή, $(f^{-1})^{-1}=f$.

ΟΙ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μπορούμε να συσχετίσουμε ένα σύνολο ζευγών του $A \times B$ κάθε συνάρτηση από το A προς το B. Αυτό το σύνολο ζευγών ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης και συχνά παριστάνεται με σχήμα για να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το σύνολο A προς το σύνολο B. Η *γραφική παράσταση* της συνάρτησης f είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $\{(a, b) \mid a \in A \text{ και } f(a) = b\}$.

Εξ ορισμού, η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f από το A προς το B είναι το υποσύνολο της $A \times B$ που περιέχει τα διατεταγμένα ζεύγη, όπου το δεύτερο μέλος του ζεύγους ισούται με το στοιχείο του B που έχει ανατεθεί από την f στο πρώτο μέλος του ζεύγους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

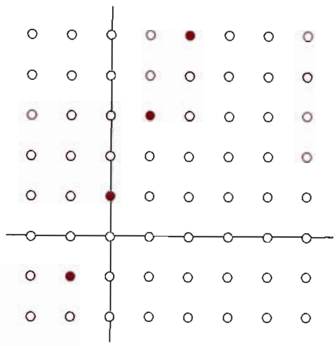
Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(n) = 2n + 1$ από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων.

Λύση: Η γραφική παράσταση της f είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών της μορφής $(n, 2n + 1)$, όπου n ακέραιος. Αυτή η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 8.

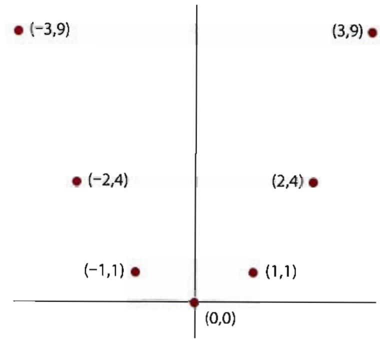
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων.

Λύση: Η γραφική παράσταση της f είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευ-



ΣΧΗΜΑ 8 **Η Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης $f(n) = 2n + 1$ από το Z προς το Z.**



ΣΧΗΜΑ 9 **Η Γραφική Παράσταση της $f(x) = x^2$ από το Z προς το Z.**

γών της μορφής $(x, f(x)) = (x, x^2)$, όπου x είναι ακέραιος. Αυτή η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 9.

ΚΑΠΟΙΕΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε δύο σημαντικές συναρτήσεις των διακριτών μαθηματικών, δηλ., τις συναρτήσεις δαπέδου και οροφής. Εστω ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός. Η συνάρτηση δαπέδου στρογγυλοποιεί τον x προς τα κάτω, στον πλησιέστερο ακέραιο που είναι μικρότερος από ή ίσος με τον x, και η συνάρτηση οροφής στρογγυλοποιεί τον x προς τα επάνω, προς τον πλησιέστερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με τον x. Οι συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιούνται συχνά όταν καταμετρούνται αντικείμενα. Παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση του πλήθους των βημάτων που χρησιμοποιούνται από διαδικασίες για λύση προβλημάτων συγκεκριμένου μεγέθους.

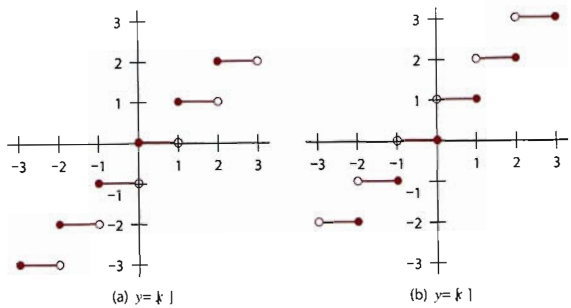
ΟΡΙΣΜΟΣ 12 Η *συνάρτηση δαπέδου* αναθέτει στον πραγματικό αριθμό x τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος από ή ίσος με τον x. Η τιμή της συνάρτησης δαπέδου στον x συμβολίζεται με $\lfloor x \rfloor$. Η *συνάρτηση οροφής* αναθέτει στον πραγματικό αριθμό x τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με τον x. Η τιμή της συνάρτησης δαπέδου στον x συμβολίζεται με $\lceil x \rceil$.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση δαπέδου συχνά ονομάζεται και *συνάρτηση μέγιστου ακέραιου*. Συχνά συμβολίζεται με $[x]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Παρακάτω δίνονται μερικές τιμές των συναρτήσεων δαπέδου και οροφής:

$$\lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor = 0,\quad \lceil \tfrac{1}{2} \rceil = 1,\quad \lfloor -\tfrac{1}{2} \rfloor = -1,\quad \lceil -\tfrac{1}{2} \rceil = 0,$$
$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3,\quad \lceil 3{,}1 \rceil = 4,\quad \lfloor 7 \rfloor = 7,\quad \lceil 7 \rceil = 7.$$



ΣΧΗΜΑ 10 Γραφικές Παραστάσεις των Συναρτήσεων (a) Δαπέδου και (b) Οροφής.

Στο Σχήμα 10 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων δαπέδου και οροφής. Στο Σχήμα 10(a) φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης δαπέδου $\lfloor x \rfloor$. Παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή σε όλο το διάστημα $[n, n + 1)$, δηλ., την τιμή n, και ύστερα κάνει άλμα προς τα επάνω στην τιμή $n + 1$ όταν $x = n + 1$. Στο Σχήμα 10(b) φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης οροφής $\lceil x \rceil$. Παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή σε όλο το διάστημα $(n, n + 1]$, δηλ., την τιμή $n + 1$, και ύστερα κάνει άλμα προς τα επάνω στην τιμή $n + 2$ όταν το x είναι λίγο μεγαλύτερο από $n + 1$.

Οι συναρτήσεις δαπέδου και οροφής είναι χρήσιμες σε μεγάλη ποικιλία εφαρμογών, στις οποίες περιλαμβάνονται και εφαρμογές αποθήκευσης δεδομένων και μετάδοσης δεδομένων. Τα Προβλήματα 22 και 23 αποτελούν τυπικά προβλήματα βασικών υπολογισμών, οι οποίοι εκτελούνται όταν γίνεται μελέτη προβλημάτων βάσεων δεδομένων και επικοινωνιών δεδομένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22

Τα δεδομένα που βρίσκονται αποθηκευμένα σε δίσκο υπολογιστή ή μεταδίδονται μέσα από δίκτυο δεδομένων συνήθως παριστάνονται σαν συμβολοσειρές από byte. Κάθε byte αποτελείται από 8 bit. Πόσα byte χρειάζονται για την κωδικοποίηση 100 bit δεδομένων;

Λύση: Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των byte που χρειάζονται, καθορίζουμε τον μικρότερο ακέραιο που είναι τουλάχιστον όσο το πηλίκο της διαίρεσης του 100 διά του 8, δηλ., του πλήθους των bit σε ένα byte. Κατά συνέπεια, χρειάζονται $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12{,}5 \rceil = 13$ byte.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23

Στην μετάδοση ATM (asynchronous transfer mode = λειτουργία ασύγχρονης μετάδοσης), που είναι ένα πρωτόκολλο επικοινωνιών που χρησιμοποιείται σε δίκτυα κορμού, τα δεδομένα είναι οργανωμένα σε κυψέλες των 53 byte. Πόσες κυψέλες ATM, μπορούν να μεταδοθούν σε ένα λεπτό της ώρας, διαμέσου σύνδεσης που μεταδίδει δεδομένα με ταχύτητα 500 kilobit ανά δευτερόλεπτο;

Λύση: Μέσα σε ένα λεπτό, αυτή η σύνδεση μπορεί να μεταδόσει $500.000 \cdot 60 = 30.000.000$ bit. Κάθε κυψέλη ATM έχει μήκος 53 byte, γεγονός που σημαίνει ότι έχει μήκος $53 \cdot 8 = 424$ bit. Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των κυψελών που μπορούν να μεταδοθούν μέσα σε ένα λεπτό, καθορίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν ξεπερνά το πηλίκο της διαίρεσης του 30.000.000 διά του 424. Κατά συνέπεια $\lfloor 30.000.000/424 \rfloor = 70.754$ κυψέλες ATM μπορούν να μεταδοθούν μέσα σε 1 πρώτο λεπτό μέσα από σύνδεση των 500 kilobit ανά δευτερόλεπτο.

Στον Πίνακα 1, όπου το x συμβολίζει πραγματικό αριθμό, φαίνονται κάποιες απλές αλλά σημαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων δαπέδου και οροφής. Επειδή αυτές οι συναρτήσεις εμφανίζονται πολύ συχνά στα διακριτά μαθηματικά, είναι χρήσιμο να προσέξουμε αυτές τις ιδιότητες. Κάθε ιδιότητα αυτού του πίνακα μπορεί να δειχτεί με χρήση των ορισμών των συναρτήσεων δαπέδου και οροφής. Οι ιδιότητες (1a), (1b), (1c), και (1d) έπονται άμεσα από αυτούς τους ορισμούς. Για παράδειγμα, η (1a) αναφέρει ότι $\lfloor x \rfloor = n$ αν και μόνο αν ο ακέραιος n είναι μικρότερος από ή ίσος με x και ο $n + 1$ είναι μεγαλύτερος από x. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι ο n είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά το x, που είναι ο ορισμός της $\lfloor x \rfloor = n$. Οι ιδιότητες (1b), (1c), και (1d) δείχνονται με παρόμοιο τρόπο. Θα αποδείξουμε την ιδιότητα (a) με χρήση άμεσης απόδειξης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 Χρήσιμες Ιδιότητες των Συναρτήσεων Δαπέδου και Οροφής. (ο n είναι ακέραιος)
(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ αν και μόνο αν $n \le x < n+1$ (1b) $\lceil x \rceil = n$ αν και μόνο αν $n-1 < x \le n$ (1c) $\lfloor x \rfloor = n$ αν και μόνο αν $x-1 < n \le x$ (1d) $\lceil x \rceil = n$ αν και μόνο αν $x \le n < x+1$
(2) $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$
(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ (3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ (4b) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Απόδειξη: Εστω ότι $\lfloor x \rfloor = m$, όπου m είναι θετικός ακέραιος. Σύμφωνα με την ιδιότητα (1a), έπεται ότι $m \le x < m + 1$. Αν προσθέσουμε το n και στις δύο πλευρές αυτής της ανισότητας θα έχουμε ότι $m + n \le x + n < m + n + 1$. Αν χρησιμοποιήσουμε πάλι την ιδιότητα (1a), βλέπουμε ότι $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$.

Ετσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. Η απόδειξη των άλλων ιδιοτήτων παραπέμπεται στις ασκήσεις.

Οι συναρτήσεις δαπέδου και οροφής διαθέτουν και πολλές άλλες χρήσιμες ιδιότητες εκτός από τις ιδιότητες που φαίνονται στον Πίνακα 1. Υπάρχουν και πολλές δηλώσεις για τις συναρτήσεις αυτές που φαίνονται σωστές, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι σωστές. Θα εξετάσουμε δηλώσεις για τις συναρτήσεις δαπέδου και οροφής στα Παραδείγματα 24 και 25.

Μια χρήσιμη προσέγγιση εξέτασης δηλώσεων σχετικών με την συνάρτηση δαπέδου είναι να θέσουμε $x = n + \varepsilon$, όπου ο $n = \lfloor x \rfloor$ είναι ακέραιος και το ε, που είναι το κλασματικό μέρος του x, ικανοποιεί την ανισότητα $0 \le \varepsilon < 1$. Με παρόμοιο τρόπο, όταν εξετάζουμε δηλώσεις για την συνάρτηση οροφής, είναι χρήσιμο να γράφουμε $x = n - \varepsilon$, όπου ο $n = \lceil x \rceil$ είναι ακέραιος και $0 \le \varepsilon < 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24

Να αποδειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Λύση: Για να αποδείξουμε αυτή την δήλωση θέτουμε $x = n + \varepsilon$, όπου ο n είναι θετικός ακέραιος και $0 \le \varepsilon < 1$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για εξέταση ανάλογα αν το ε είναι μικρότερο ή όχι από 1/2. (Η αιτία που επιλέγουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις θα διευκρινιστεί στην απόδειξη.)

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση όπου $0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$. Στην περίπτωση αυτή, $2x = 2n + 2\varepsilon$ και $\lfloor 2x \rfloor = 2n$, επειδή $0 \le 2\varepsilon < 1$. Με παρόμοιο τρόπο, $x + \frac{1}{2} = n + (\frac{1}{2} + \varepsilon)$, έτσι ώστε $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n$, επειδή $0 < \frac{1}{2} + \varepsilon < 1$. Κατά συνέπεια, $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ και $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + n = 2n$.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $\frac{1}{2} \le \varepsilon < 1$. Στην περίπτωση αυτή, $2x = 2n + 2\varepsilon = (2n+1) + (2\varepsilon - 1)$. Επειδή $0 \le 2\varepsilon - 1 < 1$, έπεται ότι $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$. Επειδή $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor n + (\frac{1}{2} + \varepsilon) \rfloor = \lfloor n + 1 + (\varepsilon - \frac{1}{2}) \rfloor$ και $0 \le \varepsilon - \frac{1}{2} < 1$, έπεται ότι $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$. Κατά συνέπεια, $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ και $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + (n+1) = 2n + 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25

Να αποδειχτεί αν ισχύει ή όχι ότι $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

Λύση: Αν και ίσως αυτή η δήλωση φαίνεται λογική, εν τούτοις είναι ψευδής. Δίνουμε ένα αντιπαράδειγμα με $x = \frac{1}{2}$ και $y = \frac{1}{2}$. Με τις τιμές αυτές βρίσκουμε ότι $\lceil x+y \rceil = \lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rceil = \lceil 1 \rceil = 1$, αλλά $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil \frac{1}{2} \rceil + \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1+1 = 2$.

Υπάρχουν ορισμένα είδη συναρτήσεων που θα χρησιμοποιούνται σε ολόκληρο το βιβλίο. Μεταξύ των συναρτήσεων αυτών είναι πολυωνυμικές, λογαριθμικές, και εκθετικές συναρτήσεις. Στο Παράρτημα 1 δίνεται μια σύντομη περίληψη των ιδιοτήτων αυτών των συναρτήσεων που χρειάζονται στο βιβλίο. Θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\log x$ για να συμβολίζει τον λογάριθμο του x με βάση το 2, επειδή το 2 είναι η βάση που συνήθως χρησιμοποιούμε για λογαρίθμους. Με $\log_b x$ θα συμβολίζουμε τους λογαρίθμους με βάση το b, όπου b είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από 1, και με $\ln x$ τους φυσικούς λογαρίθμους.

Μιά άλλη συνάρτηση που θα χρησιμοποιούμε σε ολόκληρο το βιβλίο αυτό είναι η παραγοντική συνάρτηση $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}^+$, που συμβολίζεται με την $f(n) = n!$. Η τιμή της $f(n) = n!$ είναι το γινόμενο των πρώτων n θετικών ακέραιων, έτσι ώστε να είναι $f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ [και $f(0) = 0! = 1$].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Εχουμε $f(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ασκήσεις

1. Για ποιά αιτία η f δεν είναι συνάρτηση από το **R** προς το **R** αν
   a) $f(x) = 1/x$; **b)** $f(x) = \sqrt{x}$; **c)** $f(x) = \pm\sqrt{(x^2+1)}$;
2. Να προσδιοριστεί αν η f είναι συνάρτηση από το **Z** προς το **R** αν
   a) $f(n) = \pm n$ **b)** $f(n) = \sqrt{n^2+1}$ **c)** $f(n) = 1/(n^2-4)$.
3. Να προσδιοριστεί αν η f είναι συνάρτηση από το σύνολο όλων των συμβολοσειρών bit προς το σύνολο των ακέραιων αν
   a) η $f(S)$ είναι η θέση ενός bit 0 στο S.
   b) η $f(S)$ είναι το πλήθος των bit 1 στο S.
   c) η $f(S)$ είναι ο μικρότερος ακέραιος i έτσι ώστε το bit τάξης i του S να είναι 1 και $f(S) = 0$ όταν το S είναι η κενή συμβολοσειρά, δηλ., η συμβολοσειρά χωρίς bit.
4. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το εύρος τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.
   a) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε μη αρνητικό ακέραιο το τελευταίο του ψηφίο.
   b) της συνάρτησης που αναθέτει τον επόμενο μεγαλύτερο ακέραιο σε θετικό ακέραιο.

c) της συνάρτησης που αναθέτει σε συμβολοσειρά bit το πλήθος των bit 1 στην συμβολοσειρά.

d) της συνάρτησης που αναθέτει σε συμβολοσειρά bit το πλήθος των bit της συμβολοσειράς.

5. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

a) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε συμβολοσειρά bit την διαφορά μεταξύ του πλήθους των 1 και του πλήθους των 0.

b) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε συμβολοσειρά bit δύο φορές το πλήθος των 0 στην συμβολοσειρά αυτή.

c) της συνάρτησης που αναθέτει το πλήθος των bit που απομένουν όταν συμβολοσειρά bit χωρίζεται σε byte (που είναι ομάδες των 8 bit).

d) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε θετικό ακέραιο το μεγαλύτερο τέλειο τετράγωνο που δεν ξεπερνά αυτόν τον ακέραιο.

6. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το εύρος τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

a) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε ζεύγος θετικών ακέραιων τον πρώτο ακέραιο του ζεύγους.

b) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε θετικό ακέραιο το μεγαλύτερό του δεκαδικό ψηφίο.

c) της συνάρτησης που αναθέτει σε συμβολοσειρά bit την διαφορά μεταξύ του πλήθους των 1 και του πλήθους των 0 της συμβολοσειράς.

d) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε θετικό ακέραιο τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν ξεπερνά την τετραγωνική ρίζα του ακέραιου.

e) της συνάρτησης που αναθέτει σε συμβολοσειρά bit την συμβολοσειρά των 1 με το μεγαλύτερο μήκος στην συμβολοσειρά.

7. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το εύρος τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

a) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε ζεύγος θετικών ακέραιων τον μεγαλύτερο από αυτούς τους δύο ακέραιους.

b) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε θετικό ακέραιο το πλήθος των ψηφίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9 που δεν εμφανίζονται σαν δεκαδικά ψηφία του ακέραιου.

c) της συνάρτησης που αναθέτει σε στοιχειοσειρά bit το πόσες φορές εμφανίζεται η ομάδα 11.

d) της συνάρτησης που αναθέτει σε συμβολοσειρά bit την αριθμητική θέση του πρώτου 1 στην συμβολοσειρά και που αναθέτει την τιμή 0 σε συμβολοσειρά bit που αποτελείται μόνο από 0.

8. Να βρεθούν οι παρακάτω τιμές

a) $\lfloor 1{,}1 \rfloor$ **b)** $\lceil 1{,}1 \rceil$ **c)** $\lfloor -0{,}1 \rfloor$ **d)** $\lceil -0{,}1 \rceil$

e) $\lceil 2{,}99 \rceil$ **f)** $\lceil -2{,}99 \rceil$ **g)** $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{1}{2} \rceil \rfloor$ **h)** $\lceil \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lceil \frac{1}{2} \rceil + \frac{1}{2} \rceil$

9. Να βρεθούν οι παρακάτω τιμές

a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil$ **b)** $\lfloor \frac{7}{8} \rfloor$ **c)** $\lceil -\frac{3}{4} \rceil$ **d)** $\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor$ **e)** $\lceil 3 \rceil$

f) $\lfloor -1 \rfloor$ g) $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{3}{2} \rceil \rfloor$ h) $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor$

10. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις από το $\{a, b, c, d\}$ προς τον εαυτό του είναι ένα-προς-ένα.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

11. Ποιές συναρτήσεις στην Ασκηση 10 είναι συναρτήσεις επί;

12. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις από το **Z** προς το **Z** είναι συναρτήσεις ένα-προς-ένα.

a) $f(n) = n - 1$

b) $f(n) = n^2 + 1$

c) $f(n) = n^3$

d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

13. Ποιές συναρτήσεις στην Ασκηση 12 είναι συναρτήσεις επί;

14. Να προσδιοριστεί αν η f: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ είναι συνάρτηση επί αν

a) $f(m,n) = 2m - n$ **b)** $f(m,n) = m^2 - n^2$

c) $f(m,n) = m + n + 1$ **d)** $f(m,n) = |m| - |n|$ **e)** $f(m,n) = m^2 - 4$.

15. Να προσδιοριστεί αν η συνάρτηση f: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ είναι συνάρτηση επί αν

a) $f(m,n) = m + n$ **b)** $f(m,n) = m^2 + n^2$.

c) $f(m,n) = m$ **d)** $f(m,n) = |n|$ **e)** $f(m,n) = m - n$.

16. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης από το **N** προς το **N** που είναι

a) συνάρτηση ένα-προς-ένα αλλά όχι συνάρτηση επί.

b) συνάρτηση επί αλλά όχι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

c) και συνάρτηση επί και συνάρτηση ένα-προς-ένα (αλλά διαφορετική από την συνάρτηση ταυτότητας).

d) ούτε συνάρτηση ένα-προς-ένα ούτε συνάρτηση επί.

17. Να δοθεί σαφής τύπος για συνάρτηση από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων, η οποία να είναι

a) συνάρτηση ένα-προς-ένα, αλλά όχι συνάρτηση επί.

b) συνάρτηση επί, αλλά όχι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

c) συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί.

d) ούτε συνάρτηση ένα-προς-ένα ούτε συνάρτηση επί.

18. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το **R** προς το **R**.

a) $f(x) = -3x + 4$ **b)** $f(x) = -3x^2 + 7$

c) $f(x)=(x+1)/(x+2)$ **d)** $f(x)=x^5+1$

19. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το **R** προς το **R**.

a) $f(x)=2x+1$ **b)** $f(x)=x^2+1$

c) $f(x)=x^3$ **d)** $f(x) = (x^2+1) / (x^2+2)$

20. Εστω ότι f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και έστω ότι $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in \mathbf{R}$. Να δειχτεί ότι η $f(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα αν και μόνο αν η συνάρτηση $g(x) = 1/ f(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα.

21. Εστω ότι f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και έστω ότι $f(x) > 0$. Να δειχτεί ότι η $f(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα αν και μόνο αν η συνάρτηση $g(x) = 1/f(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα.

22. Εστω ότι $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Να βρεθεί η $f(S)$ αν

a) $f(x)=1$ **b)** $f(x)=2x+1$.

c) $f(x)=\lceil x/5 \rceil$ **d)** $f(x)=\lfloor (x^2+1)/3 \rfloor$.

23. Εστω ότι $f(x)=\lfloor x^2/3 \rfloor$. Να βρεθεί η $f(S)$ αν

a) $S=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ **b)** $S=\{0,1,2,3,4,5\}$.

c) $S=\{1,5,7,11\}$ **d)** $S=\{2,6,10,14\}$.

24. Εστω ότι $f(x) = 2x$. Ποιές είναι οι

a) $f(\mathbf{Z})$; **b)** $f(\mathbf{N})$; **c)** $f(\mathbf{R})$;

25. Εστω ότι η g είναι συνάρτηση από το A προς το B και ότι η f είναι συνάρτηση από το B προς το C.

a) Να δειχτεί ότι αν και οι δύο f και g είναι συναρτήσεις ένα-προς-ένα, τότε και η $f \circ g$ είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

b) Να δειχτεί ότι αν και οι δύο f και g είναι συναρτήσεις επί, τότε και η $f \circ g$ είναι συνάρτηση επί.

***26.** Αν η f και η $f \circ g$ είναι συναρτήσεις ένα-προς-ένα, μήπως έπεται ότι η συνάρτηση g είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

***27.** Αν η f και η $f \circ g$ είναι συναρτήσεις επί, μήπως έπεται ότι η g είναι συνάρτηση επί; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

28. Να βρεθούν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ όπου η $f(x)=x^2+1$ και η $g(x) = x + 2$ είναι συναρτήσεις από το **R** προς το **R**.

29. Να βρεθούν οι $f + g$ και fg για τις συναρτήσεις f και g που δίνονται στην Ασκηση 28.

30. Εστω ότι $f(x) = ax + b$ και $g(x) = cx + d$ όπου τα a, b, c, και d είναι σταθερές.

Να προσδιοριστεί για ποιές σταθερές a, b, c, και d ισχύει ότι $f \circ g = g \circ f$.

31. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = ax+b$ από το **R** προς το **R** είναι αντιστρεπτή, όπου τα a και b είναι σταθερές, με $a \neq 0$, και να βρεθεί η αντίστροφη της f.

32. Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το σύνολο A προς το σύνολο B. Εστω ότι τα S και T είναι υποσύνολα του A. Να δειχτεί ότι

a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ **b)** $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

33. Να δοθεί παράδειγμα για να δειχτεί ότι ο εγκλεισμός στο μέρος (b) της Ασκησης 32 μπορεί να είναι γνήσιος.

Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το σύνολο A προς το σύνολο B. Εστω ότι το S είναι υποσύνολο του B. Ορίζουμε ότι η **αντίστροφη εικόνα** του S είναι το υποσύνολο του A που περιέχει όλες τις προ-εικόνες όλων των στοιχείων του S. Συμβολίζουμε την αντίστροφη εικόνα του S με $f^{-1}(S)$, έτσι ώστε να είναι $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$.

34. Εστω ότι η f είναι η συνάρτηση από το **R** προς το **R** που ορίζεται από την $f(x)\, x^2$. Να βρεθούν οι παρακάτω

a) $f^{-1}(\{1\})$ **b)** $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$ **c)** $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$.

35. Εστω ότι $g(x) = \lfloor x \rfloor$. Να βρεθούν οι παρακάτω

a) $g^{-1}(\{0\})$ **b)** $g^{-1}(\{-1, 0, 1\})$ **c)** $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$.

36. Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το A προς το B. Εστω ότι τα S και T είναι υποσύνολα του B. Να δειχτεί ότι

a) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ **b)** $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

37. Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το A προς το B. Εστω ότι το S είναι υποσύνολο του B. Να δειχτεί ότι $f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$.

38. Να δειχτεί ότι αν ο $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον αριθμό x, εκτός από την περίπτωση που ο x βρίσκεται στο μέσο μεταξύ δύο ακέραιων, όταν είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς τους δύο ακέραιους.

39. Να δειχτεί ότι αν ο $\lceil x + \frac{1}{2} \rceil$ είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον αριθμό x, εκτός από την περίπτωση που ο x βρίσκεται στο μέσο μεταξύ δύο ακέραιων, όταν είναι ο μικρότερος από αυτούς τους δύο ακέραιους.

40. Να δειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$ αν ο x δεν είναι ακέραιος και $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 0$ αν ο x είναι ακέραιος.

41. Να δειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, τότε $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

42. Να δειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός και ο m είναι ακέραιος, τότε

$\lceil x+m \rceil = \lceil x \rceil + m$.

43. Να δειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός και ο n είναι ακέραιος, τότε

a) $x < n$ αν και μόνο αν $\lfloor x \rfloor < n$ **b)** $n < x$ αν και μόνο αν $n < \lceil x \rceil$.

44. Να δειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός και ο n είναι ακέραιος, τότε

a) $x < n$ αν και μόνο αν $\lceil x \rceil \le n$ **b)** $n \le x$ αν και μόνο αν $n \le \lfloor x \rfloor$.

45. Να αποδειχτεί ότι αν ο n είναι ακέραιος, τότε $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ αν ο n είναι άρτιος και $(n-1)/2$ αν ο n είναι περιττός.

46. Να αποδειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ και $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

47. Η συνάρτηση INT βρίσκεται σε κάποιες αριθμομηχανές, όπου $\mathrm{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$ όταν ο x είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και $\mathrm{INT}(x) = \lceil x \rceil$ όταν ο x είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός. Να δειχτεί ότι αυτή η συνάρτηση INT ικανοποιεί την ταυτότητα $\mathrm{INT}(-x) = -\mathrm{INT}(x)$.

48. Εστω ότι τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί, με $a < b$. Να χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις δαπέδου και/ή οροφής για να εκφραστεί το πλήθος των ακέραιων n που ικανοποιούν την ανισότητα $a \le n \le b$.

49. Εστω ότι τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί, με $a < b$. Να χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις δαπέδου και/ή οροφής για να εκφραστεί το πλήθος των ακέραιων n που ικανοποιούν την ανισότητα $a < n < b$.

50. Πόσα byte χρειάζονται για την κωδικοποίηση n bit δεδομένων, όπου το n είναι ίσο με

a) 4; **b)** 10; **c)** 500; **d)** 3.000;

51. Πόσα byte χρειάζονται για την κωδικοποίηση n bit δεδομένων, όπου το n είναι ίσο με

a) 7; **b)** 17; **c)** 1.001; **d)** 28.800;

52. Πόσες κυψέλες ATM (που περιγράφονται στο Παράδειγμα 23) μπορούν να μεταδοθούν μέσα σε 10 δευτερόλεπτα, μέσα από ζεύξης που λειτουργεί με τις παρακάτω ταχύτητες;

a) 128 kilobit ανά δευτερόλεπτο (1 kilobit = 1000 bit)

b) 300 kilobit ανά δευτερόλεπτο

c) 1 megabit ανά δευτερόλεπτο (1 megabit = 1.000.000 bit)

53. Δεδομένα μεταδίδονται μέσα από συγκεκριμένο δίκτυο Ethernet σε ομάδες (block) των 1500 οκτάδων (block των 8 bit). Πόσα block χρειάζονται για την μετάδοση των παρακάτω ποσοτήτων δεδομένων μέσα από αυτό το δίκτυο Ethernet; (Σημειώνεται ότι το byte είναι το συνώνυμο της οκτάδας, το kilobyte των 1000 byte, και το megabyte του 1.000.000 byte.)

a) 150 kilobyte δεδομένων **b)** 384 kilobyte δεδομένων

c) 1,544 megabyte δεδομένων **d)** 45,3 megabyte δεδομένων

54. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(n)=1-n^2$ από το **Z** προς το **Z**.

55. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\lfloor 2x \rfloor$ από το **R** προς το **R**.

56. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\lfloor x/2 \rfloor$ από το **R** προς το **R**.

57. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\lfloor x \rfloor+\lfloor x/2 \rfloor$ από το **R** προς το **R**.

58. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\lceil x \rceil+\lfloor x/2 \rfloor$ από το **R** προς το **R**.

59. Να σχεδιαστούν γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

a) $f(x)=\lfloor x+\frac{1}{2} \rfloor$ **b)** $f(x)=\lfloor 2x+1 \rfloor$ **c)** $f(x)=\lceil x/3 \rceil$ **d)** $f(x)=\lceil 1/x \rceil$

e) $f(x)=\lceil x-2 \rceil+\lfloor x+2 \rfloor$ **f)** $f(x)=\lfloor 2x \rfloor\lceil x/2 \rceil$ **g)** $f(x)=\lceil \lfloor x-\frac{1}{2} \rfloor+\frac{1}{2} \rceil$

60. Να σχεδιαστούν γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

a) $f(x)=\lceil 3x-2 \rceil$ **b)** $f(x)=\lceil 0{,}2x \rceil$ **c)** $f(x)=\lfloor -1/x \rfloor$

d) $f(x)=\lfloor x^2 \rfloor$ **e)** $f(x)=\lceil x/2 \rceil\lfloor x/2 \rfloor$

f) $f(x)=\lfloor x/2 \rfloor+\lceil x/2 \rceil$ **g)** $f(x)=\lfloor 2\lceil x/2 \rceil+\frac{1}{2} \rfloor$

61. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)=x^3+1$.

62. Εστω ότι η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση από το Y προς το Z και ότι η g είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση από το X προς το Y. Να δειχτεί ότι η αντίστροφη της σύνθεσης $f\circ g$ δίνεται από την $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

63. Εστω ότι το S είναι υποσύνολο του γενικού συνόλου U. Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** f_S του S είναι η συνάρτηση από το U προς το σύνολο $\{0, 1\}$, έτσι ώστε να είναι $f_S(x)=1$ αν το x ανήκει στο S και $f_S(x)=0$ αν το x δεν ανήκει στο S. Εστω ότι A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι για όλα τα x

a) $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)$ **b)** $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\cdot f_B(x)$

c) $f_{\overline{A}}(x)=1-f_A(x)$ **d)** $f_{A\oplus B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)$

64. Εστω ότι η f είναι συνάρτηση από το A προς το B, όπου τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα με $|A|=|B|$. Να δειχτεί ότι η f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα αν και μόνο αν είναι συνάρτηση επί.

65. Να αποδειχτεί αν ισχύουν ή δεν ισχύουν οι παρακάτω δηλώσεις για τις συναρτήσεις δαπέδου και οροφής.

a) $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x.

b) $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ όταν ο x είναι πραγματικός αριθμός.

c) $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - \lceil x+y \rceil = 0$ ή 1, όταν οι x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

d) $\lceil xy \rceil = \lceil x \rceil \lceil y \rceil$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

e) $\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x.

66. Να αποδειχτεί αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω δηλώσεις για τις συναρτήσεις δαπέδου και οροφής.

a) $\lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x.

b) $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

c) $\lceil \lceil x/2 \rceil /2 \rceil = \lceil x/4 \rceil$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x.

d) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x.

e) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$ γι' όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

67. Να αποδειχτεί ότι αν ο x είναι θετικός πραγματικός αριθμός, τότε

a) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. **b)** $\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$.

68. Εστω ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός. Να δειχτεί ότι $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor$.

Υπάρχει περίπτωση, ένα πρόγραμμα που έχει σχεδιαστεί να αποτιμά συνάρτηση, να μη δίνει την σωστή τιμή της συνάρτησης για όλα τα στοιχεία στο πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης. Για παράδειγμα, ένα πρόγραμμα ίσως να μη δίνει ακριβή τιμή, επειδή η αποτίμηση της συνάρτησης να οδηγεί σε άπειρο βρόχο ή σε υπερχείλιση.

Για να μελετήσουμε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε την έννοια της μερικής συνάρτησης. **Μερική συνάρτηση** f από σύνολο A προς σύνολο B είναι η ανάθεση σε κάθε στοιχείο a ενός υποσυνόλου του A, που ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f, μοναδικού στοιχείου b του B. Τα σύνολα A και B ονομάζονται **πεδίο ορισμού** και **πεδίο τιμών** της f, αντίστοιχα. Λέμε ότι η f **δεν ορίζεται** για στοιχεία του A που δεν βρίσκονται μέσα στο πεδίο ορισμού της f. Γράφουμε $f: A \to B$ για να συμβολίσουμε ότι η f είναι μερική συνάρτηση από το A προς το B. (Ο συμβολισμός είναι ίδιος με τον συμβολισμό που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις. Τα συμφραζόμενα όπου χρησιμοποιείται ο συμβολισμός καθορίζουν αν η f θα είναι μερική συνάρτηση ή ολική συνάρτηση.) Οταν το πεδίο ορισμού της f είναι ίσο με το A, λέμε ότι η f είναι **ολική συνάρτηση**.

69. Στις παρακάτω μερικές συναρτήσεις, να προσδιοριστούν τα πεδία ορισμού και πεδία τιμών τους, και το σύνολο των τιμών για τις οποίες δεν ορίζονται. Ακόμη, να καθοριστεί αν είναι ολικές συναρτήσεις.

a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(n) = 1/n$ **b)** $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

c) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $f(m,n) = m/n$ **d)** $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(m,n) = mn$

e) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(m,n) = m - n$ αν $m > n$

70. a) Να δειχτεί ότι μπορούμε να δούμε μερική συνάρτηση από το A προς το B σαν συνάρτηση f^* από το A προς το $B \cup \{u\}$ όπου το u δεν είναι στοιχείο του B, και

$$f^*(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{αν το } \alpha \text{ ανήκει στο πεδίο ορισμού της } f, \\ u & \text{αν η } f \text{ δεν ορίζεται στο } \alpha. \end{cases}$$

b) Με χρήση της κατασκευής στο (*a*), να βρεθεί η συνάρτηση f^* που αντιστοιχεί σε κάθε μερική συνάρτηση της Ασκησης 69.

***71.** Να δειχτεί ότι η συνάρτηση f: $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ με $f(m, n) = (m+n-2)(m+n-1)/2+m$ είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα και επί.

Βασικοί Οροι και Συμπεράσματα

ΛΟΓΙΚΗ (ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1-4):

ΟΡΟΙ

πρόταση: δήλωση η οποία είναι αληθής ή ψευδής

τιμή αληθείας: αληθές ή ψευδές

$\neg$ ***p*** **(άρνηση της *p*):** η πρόταση με τιμή αληθείας αντίθετη από την τιμή αληθείας της p

λογικοί τελεστές: τελεστές που χρησιμοποιούνται για τον συνδυασμό προτάσεων

σύνθετη πρόταση: πρόταση που κατασκευάζεται με συνδυασμό προτάσεων με χρήση λογικών τελεστών

πίνακας αληθείας: πίνακας όπου εμφανίζονται οι τιμές αληθείας των προτάσεων

$p \vee q$ **(διάζευξη των *p* και *q*):** η πρόταση που είναι αληθής εκτός και αν και οι δύο p και q είναι ψευδείς

$p \wedge q$ **(σύζευξη των *p* και *q*):** η πρόταση που είναι αληθής μόνο αν και οι δύο p και q είναι αληθείς

$p \oplus q$ **(αποκλειστικό ή των *p* και *q*):** η πρόταση που είναι αληθής όταν μόνο μια από τις p και q είναι αληθής

$p \to q$ **(η *p* συνεπάγεται την *q*):** η πρόταση που είναι ψευδής όταν μόνο η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής

αντιστροφή της $p \to q$**:** η συνεπαγωγή $q \to p$

αντιθετική της $p \to q$: η συνεπαγωγή $\neg q \to \neg p$

αντίστροφη της $p \to q$: η συνεπαγωγή $\neg p \to \neg q$

$p \leftrightarrow q$ (δισυποθετική): η πρόταση που είναι αληθής μόνο όταν οι p και q έχουν την ίδια τιμή αληθείας

bit: είτε ένα 0 είτε ένα 1

μεταβλητή Boole: μεταβλητή που έχει τιμή 0 ή 1

πράξη με bit: πράξη σε ένα ή σε πολλά bit

στοιχειοσειρά bit: κατάλογος από bit

πράξεις σε bit: πράξεις σε στοιχειοσειρές bit που ενεργούν σε κάθε bit στοιχειοσειράς και στο αντίστοιχο bit στην άλλη στοιχειοσειρά

ταυτολογία: σύνθετη πρόταση που είναι πάντοτε αληθής

αντίφαση: σύνθετη πρόταση που είναι πάντοτε ψευδής

ενδεχόμενο: σύνθετη πρόταση που μερικές φορές είναι αληθής και μερικές φορές είναι ψευδής

συνακόλουθες σύνθετες προτάσεις: σύνθετες προτάσεις για τις οποίες υπάρχει ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές η οποία κάνει όλες τις προτάσεις αληθείς

λογική ισοδυναμία: οι σύνθετες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες αν έχουν πάντοτε τις ίδιες τιμές αληθείας

προτασιακή συνάρτηση: συνδυασμός μεταβλητής και κατηγορήματος

πεδίο ορισμού: περιοχή της μεταβλητής σε προτασιακή συνάρτηση

$\exists x P(x)$ (υπαρξιακή ποσοτικοποίηση της $P(x)$): η πρόταση που είναι αληθής αν και μόνο αν υπάρχει x στο πεδίο ορισμού έτσι ώστε η $P(x)$ να είναι αληθής

$\forall x P(x)$ (καθολική ποσοτικοποίηση της $P(x)$): η πρόταση που είναι αληθής αν και μόνο αν η $P(x)$ είναι αληθής για όλα τα x στο πεδίο ορισμού

ελεύθερη μεταβλητή: μεταβλητή που δεν είναι δεσμευμένη σε προτασιακή συνάρτηση

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι λογικές ισοδυναμίες που δίνονται στους Πίνακες 5, 6, και 7 στην Παράγραφο 1.2.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ (ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 5):

ΟΡΟΙ

θεώρημα: μαθηματικός ισχυρισμός που μπορεί να δειχτεί ότι είναι αληθής

υπόθεση: μαθηματικός ισχυρισμός του οποίου η τιμή αληθείας είναι άγνωστη

απόδειξη: επίδειξη ότι ένα θεώρημα ισχύει

λήμμα: απλό θεώρημα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη άλλων θεωρημάτων

πόρισμα: πρόταση που μπορεί να αποδειχτεί ότι είναι συνέπεια θεωρήματος που μόλις έχει αποδειχτεί

κανόνας εξαγωγής συμπερασμάτων: συνεπαγωγή που είναι ταυτολογία η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για εξαγωγή συμπερασμάτων από γνωστούς ισχυρισμούς

πλάνη: συνεπαγωγή η οποία είναι ενδεχόμενο που συχνά χρησιμοποιείται λανθασμένα για εξαγωγή συμπερασμάτων

κυκλική λογική σκέψη: λογική εξαγωγή συμπερασμάτων, όπου ένα ή περισσότερα βήματα βασίζονται στην αλήθεια της δήλωσης που πρόκειται να αποδειχτεί

κενή απόδειξη: απόδειξη ότι η συνεπαγωγή $p \to q$ είναι αληθής με βάση το γεγονός ότι η p είναι ψευδής

προφανής απόδειξη: απόδειξη ότι η συνεπαγωγή $p \to q$ είναι αληθής, με βάση το γεγονός ότι η p είναι αληθής

άμεση απόδειξη: απόδειξη ότι η συνεπαγωγή $p \to q$ είναι αληθής, η οποία προχωρά με το να δείχνει ότι η q πρέπει να είναι αληθής όταν η p είναι αληθής

έμμεση απόδειξη: απόδειξη ότι η συνεπαγωγή $p \to q$ είναι αληθής, η οποία προχωρά με το να δείχνει ότι η p πρέπει να είναι ψευδής όταν η q είναι ψευδής

απόδειξη με αντίφαση: απόδειξη ότι πρόταση p είναι αληθής, με βάση την αλήθεια της συνεπαγωγής $\neg p \to q$ όπου η q είναι αντίφαση

απόδειξη κατά περίπτωση: απόδειξη συνεπαγωγής όπου η υπόθεση είναι διάζευξη προτάσεων που δείχνει ότι κάθε υπόθεση συνεπάγεται ξεχωριστά το συμπέρασμα

αντιπαράδειγμα: στοιχείο x έτσι ώστε η $P(x)$ να είναι ψευδής

εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: απόδειξη ότι υπάρχει στοιχείο με συγκεκριμένη ιδιότητα που βρίσκει με σαφήνεια παρόμοιο στοιχείο

μη εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: απόδειξη ότι υπάρχει στοιχείο με συγκεκριμένη ιδιότητα που δεν βρίσκει με σαφήνεια παρόμοιο στοιχείο

ρητός αριθμός: αριθμός που μπορεί να εκφραστεί σαν λόγος δύο ακέραιων p και q, έτσι ώστε να είναι $q \neq 0$

απόδειξη μοναδικότητας: απόδειξη ότι υπάρχει μόνο ένα στοιχείο που να ικανοποιεί συγκεκριμένη ιδιότητα

ΣΥΝΟΛΑ (ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 6-7):

ΟΡΟΙ

σύνολο: συλλογή ξεχωριστών αντικειμένων

αξίωμα: βασική υπόθεση μιάς θεωρίας

παράδοξο: λογική ασυνέπεια

στοιχείο, μέλος συνόλου: αντικείμενο συνόλου

$\emptyset$ (κενό σύνολο, μηδενικό σύνολο): σύνολο χωρίς μέλη

γενικό σύνολο: σύνολο που περιέχει όλα τα αντικείμενα που εξετάζονται

διάγραμμα Venn: γραφική παράσταση συνόλου ή συνόλων

$S = T$ (ισότητα συνόλων): τα S και T έχουν τα ίδια στοιχεία

$S \subseteq T$ (το S είναι υποσύνολο του T): κάθε στοιχείο του S είναι και στοιχείο του T

$S \subset T$ (το S είναι γνήσιο υποσύνολο του T): το S είναι υποσύνολο του T και $S \neq T$
πεπερασμένο σύνολο: σύνολο με n στοιχεία όπου ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος
άπειρο σύνολο: σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο
$|S|$ (ο πληθικός αριθμός του S): το πλήθος των στοιχείων του S
$A \cup B$ (η ένωση των A και B): το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν τουλάχιστο σε ένα από τα A και B
$A \cap B$ (η τομή των A και B): το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B
$A - B$ (η διαφορά των A και B): το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν στο A αλλά όχι στο B
$\overline{A}$ (το συμπλήρωμα του A): το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο γενικό σύνολο που δεν βρίσκονται στο A
$A \oplus B$ (η συμμετρική διαφορά των A και B): το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν μόνο σε ένα από τα A και B
πίνακας μελών: πίνακας που δείχνει την συμμετοχή των στοιχείων σε σύνολα

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι ταυτότητες συνόλων που φαίνονται στον Πίνακα 1 της Παραγράφου 1.7

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 8):

ΟΡΟΙ

συνάρτηση από το A προς το B: ανάθεση μόνο ενός στοιχείου του B σε κάθε στοιχείο του A
πεδίο ορισμού της f: το σύνολο A όπου η f είναι συνάρτηση από το A προς το B
πεδίο τιμών της f: το σύνολο B όπου η f είναι συνάρτηση από το A προς το B
η b είναι η εικόνα της a υπό την f: $b = f(a)$
η a είναι προ-εικόνα της b υπό την f: $f(a) = b$
εύρος τιμών της f: το σύνολο των εικόνων της f
συνάρτηση επί: συνάρτηση από το A προς το B έτσι ώστε κάθε στοιχείο του B να είναι η εικόνα κάποιου στοιχείου του A
συνάρτηση ένα-προς-ένα: συνάρτηση όπου οι εικόνες των στοιχείων στο πεδίο της ορισμού είναι όλες διαφορετικές
αντιστοιχία ένα-προς-ένα: συνάρτηση που είναι και συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί
αντίστροφη της f: συνάρτηση που αντιστρέφει την αντιστοιχία που δίνεται από την f (όταν η f είναι συνάρτηση αντιστοιχίας ένα-προς-ένα)
$f \circ g$ (σύνθεση των f και g): η συνάρτηση που αναθέτει την $f(g(x))$ στην x
$\lfloor x \rfloor$ (συνάρτηση δαπέδου): ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά την x

$\lceil x \rceil$ **(συνάρτηση οροφής):** ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με x.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1. a) Να οριστεί η άρνηση πρότασης.
b) Ποιά είναι η άρνηση της "Αυτό το μάθημα είναι βαρετό";
2. a) Να οριστούν (με χρήση πινάκων αληθείας) η διάζευξη, η σύζευξη, το αποκλειστικό ή, η υποθετική, και η δισυποθετική των προτάσεων p και q.
b) Ποιές είναι η διάζευξη, η σύζευξη, το αποκλειστικό ή, η συνεπαγωγή, και η δισυποθετική των προτάσεων "Σήμερα το βράδυ θα πάω στον κινηματογράφο" και "Θα τελειώσω το διάβασμά μου των διακριτών μαθηματικών";
3. a) Να περιγραφούν τουλάχιστον πέντε διαφορετικοί τρόποι γραφής στην καθομιλουμένη της συνεπαγωγής $p \to q$.
b) Να περιγραφούν η αντίστροφη και η αντιθετοαντιστοφή συνεπαγωγής.
c) Να αναφερθούν η αντίστροφη και η αντιθετοαντιστοφή της συνεπαγωγής "Αν έχει ήλιο αύριο, τότε θα πάω περίπατο στο δάσος."
4. a) Τι σημαίνει να είναι λογικά ισοδύναμες δύο προτάσεις;
b) Να περιγραφούν οι διαφορετικοί τρόποι για να δειχτεί ότι δύο σύνθετες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες;
c) Να δειχτεί με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους ότι οι σύνθετες προτάσεις $\neg p \vee (r \to \neg q)$ και $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ είναι ισοδύναμες.
5. (*Εξαρτάται από τις Ασκήσεις της Παραγράφου 1.2*)
a) Αν δίνεται πίνακας αληθείας, να εξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται η διαζευκτική κανονική μορφή για να κατασκευαστεί σύνθετη πρόταση με αυτόν τον πίνακα αληθείας.
b) Να εξηγηθεί η αιτία για την οποία το τμήμα (*a*) δείχνει ότι οι τελεστές $\wedge, \vee$, και $\neg$ είναι λειτουργικά πλήρεις.
c) Μήπως υπάρχει τελεστής έτσι ώστε η ομάδα που περιέχει μόνον αυτόν τον τελεστή να είναι λειτουργικά πλήρης;
6. Ποιές είναι οι καθολικές και υπαρξιακές ποσοτικοποιήσεις κατηγορήματος $P(x)$; Ποιές είναι οι αρνήσεις τους;
7. a) Ποιά είναι η διαφορά μεταξύ της ποσοτικοποίησης $\exists x \forall y P(x, y)$ και της $\forall y \exists x P(x, y)$, όπου $P(x, y)$ είναι κατηγόρημα;
b) Να δοθεί παράδειγμα κατηγορήματος $P(x, y)$ έτσι ώστε οι $\exists x \forall y P(x, y)$ και $\forall y \exists x P(x, y)$ να έχουν διαφορετικές τιμές αληθείας.
8. a) Να εξηγηθεί τι σημαίνει άμεση απόδειξη, έμμεση απόδειξη, και απόδειξη με αντίφαση συνεπαγωγής $p \to q$.
b) Να δοθεί άμεση απόδειξη, έμμεση απόδειξη, και απόδειξη με αντίφαση της δήλωσης: "Αν ο n είναι άρτιος, τότε ο $n + 4$ είναι άρτιος."
9. a) Να περιγραφεί ένας τρόπος απόδειξης της δισυποθετικής $p \leftrightarrow q$.

b) Να αποδειχτεί η δήλωση: "Ο ακέραιος $3n + 2$ είναι περιττός αν και μόνο αν ο ακέραιος $9n + 5$ είναι άρτιος, όπου ο n είναι ακέραιος."

10. Μήπως για να αποδείξουμε ότι οι δηλώσεις p_1, p_2, p_3, και p_4 είναι ισοδύναμες αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές $p_4 \to p_2$, $p_3 \to p_1$, και $p_1 \to p_2$; Αν όχι, να δοθεί μια άλλη ομάδα συνεπαγωγών που να χρησιμοποιηθεί για να δειχτεί ότι οι τέσσερεις δηλώσεις είναι ισοδύναμες.

11. a) Υποθέτουμε ότι δήλωση με την μορφή $\forall x P(x)$ είναι ψευδής. Με ποιό τρόπο μπορεί αυτό να αποδειχτεί;

b) Να δειχτεί ότι η δήλωση "Για κάθε θετικό ακέραιο n, η $n^2 > 2n$" είναι ψευδής.

12. Ποιά είναι η διαφορά μεταξύ εποικοδομητικής και μη εποικοδομητικής απόδειξης ύπαρξης; Να δοθεί ένα παράδειγμα και για τις δύο.

13. Ποιά είναι τα στοιχεία απόδειξης ότι υπάρχει μοναδικό στοιχείο x έτσι ώστε να είναι $P(x)$, όπου $P(x)$ είναι προτασιακή συνάρτηση;

14. a) Να οριστεί η ένωση, η τομή, η διαφορά, και η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων.

b) Ποιές είναι η ένωση, η τομή, η διαφορά, και η συμμετρική διαφορά του συνόλου των θετικών ακέραιων και του συνόλου των περιττών ακέραιων;

15. a) Να οριστεί τι σημαίνει να είναι ίσα δύο σύνολα.

b) Να περιγραφούν οι τρόποι για να δειχτεί ότι δύο σύνολα είναι ίσα.

c) Να δειχτεί με τουλάχιστο δύο διαφορετικούς τρόπους ότι τα σύνολα $A-(B\cap C)$ και $(A-B)\cup(A-C)$ είναι ίσα.

16. Να εξηγηθεί η σχέση μεταξύ λογικών ισοδυναμιών και ταυτοτήτων συνόλων.

17. a) Να οριστεί το $|S|$, ο πληθάριθμοι του συνόλου S.

b) Να δοθεί τύπος για το $|A\cup B|$ όπου τα A και B είναι σύνολα.

18. a) Να οριστεί το δυναμοσύνολο συνόλου S.

b) Πότε το κενό σύνολο είναι το δυναμοσύνολο συνόλου S;

c) Πόσα στοιχεία έχει το δυναμοσύνολο συνόλου S με n στοιχεία;

19. a) Να οριστούν το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών, και το πεδίο εύρος συνάρτησης.

b) Εστω ότι $f(n)$ είναι η συνάρτηση από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων έτσι ώστε να είναι $f(n)=n^2+1$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών, και το εύρος τιμών αυτής της συνάρτησης;

20. a) Να οριστεί τι σημαίνει μια συνάρτηση από το σύνολο των θετικών ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων να είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

b) Να οριστεί τι σημαίνει μια συνάρτηση από το σύνολο των θετικών ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων να είναι συνάρτηση επί.

c) Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης από το σύνολο των θετικών ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων, η οποία να είναι και συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί.

d) Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης από το σύνολο των θετικών ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων, η οποία να είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα αλλά όχι συνάρτηση επί.

e) Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης από το σύνολο των θετικών ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων η οποία δεν θα είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα αλλά συνάρτηση επί.

f) Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης από το σύνολο των θετικών ακέραιων προς το σύνολο των θετικών ακέραιων η οποία δεν θα είναι ούτε συνάρτηση ένα-προς-ένα ούτε συνάρτηση επί.

21. a) Να οριστεί η αντίστροφη συνάρτησης.

b) Πότε μια συνάρτηση έχει αντίστροφη;

c) Μήπως η συνάρτηση $f(n) = 10 - n$ από το σύνολο των ακέραιων προς το σύνολο των ακέραιων έχει αντίστροφη; Αν ναι, ποιά είναι αυτή;

22. a) Να οριστούν οι συναρτήσεις δαπέδου και οροφής από το σύνολο των πραγματικών αριθμών προς το σύνολο των ακέραιων.

b) Γιά ποιούς πραγματικούς αριθμούς x ισχύει ότι $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$;

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

1. Εστω ότι η p είναι η πρόταση "Θα λύσω κάθε άσκηση στο βιβλίο αυτό" και ότι η q είναι η πρόταση "Θα πάρω βαθμό 'Α' στο μάθημα αυτό." Να εκφραστούν τα παρακάτω σαν συνδυασμός των p και q.

a) Θα πάρω 'Α' στο μάθημα αυτό μόνο αν λύσω κάθε άσκηση στο βιβλίο αυτό.

b) Θα πάρω 'Α' στο μάθημα αυτό και θα λύσω κάθε άσκηση στο βιβλίο αυτό.

c) Είτε δεν θα πάρω 'Α' στο μάθημα αυτό είτε δεν θα λύσω κάθε άσκηση στο βιβλίο αυτό.

d) Για να πάρω 'Α' στο μάθημα αυτό είναι αναγκαίο και ικανό να λύσω κάθε άσκηση στο βιβλίο αυτό.

2. Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της σύνθετης πρότασης $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg r)$.

3. Να δειχτεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες.

a) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ **b)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

4. Να δοθούν η αντίστροφη, η αντιθετοαντιστροφή, και η αντιθετική των παρακάτω συνεπαγωγών.

a) Αν σήμερα βρέξει, τότε θα πάω στην δουλειά μου με το αυτοκίνητο.

b) Αν $|x| = x$, τότε $x \geq 0$.

c) Αν ο n είναι μεγαλύτερος από 3, τότε ο n^2 είναι μεγαλύτερος από 9.

5. Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r, και s που είναι αληθής όταν μόνο τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

6. Να δειχτεί ότι οι παρακάτω δηλώσεις δεν είναι συνακόλουθες: "Αν ο Sergei δεχτεί την προσφορά εργασίας, τότε με την υπογραφή θα πάρει δώρο." "Αν ο Sergei δεχτεί την προσφορά εργασίας, τότε θα πάρει μεγαλύτερο μισθό." "Αν ο Sergei με την υπογραφή πάρει δώρο, τότε δεν θα πάρει μεγαλύτερο μισθό." "Ο Sergei δέχεται την προσφορά εργασίας."

7. Να δειχτεί ότι οι παρακάτω δηλώσεις δεν είναι συνακόλουθες: "Αν η Miranda δεν πάρει το μάθημα των διακριτών μαθηματικών, τότε δεν θα τελειώσει το σχολείο." "Αν η Miranda δεν τελειώσει το σχολείο, τότε δεν είναι κατάλληλη για την δουλειά." "Αν η Miranda διαβάσει αυτό το βιβλίο, τότε είναι κατάλληλη για την δουλειά." "Η Miranda δεν παίρνει το μάθημα των διακριτών μαθηματικών αλλά δεν διαβάζει αυτό το βιβλίο."

8. Εστω ότι συναντούμε τρεις ανθρώπους, τους A, B, και C, στο νησί με τους αφέντες και τους υπηρέτες που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 15 της Παραγράφου 1.1. Τι είναι οι A, B, και C αν ο A λέει "Είμαι αφέντης και ο B είναι υπηρέτης" και ο B λέει "Μόνο ο ένας από εμάς τους τρεις είναι αφέντης."

9. (Προσαρμογή από το [Sm78]) Εστω ότι σ' ένα νησί υπάρχουν τρία είδη ανθρώπων, αφέντες, υπηρέτες, και κανονικοί. Οι αφέντες λένε πάντοτε την αλήθεια, οι υπηρέτες λένε πάντοτε ψέμματα, και οι κανονικοί πότε λένε την αλήθεια και πότε λένε ψέμματα. Οι αστυνομικοί ανέκριναν τρεις κατοίκους του νησιού –την Amy, την Brenda, και την Claire– σαν τμήμα έρευνας για ένα έγκλημα. Οι αστυνομικοί γνώριζαν ότι μια από τις τρεις έκανε το έγκλημα, αλλά δεν γνώριζαν ποιά από τις τρεις. Γνώριζαν, ακόμη, ότι ο εγκληματίας ήταν αφέντης, ενώ οι άλλοι δύο δεν ήταν αφέντες. Επιπλέον, οι αστυνομικοί κατέγραψαν τις παρακάτω δηλώσεις: Amy: "Είμαι αθώα." Brenda: "Οτι λέει η Amy είναι αλήθεια." Claire: "Η Brenda δεν είναι κανονικός άνθρωπος." Μετά την ανάλυση των πληροφοριών, οι αστυνομικοί αναγνώρισαν θετικά τον ένοχο. Ποιός ήταν;

10. Εστω ότι η $P(x)$ είναι η δήλωση "Ο μαθητής x γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά" και έστω ότι η $Q(y)$ είναι η δήλωση "Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά." Να εκφραστούν οι παρακάτω σαν ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

a) Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν ανώτερα μαθηματικά.
b) Ο κάθε μαθητής δεν γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά.
c) Κάθε τάξη έχει κάποιον μαθητή που γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά.
d) Ολοι οι μαθητές σε όλες τις τάξεις γνωρίζουν ανώτερα μαθηματικά.
e) Υπάρχει τουλάχιστο μιά τάξη με μαθητές που δεν γνωρίζουν ανώτερα μαθηματικά.

11. Εστω ότι η $P(m, n)$ είναι η δήλωση "Ο m διαιρεί τον n," όπου το πεδίο ορισμού και για τις δύο μεταβλητές είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων. Να προσδιοριστούν οι τιμές αληθείας των παρακάτω προτάσεων.

a) $P(4, 5)$ **b)** $P(2, 4)$ **c)** $\forall m \forall n P(m,n)$

d) $\exists m \forall n P(m,n)$ **e)** $\exists n \forall m P(m,n)$ **f)** $\forall n P(1,n)$

12. Να χρησιμοποιηθούν ποσοτικοποιητές για να εκφραστεί η δήλωση "Κανείς δεν έχει περισσότερες από τρεις γιαγιάδες" με χρήση της προτασιακής συνάρτησης $G(x, y)$ που παριστάνει την "Η x είναι η γιαγιά του y."

13. Να χρησιμοποιηθούν ποσοτικοποιητές για να εκφραστεί η δήλωση "Ο καθένας έχει μόνο δύο βιολογικούς γονείς" με χρήση της προτασιακής συνάρτησης $G(x, y)$ που παριστάνει την "Ο x είναι ο βιολογικός γονέας του y."

14. Εστω ότι η $P(x, y)$ είναι προτασιακή συνάρτηση. Να δειχτεί ότι η συνεπαγωγή $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$ είναι ταυτολογία.

15. Εστω ότι η $P(x)$ και η $Q(x)$ είναι προτασιακές συναρτήσεις. Να δειχτεί ότι η $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ και η $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ έχουν πάντοτε την ίδια τιμή αληθείας.

16. Αν η $\forall y \exists x P(x,y)$ είναι αληθής, μήπως απαραίτητα έπεται ότι η $\exists x \forall y P(x,y)$ είναι αληθής;

17. Αν η $\forall x \exists y P(x,y)$ είναι αληθής, μήπως απαραίτητα έπεται ότι η $\exists x \forall y P(x,y)$ είναι αληθής;

18. Να βρεθούν οι αρνήσεις των παρακάτω δηλώσεων.

a) Αν χιονίσει σήμερα, θα κάνω σκι αύριο.

b) Ο καθένας μέσα στην τάξη αυτή καταλαβαίνει την μαθηματική επαγωγή.

c) Σε κάποιους μαθητές στην τάξη αυτή δεν αρέσουν τα διακριτά μαθηματικά.

d) Σε κάθε τάξη μαθηματικών υπάρχει κάποιος μαθητής που κοιμάται στο μάθημα.

19. Να εκφραστεί η παρακάτω δήλωση με ποσοτικοποιητές: "Ολοι οι μαθητές στην τάξη αυτή έχουν πάρει κάποιο μάθημα σε κάποιο τομέα μαθηματικών επιστημών."

20. Να εκφραστεί η παρακάτω δήλωση με ποσοτικοποιητές: "Υπάρχει κάποιο κτίριο στον χώρο κάποιου κολλεγίου των ΗΠΑ όπου κάθε αίθουσα είναι βαμμένη άσπρη."

21. Εστω ότι A είναι το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα x, και έστω B το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα q. Να εκφραστούν τα παρακάτω σύνολα σαν συνδυασμός των A και B.

a) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που δεν περιέχουν το γράμμα x.

b) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν και το γράμμα x και το γράμμα q.

c) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα x αλλά όχι το γράμμα q.

d) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που δεν περιέχουν ούτε το γράμμα x ούτε το γράμμα q.

e) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα x ή το γράμμα q, αλλά όχι και τα δύο γράμματα.

22. Να περιγραφεί ένας κανόνας εξαγωγής συμπερασμάτων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχτεί ότι υπάρχουν μόνο δύο στοιχεία x και y σε πεδίο ορισμού, έτσι ώστε η $P(x)$ και η $P(y)$ να είναι αληθείς. Να εκφραστεί αυτός ο κανόνας εξαγωγής συμπερασμάτων στην καθομιλουμένη.

23. Τι είναι λάθος στο παρακάτω επιχείρημα; Αν δίνεται η προϋπόθεση $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, με απλοποίηση να ληφθεί η $\exists x P(x)$. Να χρησιμοποιηθεί υπαρξιακή αμεσότητα για να ληφθεί η $P(c)$ για κάποιο στοιχείο c. Και πάλι με απλοποίηση να ληφθεί η $\exists x Q(x)$. Να χρησιμοποιηθεί υπαρξιακή αμεσότητα για να ληφθεί η $Q(c)$ για κάποιο στοιχείο c. Να χρησιμοποιηθεί σύζευξη για να βρεθεί το συμπέρασμα ότι $P(c) \wedge Q(c)$. Και τέλος, να χρησιμοποιηθεί υπαρξιακή γενίκευση για να βρεθεί το συμπέρασμα ότι $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

24. Με χρήση κανόνων εξαγωγής συμπερασμάτων να δειχτεί ότι οι προϋποθέσεις $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ και $\neg P(a)$, όπου το a ανήκει στο πεδίο ορισμού, συνεπάγονται το συμπέρασμα $\neg P(a)$.

25. Με χρήση κανόνων εξαγωγής συμπερασμάτων να δειχτεί ότι οι προϋποθέσεις $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, και $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$ συνεπάγονται το συμπέρασμα $\forall x(\neg R(x) \rightarrow P(x))$.

26. Να αποδειχτεί ότι αν ο x^3 είναι άρρητος, τότε ο x είναι άρρητος.

27. Να αποδειχτεί ότι αν ο x είναι άρρητος και $x \geq 0$, τότε ο $\sqrt{x}$ είναι άρρητος.

28. Να αποδειχτεί ότι αν δίνεται μη αρνητικός ακέραιος n, υπάρχει μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος m έτσι ώστε να είναι $m^2 \leq n < (m+1)^2$.

29. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ακέραιος m έτσι ώστε να είναι $m^2 > 10^{1000}$. Η απόδειξη είναι εποικοδομητική ή μη εποικοδομητική;

30. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα των τετραγώνων θετικών ακέραιων με δύο διαφορετικούς τρόπους. (Για επιτάχυνση της εργασίας να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής ή αριθμομηχανή.)

31. Να αποδειχτεί ότι δεν ισχύει η δήλωση ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα των κύβων οκτώ μη αρνητικών ακέραιων.

32. Να αποδειχτεί ότι δεν ισχύει η δήλωση ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δύο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.

33. Να αποδειχτεί ότι δεν ισχύει η δήλωση ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα 36 πέμπτων δυνάμεων μη αρνητικών ακέραιων.

34. Να δειχτεί ότι αν το A είναι υποσύνολο του B, τότε το δυναμοσύνολο του A είναι υποσύνολο του δυναμοσύνολου του B.

35. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα, έτσι ώστε το δυναμοσύνολο του A να είναι υποσύνολο του δυναμοσύνολου του B. Μήπως έπεται ότι το A είναι υποσύνολο του B;

36. Εστω ότι το **E** συμβολίζει το σύνολο των άρτιων ακέραιων και το **O** συμβολίζει το σύνολο των περιττών ακέραιων. Οπως συνήθως, έστω ότι το **Z** συμβολίζει το σύνολο όλων των ακέραιων. Να καθοριστούν τα παρακάτω σύνολα.

a) $\mathbf{E} \cup \mathbf{O}$ **b)** $\mathbf{E} \cap \mathbf{O}$ **c)** $\mathbf{Z} - \mathbf{E}$ **d)** $\mathbf{Z} - \mathbf{O}$

37. Να δειχτεί ότι αν το A είναι σύνολο και το U είναι το γενικό σύνολο, τότε

a) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ **b)** $A \cup \overline{A} = U$

38. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε

a) $A = A \cap (A \cup B)$ **b)** $A = A \cup (A \cap B)$

39. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε $A - (A - B) = A \cap B$.

40. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $A \cap B = A$.

41. Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι το $(A-B)-C$ δεν είναι απαραίτητα ίσο με $A-(B-C)$.

42. Εστω ότι τα A, B, και C είναι σύνολα. Να δειχτεί αν ισχύει ή όχι ότι $(A-B)-C=(A-C)-B$.

43. Εστω ότι τα A, B, C, και D είναι σύνολα. Να δειχτεί αν ισχύει ή όχι ότι $(A-B)-(C-D)=(A-C)-(B-D)$.

44. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε $|A \cap B| \le |A \cup B|$. Να καθοριστεί πότε αυτή η σχέση είναι ισότητα.

45. Εστω ότι τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα σε πεπερασμένο γενικό σύνολο U. Να καταγραφούν τα παρακάτω με σειρά αύξοντος μεγέθους.

a) $|A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|U|$, $|\emptyset|$ **b)** $|A - B|$, $|A \oplus B|$, $|A| + |B|$, $|A \cup B|$, $|\emptyset|$

46. Εστω ότι τα A και B είναι υποσύνολα του πεπερασμένου γενικού συνόλου U. Να δειχτεί ότι $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$.

47. Εστω ότι οι f και g είναι συναρτήσεις από το $\{1, 2, 3, 4\}$ προς το $\{a, b, c, d\}$ και από το $\{a, b, c, d\}$ προς το $\{1, 2, 3, 4\}$, αντίστοιχα, έτσι ώστε είναι $f(1) = d$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = b$, και $g(a) = 2$, $g(b) = 1$, $g(c) = 3$, $g(d) = 2$.

a) Μήπως η f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα; Μήπως η g είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα;

b) Μήπως η f είναι συνάρτηση επί; Μήπως η g είναι συνάρτηση επί;

c) Μήπως η f ή η g έχουν αντίστροφη; Αν ναι, να βρεθεί αυτή η αντίστροφη.

48. Εστω ότι η f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα από το σύνολο A προς το σύνολο B. Εστω ότι τα S και T είναι υποσύνολα του A. Να δειχτεί ότι $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$.

49. Να δοθεί ένα παράδειγμα για να δειχτεί ότι η ισότητα στην Ασκηση 48 ίσως δεν ισχύει αν η f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

50. Να δειχτεί ότι αν ο n είναι ακέραιος, τότε $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$.

51. Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$;

52. Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$;

Εργασίες με Υπολογιστή
ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΘΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΕΙΣΟΔΟ ΚΑΙ ΕΞΟΔΟ

1. Αν δίνονται οι τιμές αληθείας των προτάσεων p και q, να βρεθούν οι τιμές αληθείας της σύζευξης, της διάζευξης, του αποκλειστικού ή, της συνεπαγωγής, και της δισυποθετικής αυτών των προτάσεων.

2. Αν δίνονται δύο συμβολοσειρές bit με μήκος n, να βρεθεί το *AND* σε bit, το *OR* σε bit, και το *XOR* σε bit αυτών των συμβολοσειρών.

3. Αν δίνονται οι τιμές αληθείας των προτάσεων p και q σε θολή λογική, να βρεθούν οι τιμές αληθείας της σύζευξης και της διάζευξης των p και q (βλ. Ασκήσεις 35-37 της Παραγράφου 1.1).

4. Αν δίνονται τα υποσύνολα A και B συνόλου με n στοιχεία, να χρησιμοποιηθούν συμβολοσειρές bit για να βρεθούν τα $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, και $A \oplus B$.

5. Αν δίνονται τα πολυσύνολα A και B από το ίδιο γενικό σύνολο, να βρεθούν τα $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, και $A + B$ (βλ. εισαγωγή στην Ασκηση 49 της Παραγράφου 1.7).

6. Αν δίνονται τα θολά σύνολα A και B, να βρεθούν τα $\overline{A}$, $A \cup B$, και $A \cap B$ (βλ. εισαγωγή στην Ασκηση 51 της Παραγράφου 1.7).

7. Αν δίνεται η συνάρτηση f από το $\{1, 2, \ldots, n\}$ προς το σύνολο των ακέραιων, να προσδιοριστεί αν η f είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

8. Αν δίνεται η συνάρτηση f από το $\{1, 2, \ldots, n\}$ προς τον εαυτό της, να προσδιοριστεί αν η f είναι συνάρτηση επί.

9. Αν δίνεται η συνάρτηση f αντιστοιχίας ένα-προς-ένα από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ προς τον εαυτό της, να βρεθεί η f^{-1}.

Υπολογισμοί και Εξερευνήσεις
ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Ή ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΜΕ ΓΡΑΨΕΙ ΓΙΑ ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αναζήτηση θετικών ακέραιων που δεν είναι το σύνολο των κύβων εννέα διαφορετικών θετικών ακέραιων.

2. Αναζήτηση θετικών ακέραιων μεγαλύτερων από 79 που δεν είναι το άθροισμα των τέταρτων δυνάμεων 18 θετικών ακέραιων.

3. Εύρεση όσων περισσότερων θετικών ακέραιων γίνεται, που να μπορούν να γραφούν σαν το άθροισμα των κύβων θετικών ακέραιων με δύο διαφορετικούς τρόπους, έχοντας αυτήν την ίδια ιδιότητα με τον 1729.

4. Υπολογισμός του πλήθους των συναρτήσεων ένα-προς-ένα, από σύνολο S προς σύνολο T, όπου τα S και T είναι πεπερασμένα σύνολα διαφόρων μεγεθών. Μήπως μπορεί να καθοριστεί τύπος για το πλήθος αυτών των συναρτήσεων; (Στο Κεφάλαιο 4 υπάρχει ένας τέτοιος τύπος.)

5. Υπολογισμός του πλήθους των συναρτήσεων επί, από σύνολο S προς σύνολο T, όπου τα S και T είναι πεπερασμένα σύνολα διαφόρων μεγεθών. Μήπως μπορεί να καθοριστεί τύπος για το πλήθος αυτών των συναρτήσεων; (Στο Κεφάλαιο 6 υπάρχει ένας τέτοιος τύπος.)

Γραπτές Εργασίες
ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΔΟΚΙΜΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ

1. Να εξεταστούν λογικά παράδοξα, όπως το παράδοξο του Επιμενίδη από την Κρήτη, του παραδόξου της κάρτας του Jourdain, και του παραδόξου του κουρέα, και ο τρόπος με τον οποίο λύνονται.

2. Να περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η θολή λογική σε πρακτικές εφαρμογές. Να μελετηθούν ένα ή περισσότερα από τα πρόσφατα βιβλία για θολή λογική που έχουν γραφεί για ανάγνωση από το πλατύ κοινό.

3. Να περιγραφούν οι βασικοί κανόνες του βιβλίου *WFF'N PROOF, The Game of Modern Logic*, του Layman Allen. Να δοθούν παραδείγματα των παιχνιδιών που υπάρχουν στο *WFF'N PROOF*.

4. Να διαβαστούν κάποια από τα έργα του Lewis Carroll για την συμβολική λογική. Να περιγραφούν με λεπτομέρειες κάποια από τα πρότυπα που χρησιμοποίησε για να παραστήσει λογικά επιχειρήματα και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων που χρησιμοποίησε στα επιχειρήματα αυτά.

5. Να επεκταθεί η εξέταση της Prolog που δόθηκε στην Παράγραφο 1.3, με εξήγηση σε μεγαλύτερο βάθος του τρόπου με τον οποίο η Prolog χρησιμοποιεί ανάλυση.

6. Να εξεταστούν κάποιες από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική λογική, όπως ο κανόνας του Skolem.

7. Η "Αυτοματοποιημένη Απόδειξη Θεωρημάτων" είναι η χρήση υπολογιστών για να αποδεικνύονται θεωρήματα με μηχανικό τρόπο. Να εξεταστούν οι σκοποί και οι εφαρμογές της αυτοματοποιημένης απόδειξης θεωρημάτων και η πρόοδος που έχει γίνει στην ανάπτυξη προγραμμάτων αυτοματοποιημένης απόδειξης θεωρημάτων.

8. Να εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να αναπτυχθεί μια αξιωματική θεωρία συνόλων που θα αποφεύγει το παράδοξο του Russell. (Βλ. Ασκηση 30 της Παραγράφου 1.6.).

9. Να ερευνηθεί που εμφανίστηκε για πρώτη φορά η έννοια της συνάρτησης, και να περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά αυτή η έννοια.

10. Να περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο έχουν χρησιμοποιηθεί υπολογισμοί του DNA για λύση στιγμιοτύπων του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας.