Διακριτά Μαθηματικά

Απαρίθμηση: Εισαγωγικά στοιχεία - Αρχή του Περιστεριώνα

Συνδυαστική ανάλυση

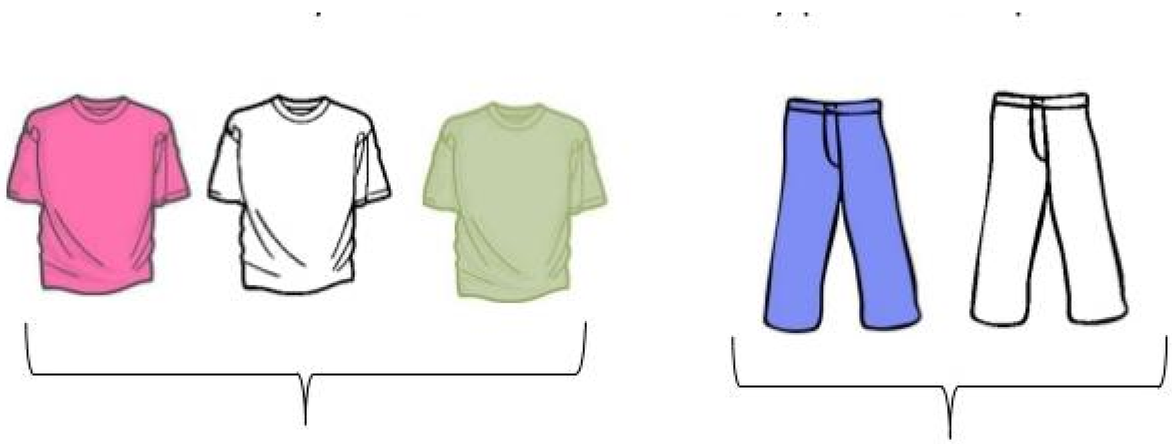
- \- μελέτη της διάταξης αντικειμένων
  - 17^{ος} αιώνας: συνδυαστικά ερωτήματα για τη μελέτη τυχερών παιχνιδιών
- Απαρίθμηση: μέτρηση αντικειμένων με ορισμένες ιδιότητες
  - Για τη λύση πολλών διαφορετικών ειδών προβλημάτων πρέπει να μετράμε αντικείμενα
    - Καθορισμός πολυπλοκότητας αλγορίθμων
    - Προσδιορισμός του αν υπάρχουν αρκετοί τηλεφωνικοί αριθμοί ή διευθύνσεις Internet για την ικανοποίηση της ζήτησης
    - Υπολογισμός πιθανοτήτων γεγονότων
    - Εκτίμηση των διαφορετικών passwords σε σύστημα υπολογιστών
    - Διαφορετικές κατατάξεις τερματισμού δρομέων σε αγώνα δρόμου

Βασικές τεχνικές απαρίθμησης

- Ο κανόνας γινομένου
  - Έστω ότι μία διαδικασία μπορεί να διασπαστεί σε ακολουθία δύο εργασιών. Αν υπάρχουν n_1 τρόποι να γίνει η πρώτη εργασία και n_2 τρόποι να γίνει η δεύτερη εργασία μετά την εκτέλεση της πρώτης εργασίας, τότε υπάρχουν $n_1 n_2$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας
- Ο κανόνας αθροίσματος
  - Αν μια εργασία μπορεί να εκτελεστεί με n_1 τρόπους και μια δεύτερη εργασία με n_2 τρόπους και αν αυτές οι εργασίες δεν μπορούν να εκτελεστούν ταυτόχρονα, τότε υπάρχουν n_1+n_2 τρόποι εκτέλεσης μιας από τις εργασίες αυτές

Κανόνας γινομένου

- Διαδικασία: επιλογή ντυσίματος
  - Εργασία Α: επιλογή μπλούζας
  - Εργασία Β: επιλογή παντελονιού
  - Ταυτόχρονη εκτέλεση των Α και Β



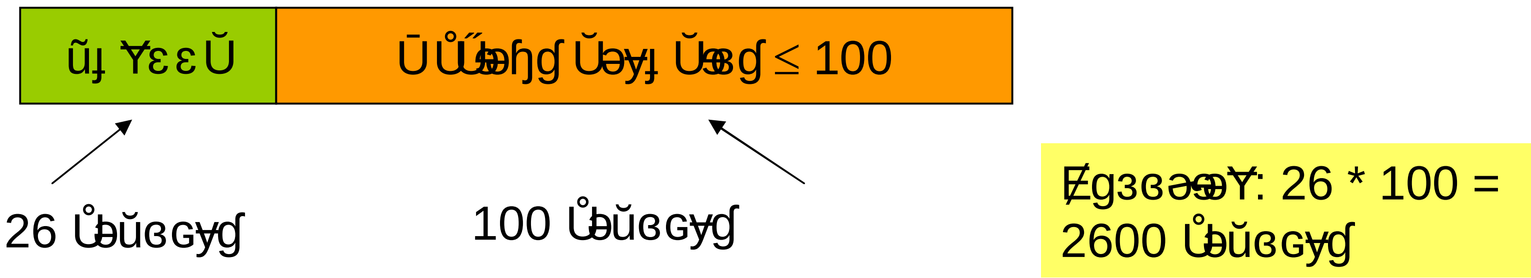
3 Ů ϶ϵɜɔɏɠ

2 Ů ϶ϵɜɔɏɠ

Ɇɡɜɞϵ϶Ύ: 3 x 2 = 6 Ů ϶ϵɜɔɏɠ ɜŰɡůɑŬŰɛɡ

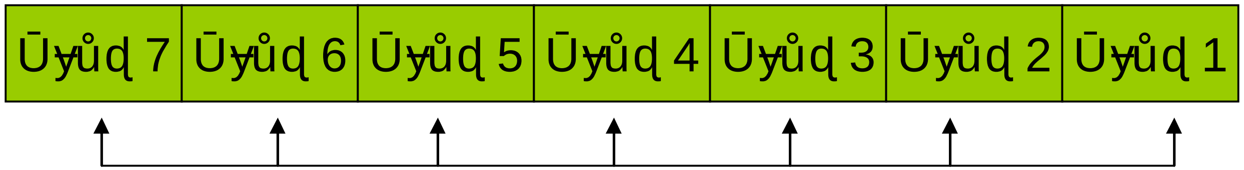
Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 1

- Τα καθίσματα σε ένα αμφιθέατρο πρόκειται να ονομαστούν με ένα γράμμα του λατινικού αλφαβήτου που θα ακολουθείται από ένα μη μηδενικό θετικό ακέραιο όχι μεγαλύτερο από το 100. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πλήθος καθισμάτων που μπορούν να ονομαστούν με διαφορετικό τρόπο;



Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 2

- Πόσες διαφορετικές ακολουθίες bit με μήκος 7;

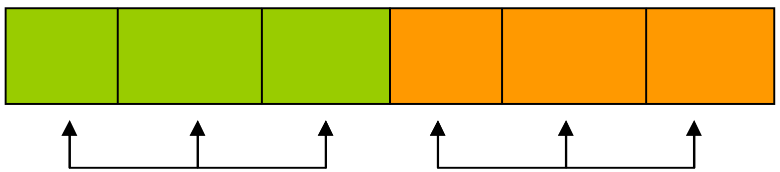


2 Ůɘŭʙɢɏɠ

Ɇgɜʙəɵ Ɏ: 2*2*2*2*2*2*2 = 2^7 = 128 Ůɘŭʙɢɏɠ

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 3

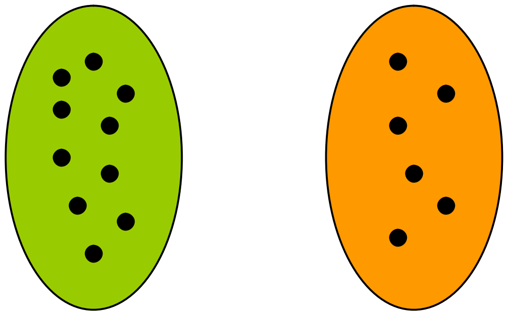
- Πόσες διαφορετικές πινακίδες αυτοκινήτων υπάρχουν αν κάθε πινακίδα περιέχει 3 (λατινικά) γράμματα ακολουθούμενα από 3 ψηφία (και δεν υπάρχουν απαγορευμένες ακολουθίες γραμμάτων);



ḞgзвəөƳ: $26*26*26*10*10*10 = 26^3*10^3 =$ 17.576.000 Ůəŭɞɢɏɠ

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 4

- Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από σύνολο με m στοιχεία σε σύνολο με n στοιχεία;

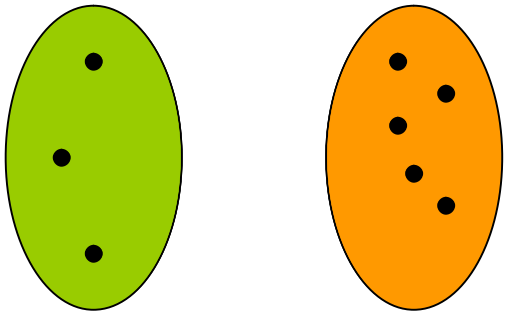


$n*n*\ldots*n$ (m) = n^m

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 4*

- Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από σύνολο με 3 στοιχεία σε σύνολο με 5 στοιχεία;

[illegible] 3 [illegible]



[illegible] 5 [illegible]

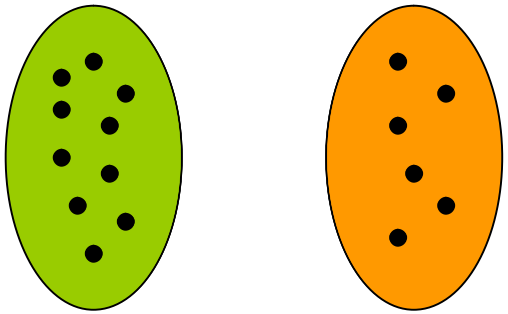
[illegible] 1 [illegible]
[illegible] 3 [illegible] 5 [illegible]

[illegible]: $5*5*5 = 5^3 = 125$ [illegible]

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 5

- Πόσες συναρτήσεις ένα-προς-ένα υπάρχουν από σύνολο με m στοιχεία σε σύνολο με n στοιχεία;

[illegible] m [illegible]



[illegible] n [illegible]

[illegible] 1 [illegible]

[illegible] > [illegible]

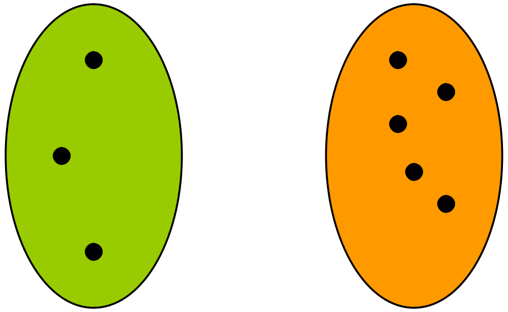
[illegible] m [illegible] n [illegible]
[illegible] m [illegible] n-1 [illegible] m-[illegible] n-m+1 [illegible]

[illegible]: n*(n-1)*(n-2)... *(n-m+1) [illegible]

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 5*

- Πόσες συναρτήσεις ένα-προς-ένα υπάρχουν από σύνολο με 3 στοιχεία σε σύνολο με 5 στοιχεία;

ӨŮŬœ ɞɟ ѽůɛɞɨ
ɛŮ3 ůŰɞѣɛŮŬ



ɆɨɜəɞŰɛɩ 3
ɛŮ5 ůŰɞѣɛŮŬ

ɆgɜƳɟ ŰɖůɖɏɜŬ-´ɟ ɞɠ-ɏɜŬ: ɆŮəƳɖŮɏɜŬ Ŭ´ ђ ŰŬ ůŰɞѣɛŮŬ Űɞg «´ɟ Ƴůѳɞg» ůgɜђəɞg, ´ɟɏ´ Ůɛɜ Ŭ
ŬɜŰѿůŰɞɛɖɖŮŬ1 ɛɞɜŬŬѫђ ůŰɞѣɛŮɞ Űɞg «´ɞɟ ŰɛəŬəɞ» ůgɜђəɞg

TŬ ůŰɞѣɛŮŬ Űɞg «´ɟ Ƴůѳɞg» ůgɜђəɞg < ůŰɞѣɛŮŬ Űɞg «´ɞɟ ŰɛəŬəɞ» ůgɜђəɞg ⇒ ɛ´ɞɟ Űɑ
ɜŬ ɞɟ ѽůŰŰɑůgɜƳɟ ŰɖůɖɏɜŬ-´ɟ ɞɠ-ɏɜŬ Ŭ´ ђ Űɛ «´ɟ Ƴůѳɞ» ůŰɛ «´ɞɟ ŰɛəŬəɞ» ůɨ ɜɞəɛ

ũѣŬ Űɛ ´ɟɩ Űɛ Ŭ´ ђ ŰŬ 3 ůŰɛѣɛŮŬ g´ Ƴɟ ɢɞgɜ 5 Ůѣŭɞɢɏɠ, ɔѣŬ Űɛ ŭŮɨ ŰŲɟ ɞ Ŭ´ ђ
ŰŬ 3 ůŰɛѣɛŮŬ g´ Ƴɟ ɢɞgɜ 4 Ůѣŭɞɢɏɠ, ɔѣŬ Űɛ Ųɟ ɑŰɛ Ŭ´ ђ ŰŬ 3 ůŰɛѣɛŮŬ g´ Ƴɟ ɢɞgɜ 3 Ůѣŭɞɢɏɠ

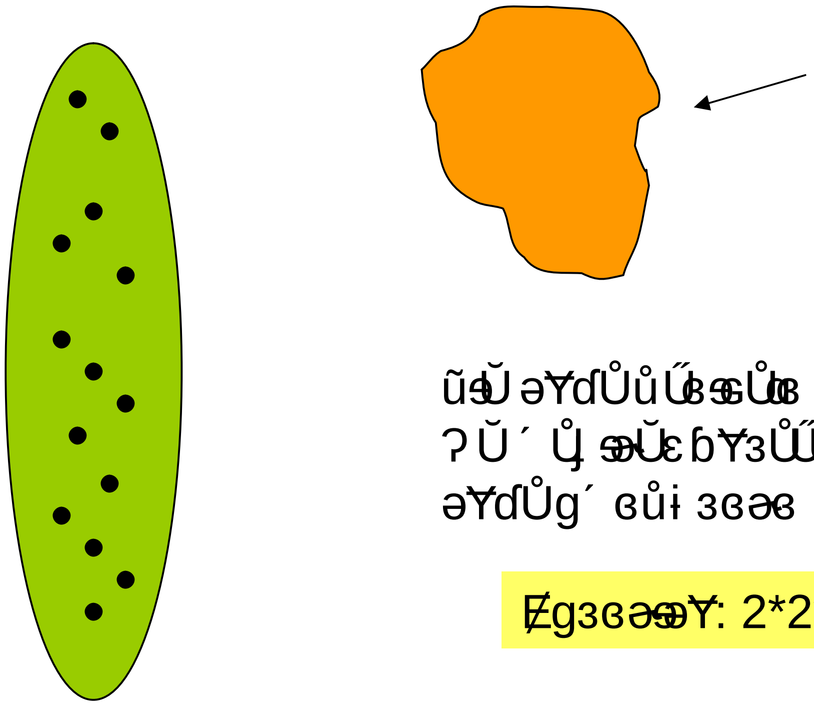
ɆgɜɞəѫƳ: 5*4*3 = 60 ŮѣŭɞɢɏɠS

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 6

- Υποθέστε ότι η μορφή των τηλεφωνικών αριθμών καθορίζεται από ένα σχέδιο αριθμοδότησης. Ο τηλεφωνικός αριθμός αποτελείται από 10 ψηφία που χωρίζονται σε:
  - Κωδικό Περιοχής με 3 ψηφία
  - Κωδικό Κομβικού Τηλεφωνικού Κέντρου με 3 ψηφία
  - Αριθμό Τερματικού Τηλεφωνικού Κέντρου με 4 ψηφία
- Επιπλέον, υπάρχουν οι εξής περιορισμοί:
  - X: συμβολίζει ψηφίο που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις τιμές 0 έως 9
  - N: συμβολίζει ψηφίο που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις τιμές 2 έως 9
  - Y: συμβολίζει ψηφίο που μπορεί να είναι 0 ή 1
- Εξετάζουμε 2 σχέδια αριθμοδότησης
  - Σχέδιο 1: Οι τηλεφωνικοί αριθμοί έχουν τη μορφή NYX-NNX-XXXX
  - Σχέδιο 2: Οι τηλεφωνικοί αριθμοί έχουν τη μορφή NXX-NXX-XXXX
- Πόσοι τηλεφωνικοί αριθμοί είναι δυνατοί με κάθε σχέδιο;
  - Σχέδιο 1: NYX-NNX-XXXX : 8*2*10*8*8*10*10*10*10*10 = 160*640*10.000 = 1.024.000.000
  - Σχέδιο 2: NXX-NXX-XXXX : 8*10*10*8*10*10*10*10*10*10 = 800*800*10.000 = 6.400.000.000

Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 7

- Με χρήση του κανόνα γινομένου, δείξτε ότι το πλήθος διαφορετικών υποσυνόλων πεπερασμένου συνόλου S είναι $2^{|S|}$



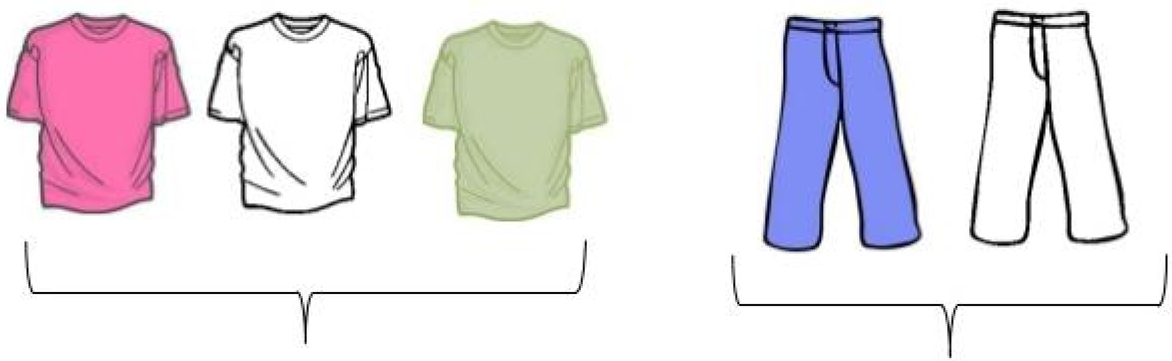
Κανόνας γινομένου: παράδειγμα 8

- Υπάρχουν n γλυκά σε μια σακούλα, έξι από τα γλυκά είναι πορτοκαλί και τα υπόλοιπα είναι κίτρινα. Η Χάνα πήρε ένα γλυκό από τη σακούλα και το έφαγε, μετά πήρε ένα ακόμα γλυκό. Η πιθανότητα η Χάνα να έφαγε δυο πορτοκαλί γλυκά είναι 1/3. Αποδείξτε το $n^2-n-90=0$.

- $1/3 = 6/n * 5/(n-1) \Leftrightarrow 1/3 = 30 / n(n-1) \Leftrightarrow n(n-1)/3 = 30 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$

Κανόνας αθροίσματος

- Εργασία 1: επιλογή μπλούζας
- Εργασία 2: επιλογή παντελονιού
- Ακολουθιακή εκτέλεση των Εργασιών 1 και 2



3 Ů ѭϐɔѰʛ

2 Ů ѭϐɔѰʛ

Ɇǥзϐǝѭϓ: 3 + 2 = 5 Ů ѭϐɔѰʛ ˌ ϐɨ ϭϐǥ

Κανόνας αθροίσματος: παράδειγμα 1

- Υποθέστε ότι επιλέγεται είτε ένα μέλος ΔΕΠ είτε ένας τελειόφοιτος φοιτητής ενός Τμήματος για να εκπροσωπηθεί το Τμήμα σε Επιτροπή. Πόσες επιλογές υπάρχουν για τον εκπρόσωπο αυτόν όταν υπάρχουν 37 μέλη ΔΕΠ και 83 τελειόφοιτοι φοιτητές στο Τμήμα;

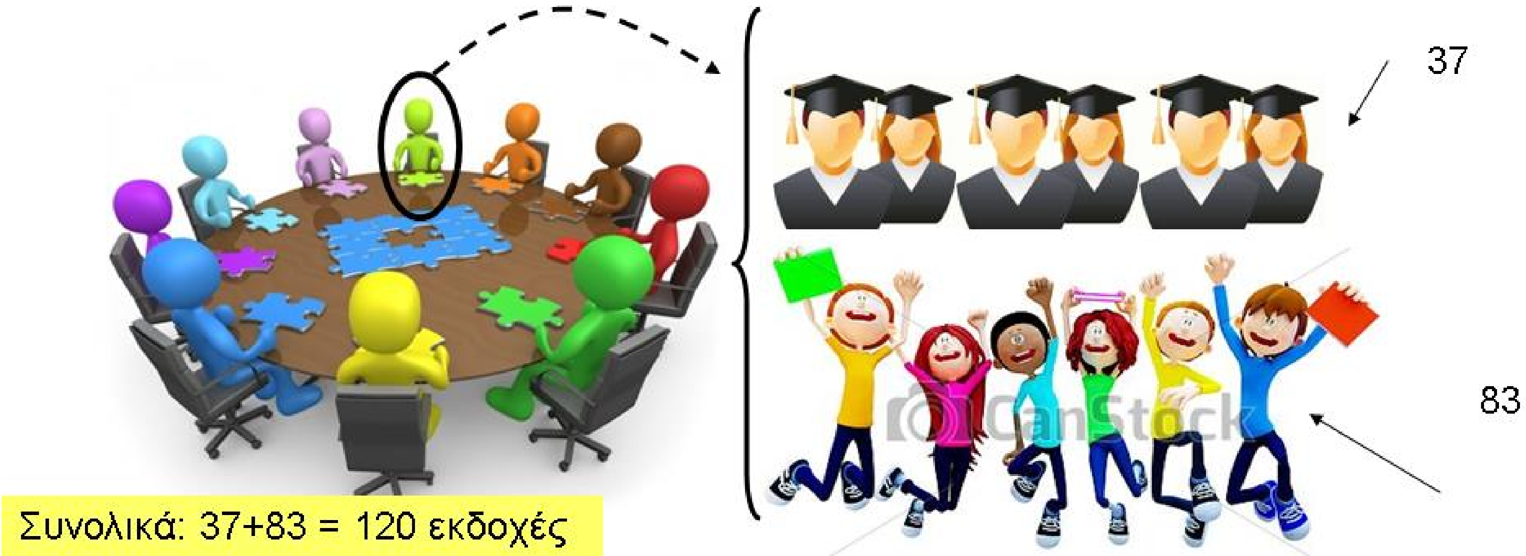


Image source: http://tagmagnet.org, http://lyk-k-nevrok.dra.sch.gr, http://www.fotosearch.com

Κανόνας αθροίσματος: παράδειγμα 2

- Υποθέστε ότι πρέπει να επιλέξετε ένα project από ένας από 3 διαθέσιμους καταλόγους, A, B και Γ, καθένας από τους οποίους περιέχει 23, 15 και 19 εργασίες, αντίστοιχα. Από πόσες εργασίες μπορείτε να επιλέξετε συνολικά;

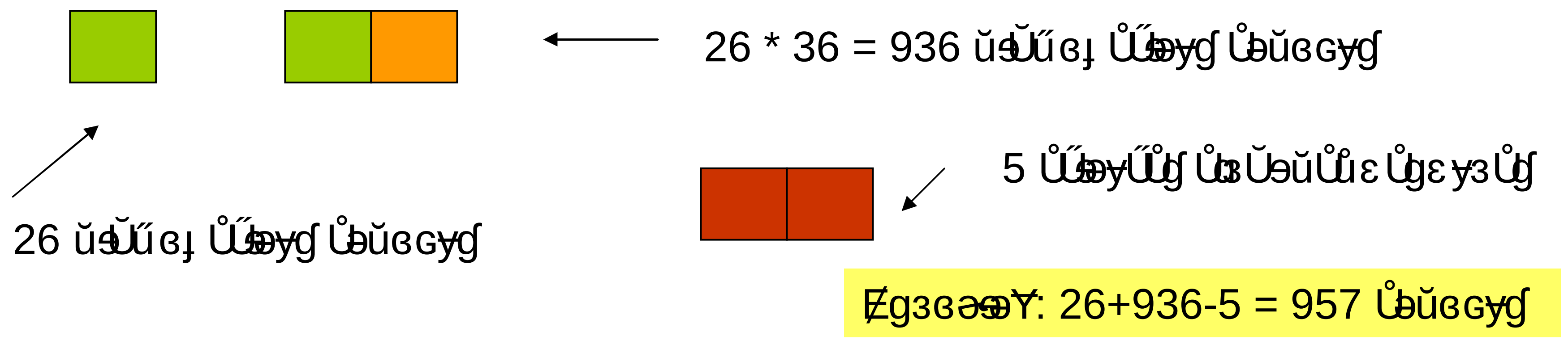
23 Ụ ɔŬůdứʃ   15 Ụ ɔŬůdứʃ   19 Ụ ɔŬůdứʃ

Ɇgзвǝǝ϶Ÿ: 23+15+19 = 57 Ůǝŭвɢǂɠ

Image source: http://blog.redshiftminds.com, http://www.iconshut.com

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 1

- Σε μία βιβλιοθήκη, οι διαθέσιμες αίθουσες λαμβάνουν ετικέτες που είναι συμβολοσειρές με έναν ή δύο αλφαριθμητικούς χαρακτήρες
  - Αλφαριθμητικοί χαρακτήρες: τα 26 γράμματα του λατινικού αλφαβήτου (κεφαλαία και μικρά θεωρούνται ίδια) και τα 10 ψηφία
- Κάθε συμβολοσειρά ετικέτας πρέπει να ξεκινάει με γράμμα
- Κάθε συμβολοσειρά ετικέτας για τις αίθουσες πρέπει να είναι διαφορετική από 5 συγκεκριμένες ετικέτες των 2 χαρακτήρων που έχουν αποδοθεί σε γραφεία διοίκησης
- Πόσες διαφορετικές ετικέτες υπάρχουν διαθέσιμες;



Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 2

- Κάθε χρήστης ενός υπολογιστικού συστήματος έχει ένα password
  - με μήκος από 6 έως 8 χαρακτήρες
  - όπου κάθε χαρακτήρας είναι κεφαλαίο γράμμα του λατινικού αλφαβήτου ή ψηφίο
  - και πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 ψηφίο
- Πόσα δυνατά passwords υπάρχουν;

[illegible] 1 [illegible] $\Rightarrow$ [illegible]

passwords [illegible] 6 [illegible]: $36*36*36*36*36*36=36^6$

passwords [illegible] 6 [illegible]: $26*26*26*26*26*26=26^6$

passwords [illegible] 6 [illegible] 1 [illegible]: $36^6 - 26^6$

[illegible]: passwords [illegible] 7 [illegible] 1 [illegible]: $36^7 - 26^7$

passwords [illegible] 8 [illegible] 1 [illegible]: $36^8 - 26^8$

+

[illegible]: $36^6+36^7+36^8-26^6-26^7-26^8$ = 2.684.483.063.360 [illegible]

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 3

- Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ του 100 και του 199 οι οποίοι έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσοι από αυτούς τους ακεραίους είναι περιττοί;
- Οι ζητούμενοι αριθμοί αποτελούνται από 3 θέσεις στις οποίες το πρώτο ψηφίο είναι 1 και τα άλλα 2 προκύπτουν από τις διατάξεις 2 ψηφίων από τα 9 διαθέσιμα (δεν συμπεριλαμβάνουμε το ψηφίο 1 που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί): $P(9,2)=9*8=72$
- Οι περιττοί αριθμοί θα καταλήγουν σε 3,5,7,9 (αφού έχουν διαφορετικά ψηφία και το 1 αποκλείεται) $\Rightarrow$ Για κάθε μία από αυτές τις επιλογές υπάρχουν 8 επιλογές για το μεσαίο ψηφίο $\Rightarrow$ Επομένως, συνολικά υπάρχουν $4*8=32$ περιττοί ακέραιοι με διαφορετικά ψηφία μεταξύ 100 και 199

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 4

- Πόσους περιττούς ακέραιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5 οι οποίοι έχουν 4 ψηφία και τα ψηφία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους;
- Οι ζητούμενοι 4-ψήφιοι ακέραιοι πρέπει να έχουν 1 ή 3 ή 5 στη δεξιότερη θέση
  - 4-ψήφιοι με 1 στη δεξιότερη θέση: 4*3*2=24
  - 4-ψήφιοι με 3 στη δεξιότερη θέση: 4*3*2=24
  - 4-ψήφιοι με 5 στη δεξιότερη θέση: 4*3*2=24
  - Επομένως, συνολικά 3*24=72 αριθμοί

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 5

- Πόσοι πενταψήφιοι ακέραιοι υπάρχουν οι οποίοι να είναι μεγαλύτεροι του 53000 και να έχουν ταυτόχρονα τις εξής ιδιότητες: (α) τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά και (β) να μην περιέχουν να ψηφία 0 και 9;
- Αριθμοί που ξεκινάμε από 53 και ακολουθούν 3 ψηφία που δεν μπορούν να είναι 0 και 9, ούτε 5 και 3 και πρέπει να είναι και διαφορετικά μεταξύ τους: 6*5*4=120
- Αριθμοί που ξεκινάνε από 5 και ακολουθούν 4 ψηφία που δεν μπορούν να είναι 0 και 9, ούτε 5, πρέπει να είναι και διαφορετικά μεταξύ τους και τα ψηφία της αριστερότερης θέσης πρέπει να είναι μεγαλύτερα του 3: 4*6*5*4=480
- 5-ψήφιοι αριθμοί που στην αριστερότερη θέση έχουν ψηφίο μεγαλύτερο του 5 και όχι 0 ή 9, στην επόμενη θέση όχι ό,τι στην προηγούμενη ούτε 0 ή 9, στην επόμενη θέση όχι ό,τι στις στις δύο προηγούμενες ούτε 0 ή 9, κ.ο.κ.: 3*7*6*5*4=2520
- Επομένως, συνολικά 120+480+2520=3120 αριθμοί

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 6

- Τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ χρησιμοποιούνται για να σχηματιστούν λέξεις μήκους 3. (α) Πόσες λέξεις περιέχουν το γράμμα Α επιτρεπομένων επαναλήψεων; (β) Πόσες λέξεις αρχίζουν με Α επιτρεπομένων επαναλήψεων;
- (α) Όλες οι πιθανές λέξεις με 3 γράμματα από τα Α,Β,Γ,Δ είναι 4^3. Αυτές που δεν περιέχουν κανένα Α είναι 3^3. Επομένως, οι ζητούμενες προκύπτουν από τη διαφορά τους: $4^3-3^3=64-27=37$ λέξεις
- (β) Το αριστερότερο γράμμα είναι Α. Οπότε ζητάμε λέξεις 2 γραμμάτων που σχηματίζονται από τα 4 δοσμένα γράμματα: $4^2=16$ λέξεις

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 7

- Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί του δεκαδικού συστήματος δεν έχουν δύο ψηφία ίδια;
- Για να είναι τετραψήφιος κάποιος αριθμός δεν πρέπει να έχει 0 στην αριστερότερη θέση, στην οποία μπορεί να βρίσκεται ένα από τα εναπομείναντα 9 ψηφία (1,…,9)
- Άρα, το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι: 9*9*8*7=4.536

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 8

- Πόσες είναι οι λέξεις της μορφής ww^R μήκους 10 με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χωρίς τόνους;
- Τα πέντε πρώτα γράμματα (w) καθορίζουν και τα πέντε επόμενα (w^R: w reversed)
- Επομένως, ασχολούμαστε μόνο με τα πέντε πρώτα γράμματα και υπολογίζουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να συνθέσω πεντάδες
- Η επιλογή του κάθε γράμματος είναι ανεξάρτητη και καθένα μπορεί να πάρει 24 διαφορετικές τιμές. Άρα, συνολικά μπορούμε να φτιάξουμε $24*24*24*24*24=24^5$ διαφορετικές λέξεις των πέντε γραμμάτων (κανόνας γινομένου)
- Τόσες είναι και οι ζητούμενες λέξεις αφού τα πέντε πρώτα γράμματα καθορίζουν και τα πέντε επόμενα

Συνδυασμός κανόνων γινομένου και αθροίσματος: παράδειγμα 9

- Έχουμε 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες και 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε μία πράσινη και μία κόκκινη μπάλα;
- Πράσινη μπάλα μπορούμε να διαλέξουμε με 24 τρόπους
- Κόκκινη μπάλα μπορούμε να διαλέξουμε με 24 τρόπους
- Για να συμβαίνουν και τα δύο μαζί υπάρχουν 24*24=576 διαφορετικοί τρόποι (κανόνας γινομένου)

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

- Όταν δύο εργασίες μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα, ΔΕΝ μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον κανόνα αθροίσματος για να απαριθμούμε τους τρόπους εκτέλεσης μιας από τις 2 εργασίες
  – Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 8 είτε αρχίζουν από 1 είτε τελειώνουν σε 00;
  – Ενδιαφέρομαι για 8-bit συμβολοσειρές
    - που αρχίζουν με 1: 2^7
    - που τελειώνουν σε 00: 2^6
    - που αρχίζουν με 1 και τελειώνουν σε 00: 2^5
      – ΠΡΟΣΕΧΩ ΝΑ ΜΗ ΔΙΠΛΟΜΕΤΡΑΩ… Αυτές τις έχω μετρήσει 2 φορές – από μία σε καθεμία από τις προηγούμενες κατηγορίες $\Rightarrow$ πρέπει να απομακρύνω τη μία φορά
    - Συνολικά, οι ζητούμενες συμβολοσειρές είναι: $2^7+2^6-2^5=128+64-32=160$

Ασκήσεις (Ι)

1. Σε ένα κολλέγιο υπάρχουν 18 τελειόφοιτοι μαθηματικών και 325 τελειόφοιτοι επιστήμης υπολογιστών.
   a) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να εκλεγούν δύο εκπρόσωποι, έτσι ώστε ο ένας να είναι τελειόφοιτος μαθηματικών και ο άλλος τελειόφοιτος επιστήμης υπολογιστών; 18*325=5850
   b) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να εκλεγεί ένας εκπρόσωπος που να είναι είτε τελειόφοιτος μαθηματικών είτε τελειόφοιτος επιστήμης υπολογιστών;

18+325=343

3. Ενα διαγώνισμα πολλαπλών επιλογών περιέχει δέκα ερωτήσεις. Σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τέσσερεις δυνατές απαντήσεις.
   a) Με πόσους τρόπους μπορεί ένας σπουδαστής να απαντήσει στις ερωτήσεις του διαγωνίσματος αν δίνεται απάντηση σε κάθε ερώτηση; 4^{10}
   b) Με πόσους τρόπους μπορεί ένας σπουδαστής να απαντήσει στις ερωτήσεις του διαγωνίσματος αν μπορεί να αφήνει κενές απαντήσεις; 5^{10}

Ασκήσεις (ΙΙ)

5. Υπάρχουν ɏɜɘ διαφορετικές εταιρείες που πετούν από την Νέα Υόρκη προς το Denver και επτά που πετούν από το Denver προς το San Fransisco. Πόσες διαφορετικές δυνατότητες υπάρχουν για ένα ταξίδι από την Νέα Υόρκη προς το San Fransisco μέσω Denver, όταν επιλεγεί μια εταιρεία για την πτήση προς το Denver και μια εταιρεία για την πτήση προς το San Fransisco; 6*7=42

11. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος δέκα αρχίζουν και τελειώνουν με 1; 2^8

15. Πόσες συμβολοσειρές με πεζά γράμματα και με μήκος τέσσερα ή μικρότερο υπάρχουν; $24+24^2+24^3+24^4=346.200$

Ασκήσεις (III)

21. Πόσες συμβολοσειρές με τρία δεκαδικά ψηφία

a) δεν περιέχουν το ίδιο ψηφίο τρεις φορές; 10^3-10=990

b) αρχίζουν με περιττό ψηφίο; $5*10^2$=500

c) έχουν δύο ψηφία που είναι 4; 3*9=27

23. Σχηματίζεται μια επιτροπή είτε με τον κυβερνήτη είτε με έναν από τους δύο γερουσιαστές κάθε μιας από τις 50 Πολιτείες των ΗΠΑ. Πόσοι τρόποι σχηματισμού αυτής της επιτροπής υπάρχουν; 3^{50}

Ασκήσεις (IV)

29. Πόσες συμβολοσειρές με οκτώ Λατινικά γράμματα υπάρχουν

a) που δεν περιέχουν φωνήεντα, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται; $(26-5)^8$

b) που δεν περιέχουν φωνήεντα, αν τα γράμματα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται; 21*20*19*18*17*16*15*14

c) που αρχίζουν με φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται; $5*26^7$

d) που αρχίζουν με φωνήεν, αν τα γράμματα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται;

e) που περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται; 26^8-21^8

f) που περιέχουν μόνο ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται; $5*8*21^7$

g) που αρχίζουν με X και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται; 26^7-21^7

h) που αρχίζουν και τελειώνουν με X και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται; 26^6-21^6

5*25*24*23*22*21*20*19

Ασκήσεις (V)

39. Με πόσους τρόπους ένας φωτογράφος σε τελετή γάμου μπορεί να τοποθετήσει y39 άτομα σε μια σειρά, μαζί με τον γαμπρό και την νύφη, αν

a) η νύφη θα πρέπει να είναι δίπλα στον γαμπρό;

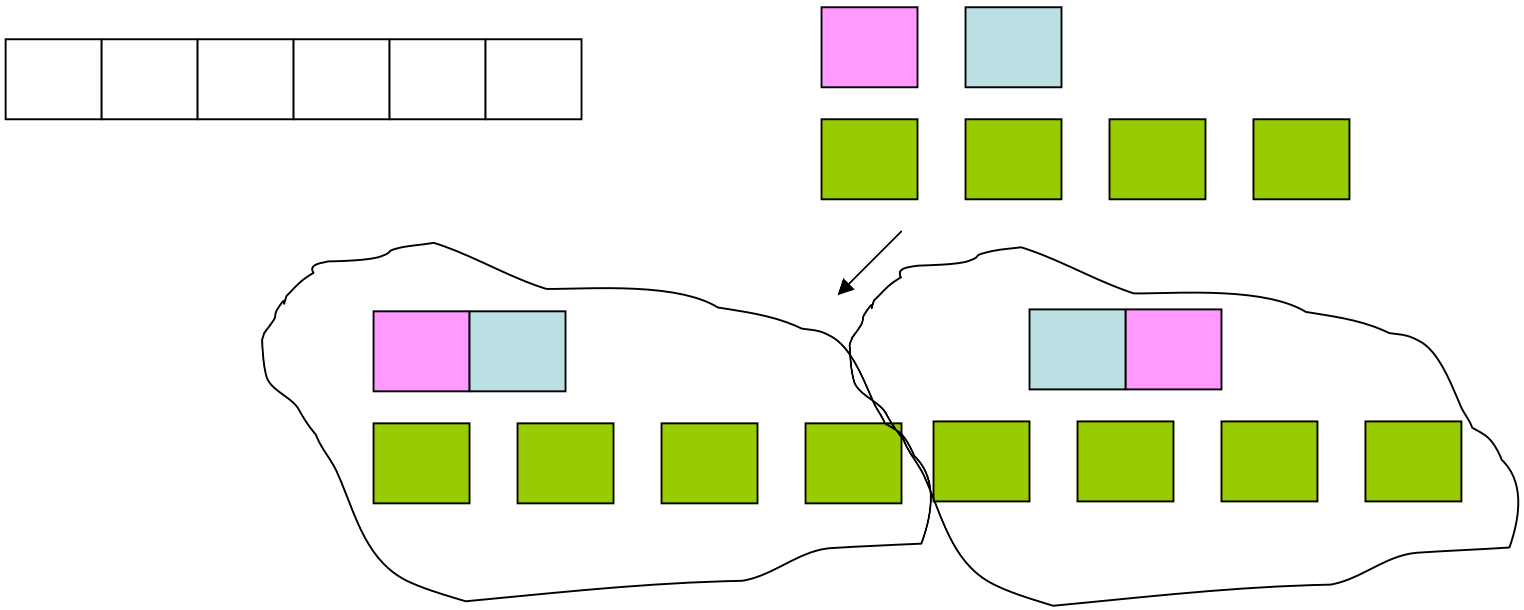
b) η νύφη δεν θα είναι δίπλα στον γαμπρό;

c) η νύφη θα βρίσκεται κάπου αριστερά του γαμπρού;

Ασκήσεις (VI)

39. Με πόσους τρόπους ένας φωτογράφος σε τελετή γάμου μπορεί να τοποθετήσει ɏ39 άτομα σε μια σειρά, μαζί με τον γαμπρό και την νύφη, αν
a) η νύφη θα πρέπει να είναι δίπλα στον γαμπρό;
b) η νύφη δεν θα είναι δίπλα στον γαμπρό;
c) η νύφη θα βρίσκεται κάπου αριστερά του γαμπρού;

a)



5! + 5! = 240

Ασκήσεις (VII)

39. Με πόσους τρόπους ένας φωτογράφος σε τελετή γάμου μπορεί να τοποθετήσει ӯзэ άτομα σε μια σειρά, μαζί με τον γαμπρό και την νύφη, αν

a) η νύφη θα πρέπει να είναι δίπλα στον γαμπρό;

b) η νύφη δεν θα είναι δίπλα στον γαμπρό;

c) η νύφη θα βρίσκεται κάπου αριστερά του γαμπρού;

b)

ӯ əǓɠ ɞəŭgзǓǛɠ Ǘɞ´ ɞɗǕǗɐůǕɠ 6 ǓǗɧɛɤз: 6!

ɇɞ´ ɞɗǕǗɐůǕɠ ůǗɠ ɞ´ ɞɗǕɠ ɔǓɛ´ ɉ ɧɠ əǓəзɨ ǘɖ əɎɗɞзǗǓəŭά əǓ: 240

ȼ Ǔ´ Ɏзǘɖůɖ Ǖɞ Ǔəǘɞ Ǔ´ ɞǗəǕɩɛǓ ǗɖɠǓǘǓɋ Ǖɩɖɠ: 6!-240=480

Ασκήσεις (VIII)

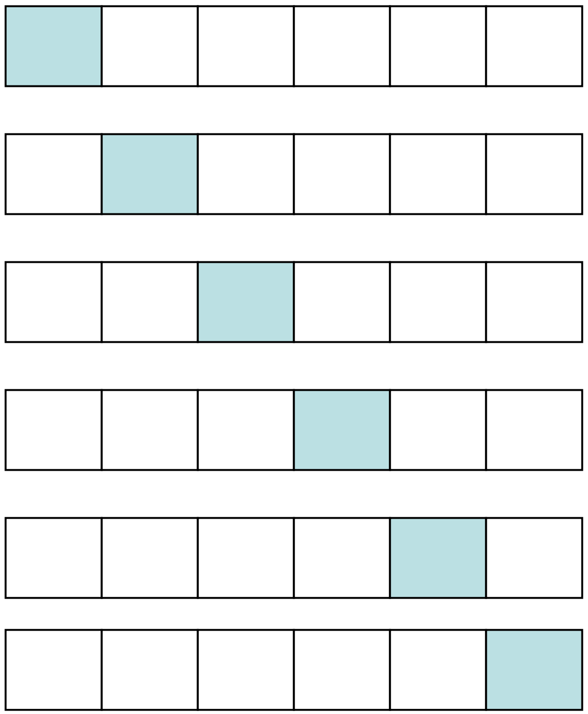
39. Με πόσους τρόπους ένας φωτογράφος σε τελετή γάμου μπορεί να τοποθετήσει ɏзɘ άτομα σε μια σειρά, μαζί με τον γαμπρό και την νύφη, αν

a) η νύφη θα πρέπει να είναι δίπλα στον γαμπρό;

b) η νύφη δεν θα είναι δίπλα στον γαμπρό;

c) η νύφη θα βρίσκεται κάπου αριστερά του γαμπρού;

c)



7Ŭɛ dŬ Ŭ̋ß´ ɞd∓Ŭ̋ɖůɖ

1 Ůəŭɞɞɐ ɔɘŬ 3ɨ űɖ * 4! ɔɘŬ Ŭ̋ßɡɠ ɡ´ ɧəɞɘ ɞɡɠ

2 Ůəŭɞɢ∓ɠ ɔɘŬ 3ɨ űɖ * 4! ɔɘŬ Ŭ̋ßɡɠ ɡ´ ɧəɞɘ ɞɡɠ

3 Ůəŭɞɢ∓ɠ ɔɘŬ 3ɨ űɖ * 4! ɔɘŬ Ŭ̋ßɡɠ ɡ´ ɧəɞɘ ɞɡɠ

4 Ůəŭɞɢ∓ɠ ɔɘŬ 3ɨ űɖ * 4! ɔɘŬ Ŭ̋ßɡɠ ɡ´ ɧəɞɘ ɞɡɠ

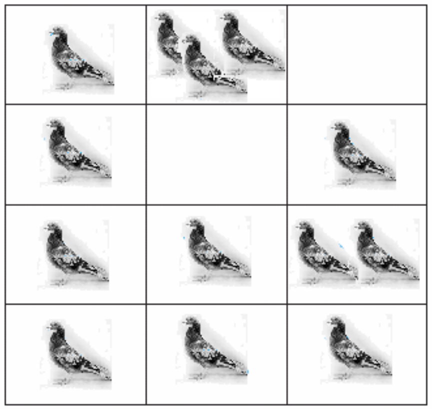
5 Ůəŭɞɢ∓ɠ ɔɘŬ 3ɨ űɖ * 4! ɔɘŬ Ŭ̋ßɡɠ ɡ´ ɧəɞɘ ɞɡɠ

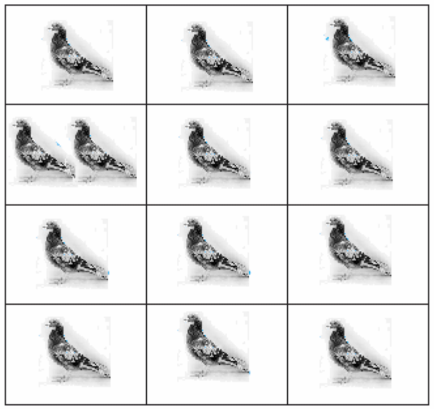
+

360 Ůəŭɞɢ∓ɠ

Αρχή Περιστεριώνα: ιδέα

- Αν υπάρχουν περισσότερα περιστέρια (k+1) από φωλιές (k), τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με τουλάχιστον δύο περιστέρια
- Αν k+1 ή περισσότερα αντικείμενα τοποθετηθούν σε k κουτιά, τότε τουλάχιστον ένα κουτί θα περιέχει τουλάχιστον δύο αντικείμενα
- Ονομάζεται και Αρχή του Dirichlet (19ος αιώνας)





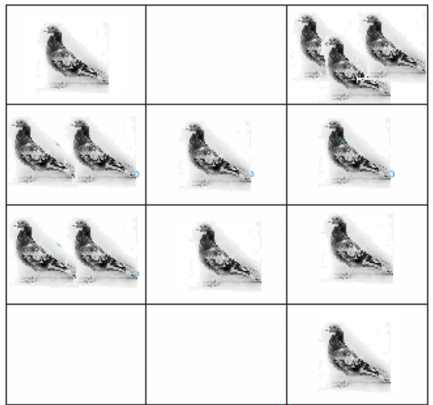
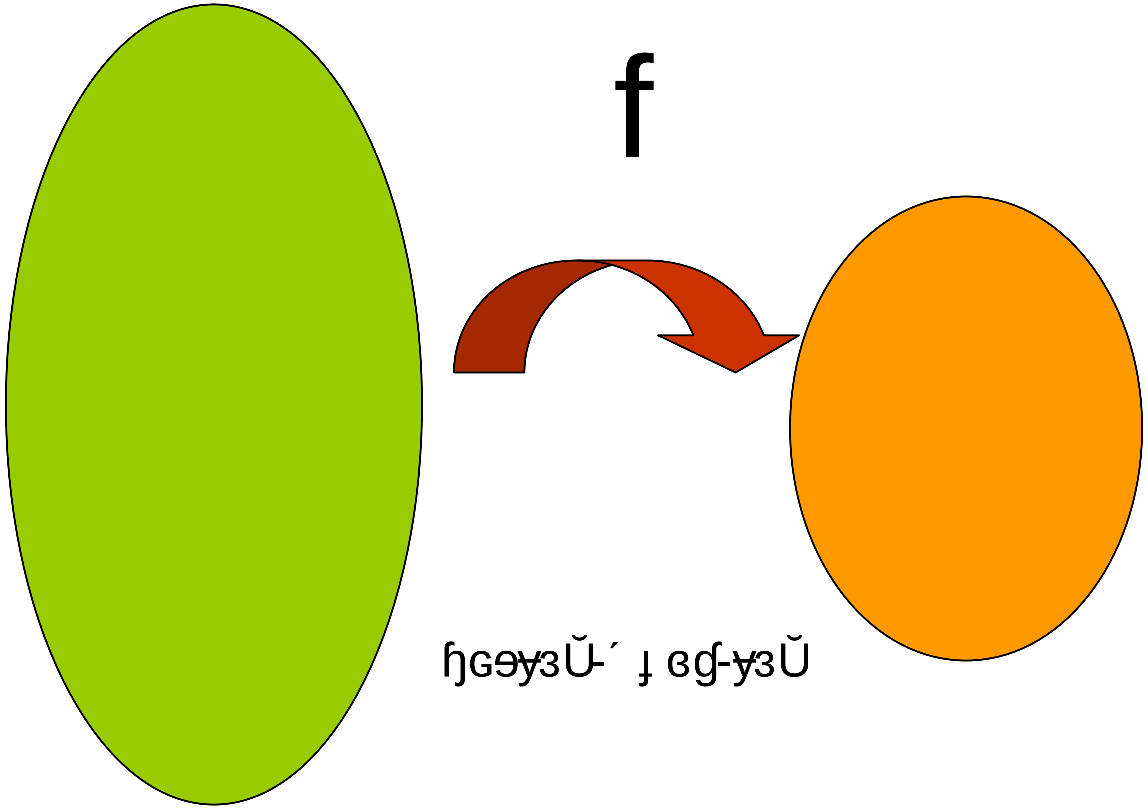


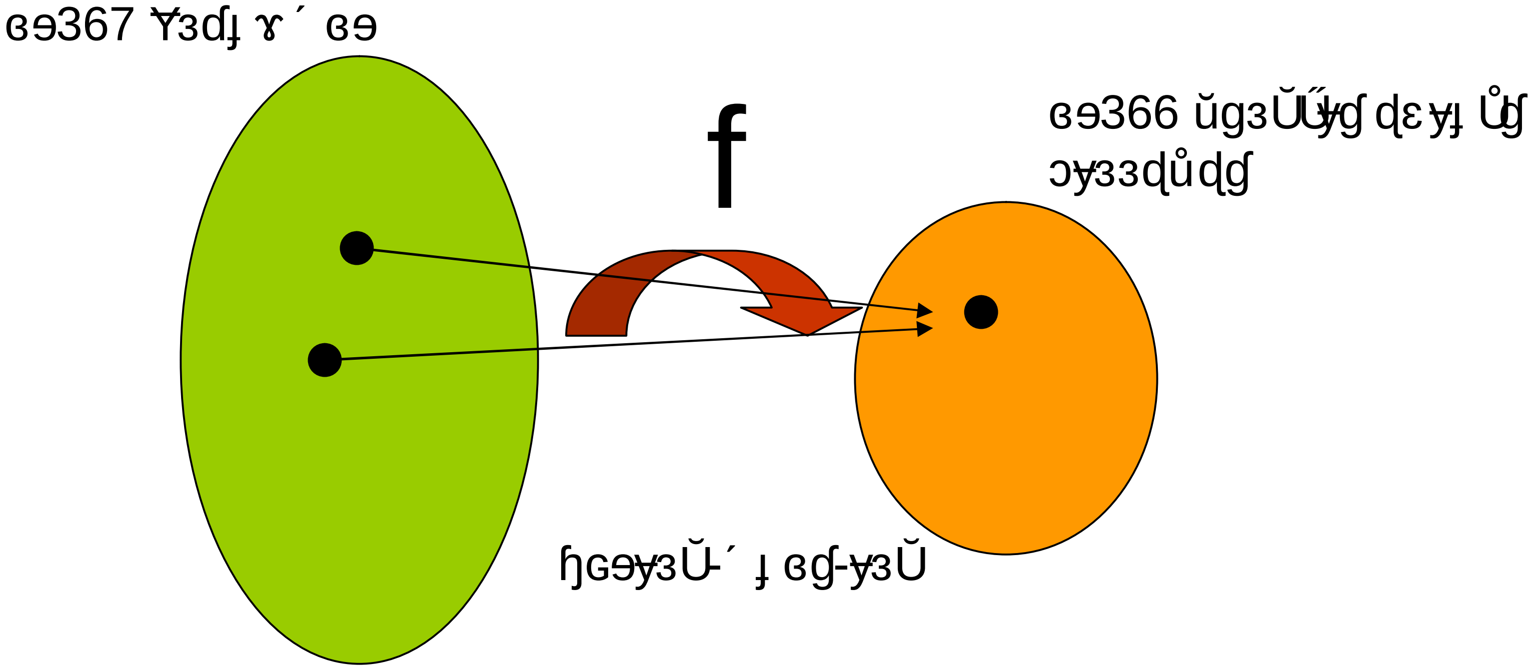
Image source: http://blog.redshiftminds.com, http://www.iconshut.com

Αρχή Περιστεριώνα: διατύπωση



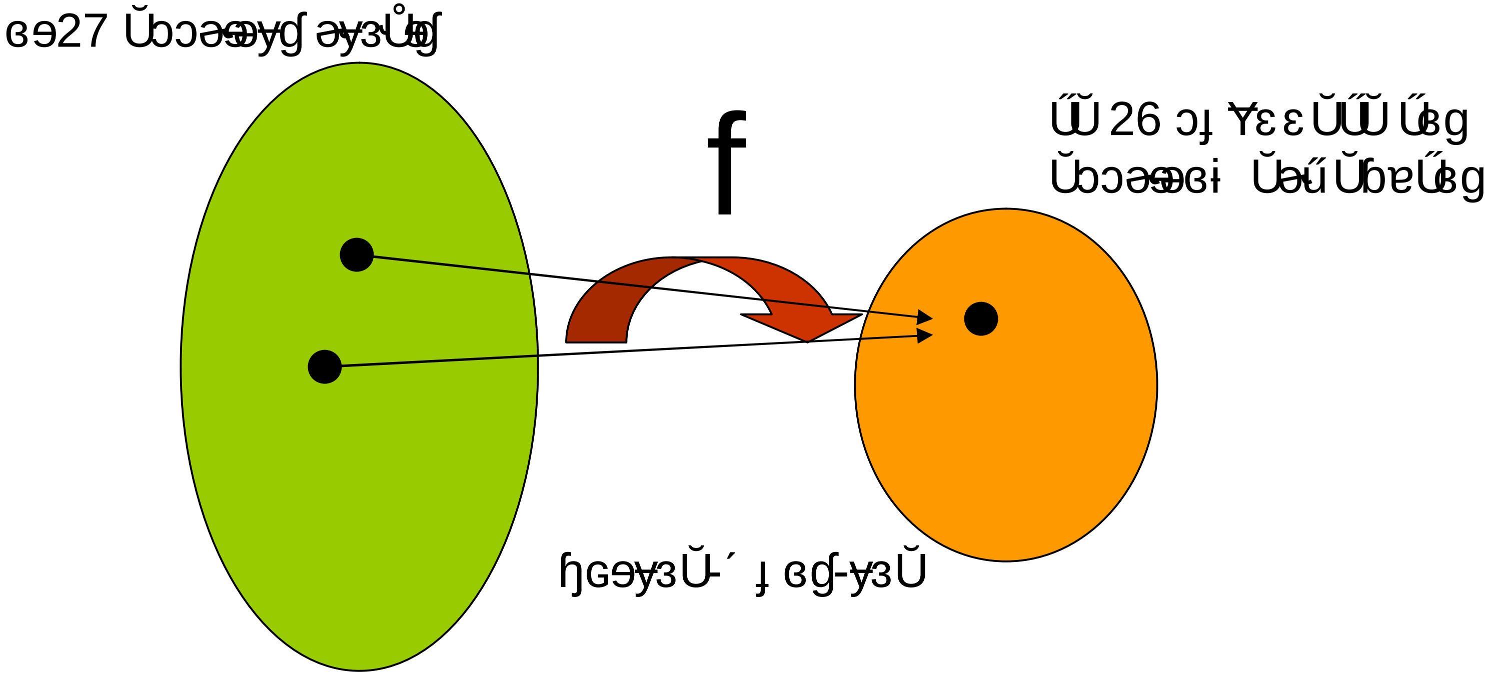
Παράδειγμα 1

- Σε οποιαδήποτε ομάδα με 367 ανθρώπους υπάρχουν τουλάχιστον 2 που έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα



Παράδειγμα 2

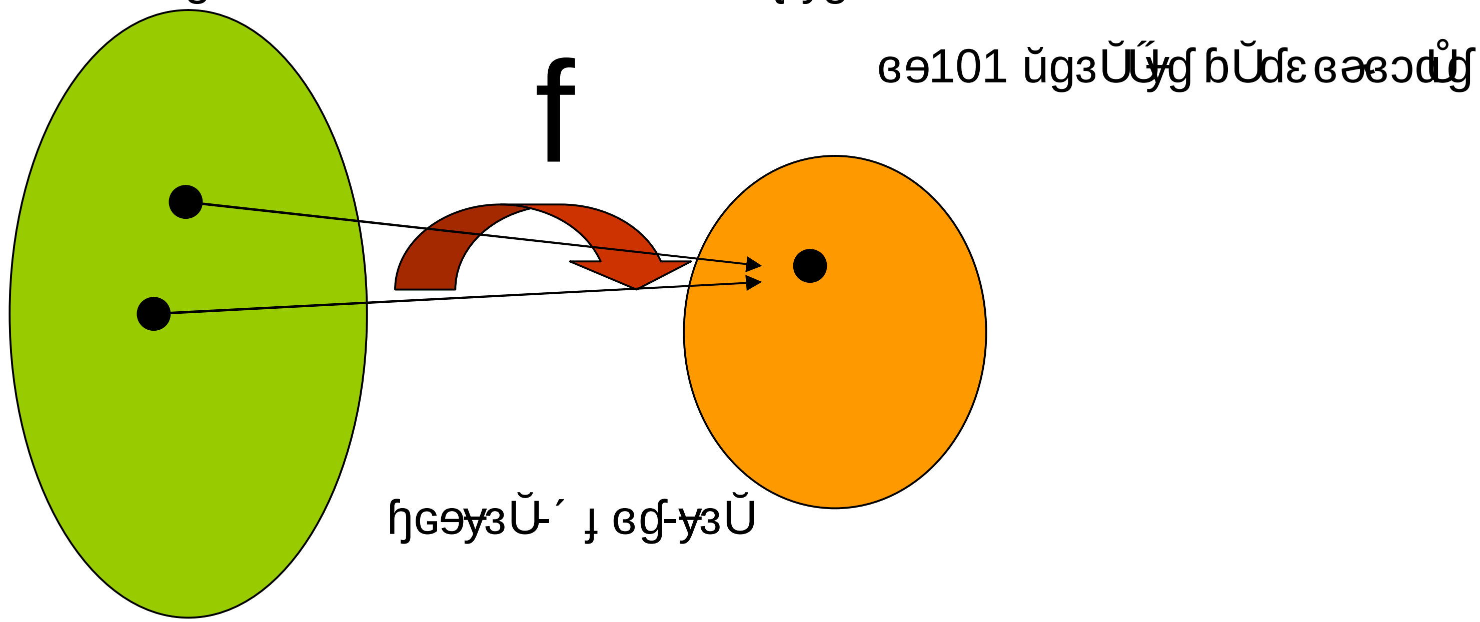
- Σε οποιαδήποτε ομάδα 27 λέξεων στα αγγλικά υπάρχουν τουλάχιστον 2 που αρχίζουν με το ίδιο γράμμα



Παράδειγμα 3

- Πόσοι φοιτητές θα πρέπει να υπάρχουν σε μία τάξη για να εξασφαλιστεί ότι τουλάχιστον 2 θα πάρουν τον ίδιο βαθμό στην τελική εξέταση, αν η βαθμολογία είναι από 0 έως 100;

ɉ ȷ ŮŬɕɦɛ ŬůŰŰɞɡɘɎɢɐůŰɜɜ 101+1=102 űɕɘůɭŰɏɠ



Γενικευμένη Αρχή του Περιστεριώνα

- Αν N αντικείμενα τοποθετηθούν σε k κουτιά, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί που θα περιέχει τουλάχιστον αντικείμενα $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$
  - Ο συμβολισμός διαβάζεται «άνω ακέραιο μέρος»
  - Σημαίνει ότι στρογγυλοποιώ έναν δεκαδικό αριθμό στον αμέσως μεγαλύτερό του ακέραιο – Π.χ.,
    - άνω ακέραιο μέρος του 3,17 είναι το ο 4
    - άνω ακέραιο μέρος του 7,27 είναι το ο 8
  - Ισχύει άνω ακέραιο μέρος n ενός αριθμού x: $x \leq n < x+1$

- Παράδειγμα: Μεταξύ 100 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον άνω ακέραιο μέρος του 100/12 = άνω ακέραιο μέρος του 8,39333… = 9 που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα

Γενικευμένη Αρχή του Περιστεριώνα: παράδειγμα 1

- Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος φοιτητών που χρειάζεται να βρίσκονται στο μάθημα για να είναι σίγουρο ότι τουλάχιστον 6 από αυτούς θα λάβουν την ίδια βαθμολογία, αν υπάρχουν 5 δυνατές βαθμολογίες, οι A, B, C, D, F;
- Ουσιαστικά μας ζητείται το ελάχιστο πλήθος αντικειμένων, N, που πρέπει να τοποθετήσουμε σε 5 κουτιά ώστε τουλάχιστον 1 κουτί να περιέχει τουλάχιστον 6 αντικείμενα
- ⇔ άνω ακέραιο μέρος N/5 Ó6 ⇔ N/5+1 > 6 ⇔ N > 25, [illegible], N=26, 27, …
  - [illegible] 25 [illegible] 5 [illegible] 5 [illegible]
  - [illegible] 26 [illegible] 6 [illegible]
  - [illegible] 25 [illegible] 6 [illegible]

Γενικευμένη Αρχή του Περιστεριώνα: παράδειγμα 2

- Πόσα χαρτιά πρέπει να επιλέξουμε από μια τράπουλα με 52 χαρτιά για να εξασφαλιστεί ότι θα επιλέξουμε 3 χαρτιά το ίδιου «χρώματος»;
- Ουσιαστικά μας ζητείται το ελάχιστο πλήθος αντικειμένων, N, που πρέπει να τοποθετήσουμε σε 4 κουτιά (τα χρώματα) ώστε τουλάχιστον 1 κουτί να περιέχει τουλάχιστον 3 αντικείμενα
- ⇔ άνω ακέραιο μέρος N/4 Ó3 ⇔ N/4+1 > 3 ⇔ N > 8, [illegible], N=9, 10, …
  - [illegible]
  - [illegible]
  - [illegible]

Γενικευμένη Αρχή του Περιστεριώνα: παράδειγμα 3

- Πόσα χαρτιά πρέπει να επιλέξουμε από μια τράπουλα με 52 χαρτιά για να εξασφαλιστεί ότι θα επιλέξουμε τουλάχιστον 3 «κούπες»;
- Μπορεί να είμαστε τόσο … «άτυχοι» και να διαλέξουμε όλα τα υπόλοιπα χαρτιά πριν «πετύχουμε κούπα»
- Πόσα είναι τα υπόλοιπα χαρτιά; 39
- Άρα, αν επιλέξουμε τουλάχιστον 39+3=42 χαρτιά, σίγουρα θα έχουμε επιλέξει και 3 «κούπες»

Γενικευμένη Αρχή του Περιστεριώνα: παράδειγμα 4

- Υποθέστε ότι σε μια ομάδα 6 ατόμων, κάθε ζεύγος ατόμων αποτελείται από 2 φίλους ή από 2 εχθρούς. Τότε, στην ομάδα υπάρχουν είτε 3 φίλοι μεταξύ τους είτε 3 εχθροί μεταξύ τους.
- Έστω Α αυθαίρετο από τα 6 άτομα
- Από τα υπόλοιπα 5 άτομα, υπάρχουν
  - 3 ή περισσότερα που είναι φίλοι του Α, ή
  - 3 ή περισσότερα που είναι εχθροί του Α
- ΓΙΑΤΙ; Τα 5 αντικείμενα (άτομα) τοποθετούνται σε 2 κουτιά (φίλοι / εχθροί του Α) $\Rightarrow$ τουλάχιστον 1 κουτί περιέχει τουλάχιστον άνω ακέραιο μέρος 5/2 = 3 αντικείμενα
  - Αν το σύνολο με τα τουλάχιστον 3 αντικείμενα είναι φίλοι του Α
    - Και τουλάχιστον 2 από αυτούς είναι φίλοι μεταξύ τους ΟΚ
    - Αλλιώς, όλοι (3) είναι εχθροί μεταξύ τους ΟΚ
  - Αν το σύνολο με τα τουλάχιστον 3 αντικείμενα είναι εχθροί του Α
    - Και τουλάχιστον 2 από αυτούς είναι εχθροί μεταξύ τους ΟΚ
    - Αλλιώς, όλοι (3) είναι φίλοι μεταξύ τους ΟΚ

Ο αριθμός του Ramsey

- Συμβολίζεται με R(m,n)
  - m,n θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2
- Συμβολίζει το ελάχιστο πλήθος ατόμων σε συγκέντρωση έτσι ώστε να υπάρχουν ή m φίλοι μεταξύ τους ή n εχθροί μεταξύ τους
  - Με την υπόθεση ότι κάθε ζεύγος ατόμων στη συγκέντρωση είναι φίλοι ή εχθροί

Image source: http://apprendre-math.info

Ασκήσεις (I)

- 1. Σε οποιοδήποτε σύνολο 6 μαθημάτων, θα πρέπει να υπάρχουν 2 που πραγματοποιούνται την ίδια μέρα (δεν γίνονται μαθήματα Σαββατοκύριακα)
- 3. Ένα συρτάρι περιέχει 12 καφέ και 12 μαύρες κάλτσες και κάποιος διαλέγει τυχαία κάλτσες στο σκοτάδι
  - Πόσες είναι οι λιγότερες κάλτσες που πρέπει να πάρει για να έχει σίγουρα ζευγάρι του ίδιου χρώματος; 3
  - Πόσες τουλάχιστον κάλτσες πρέπει να πάρει για να έχει σίγουρα 2 μαύρες κάλτσες; 12+2=14
- 5. Σε οποιαδήποτε ομάδα 5 ακεραίων (όχι απαραίτητα διαδοχικών) υπάρχουν 2 με το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με 4
- 9. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ατόμων (καθένα τους προέρχεται από τις 28 χώρες της ΕΕ) που φοιτούν σε πανεπιστήμιο για να εξασφαλιστεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον 100 από την ίδια χώρα-μέλος; άνω ακέραιο μέρος N/28 Ó100 $\Rightarrow$ N Ó2773

Ασκήσεις (ΙΙ)

- 19. Υποθέστε ότι σε τάξη 25 φοιτητών κάθε άτομο είναι στο 3, στο 2, ή στο 1 έτος. Αποδείξτε ότι:
  - στο μάθημα υπάρχουν τουλάχιστον 9 τριτοετείς, τουλάχιστον 9 δευτεροετείς, ή τουλάχιστον 9 πρωτοετείς φοιτητές
    - Τοποθετώ 25 αντικείμενα (φοιτητές) σε 3 κουτιά (μαθήματα) οπότε τουλάχιστον 1 κουτί έχει τουλάχιστον άνω ακέραιο μέρος 25/3=9 αντικείμενα
  - στο μάθημα υπάρχουν τουλάχιστον 3 τριτοετείς, τουλάχιστον 19 δευτεροετείς, ή τουλάχιστον 5 πρωτοετείς φοιτητές
    - Αν δεν ισχύει η δήλωση, πρέπει να έχουμε το πολύ 2 τριτοετείς και το πολύ 18 δευτεροετείς και το πολύ 4 πρωτοετείς φοιτητές, δηλ., συνολικά το πολύ 2+18+4=24 φοιτητές… Άτοπο!

Ασκήσεις (III)

- 35. Υποθέστε ότι έχουμε 100 υπολογιστές και 20 εκτυπωτές. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος καλωδίων που χρειάζονται για να υπάρχει απευθείας σύνδεση 20 υπολογιστών σε διαφορετικούς εκτυπωτές;

- 1620 καλώδια είναι αρκετά. ΓΙΑΤΙ;
  - Δίνουμε ετικέτες στους υπολογιστές: Υ1, Υ2, …Υ100
  - Δίνουμε ετικέτες στους εκτυπωτές: Ε1, Ε2, …Ε20
  - 20 καλώδια για να συνδέσουμε τον υπολογιστή Υ1 με τον εκτυπωτή Ε1, τον υπολογιστή Υ2 με τον εκτυπωτή Ε2, … τον υπολογιστή Υ20 με τον εκτυπωτή Υ20
  - Τους υπόλοιπους 80 υπολογιστές τους συνδέουμε με όλους τους εκτυπωτές, δηλ., άλλα 80*20=1600 καλώδια
- Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με λιγότερα από 1620 καλώδια; Ας δούμε αν μπορούμε με 1620-1=1619 καλώδια
  - Τοποθετούμε 1619 αντικείμενα σε 20 κουτιά $\Rightarrow$ Κάθε κουτί λαμβάνει κατά μέσο όρο 80,95 < 81 καλώδια $\Rightarrow$ Υπάρχει εκτυπωτής που συνδέεται με λιγότερους από 81 υπολογιστές δηλ., συνδέεται με 80 ή λιγότερους υπολογιστές $\Rightarrow$ υπάρχουν 20 υπολογιστές που δεν συνδέονται στον εκτυπωτή αυτόν
  - Αν αυτοί οι 20 υπολογιστές χρειαστεί να τυπώσουν ταυτόχρονα αυτό ΔΕΝ είναι εφικτό αφού συνδέονται μόνο σε 19 εκτυπωτές