Διακριτά Μαθηματικά

Απαρίθμηση: μεταθέσεις και συνδυασμοί

Μεταθέσεις (permutations)

- Μετάθεση διακεκριμένων στοιχείων ενός συνόλου = Ανακάτεμα κάποιων ή όλων των στοιχείων του συνόλου
  - S={1,2,3}
  - Μεταθέσεις των στοιχείων του S
    - 3,1,2
    - 1,3,2
    - …
  - K={a,b,c,d,e,f}
  - Μεταθέσεις των στοιχείων του K
    - c,a,e
    - a,d,f,b,e
    - …

Υπολογισμός μεταθέσεων

- Πλήθος μεταθέσεων r στοιχείων ενός συνόλου με n στοιχεία:
  - P(n,r)=n*(n-1)*(n-2)*…*(n-r+1)
- Απόδειξη
  - Το 1ο στοιχείο της μετάθεσης μπορεί να επιλεχθεί με n τρόπους αφού στο σύνολο υπάρχουν n στοιχεία
  - Το 2ο στοιχείο της μετάθεσης μπορεί να επιλεχθεί με n-1 τρόπους αφού στο σύνολο υπάρχουν πλέον n-1 στοιχεία (έχουμε ήδη επιλέξει κάποιο από τα n για την 1η θέση)
  - …
  - Το r-στο στοιχείο της μετάθεσης μπορεί να επιλεχθεί με n-(r-1) τρόπους αφού στο σύνολο υπάρχουν πλέον n-(r-1) στοιχεία (έχουμε ήδη επιλέξει r-1 από τα n για τις r-1 προηγούμενες θέσεις)
  - $\Rightarrow$ με χρήση του κανόνα του γινομένου, ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων είναι πράγματι
    - P(n,r)=n*(n-1)*(n-2)*…*(n-r+1) = n!/(n-r)!
    - Παρατηρήστε ότι P(n,n)=n!

Παράδειγμα (Ι)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε σε σειρά 3 φοιτητές από ένα σύνολο 5 φοιτητών;
  - Για την 1η θέση 5 επιλογές
  - Για τη 2η θέση 4 επιλογές
  - Για την 3η΄θέση 3 επιλογές
  - Συνολικά: 5*4*3=60 επιλογές

Παράδειγμα (II)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε και τους 5 φοιτητές σε σειρά;
  - Για την $1^η$ θέση 5 επιλογές
  - Για τη $2^η$ θέση 4 επιλογές
  - Για την $3^η$΄θέση 3 επιλογές
  - Για τη $4^η$ θέση 2 επιλογές
  - Για την $5^η$ θέση 1 επιλογή
  - Συνολικά: 5*4*3*2*1=5!=120 επιλογές

Παράδειγμα (III)

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε πρώτο, δεύτερο και τρίτο νικητή από σύνολο 100 (διαφορετικών) ατόμων που συμμετέχουν σε έναν διαγωνισμό;

- 1η επιλογή = νικητής 1
- 2η επιλογή = νικητής 2
- 3η επιλογή = νικητής 3

Å $\Rightarrow$ [illegible]

Å $\Rightarrow$ Μας ζητείται να απαριθμήσουμε το πλήθος των μεταθέσεων 3 στοιχείων από 100
  - P(100,3)=100*99*98=970.200

Παράδειγμα (IV)

- Σε έναν αγώνα δρόμου συμμετέχουν 8 δρομείς. Ο νικητής παίρνει χρυσό μετάλλιο, ο δεύτερος παίρνει αργυρό μετάλλιο και ο τρίτος χάλκινο μετάλλιο. Πόσοι διαφορετικοί τρόπου απονομής των μεταλλίων υπάρχουν, αν μπορούν να εμφανιστούν όλα τα δυνατά αποτελέσματα και δεν υπάρχουν ισοπαλίες;

- Από τους 8 δρομείς τελικά 3 θα πάρουν μετάλλιο
- $\Rightarrow$ [illegible]
- P(8,3)=8*7*6=336

Παράδειγμα (V)

- Ένας επισκέπτης επιθυμεί να επισκεφθεί τις 8 περιοχές ενός αρχαιολογικού χώρου. Πρέπει να ξεκινήσει από μία συγκεκριμένη περιοχή, αλλά μπορεί να επισκεφθεί τις υπόλοιπες 7 περιοχές με όποια σειρά θέλει. Πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να χρησιμοποιήσει ο επισκέπτης κατά την περιήγηση στον αρχαιολογικό χώρο;

- Επειδή η πρώτη περιοχή είναι καθορισμένη, οι υπόλοιπες 7 μπορούν να διαταχθούν με αυθαίρετο τρόπο
- ⇒ [illegible]
- P(7,7)=7!=7*6*5*4*3*2*1=5.040 διαδρομές

Παράδειγμα (VI)

- Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων ABCDEFGH περιέχουν τη συμβολοσειρά ABC;

- Επειδή τα γράμματα A, B και C θέλουμε να εμφανίζονται όλα μαζί με συγκεκριμένη σειρά, υποθέτουμε ότι η συμβολοσειρά ABC είναι ολόκληρη 1 νέος χαρακτήρας
- $\Rightarrow$ [illegible]
- P(6,6)=6!=6*5*4*3*2*1=720 μεταθέσεις των γραμμάτων ABCDEFGH στις οποίες τα ABC εμφανίζονται ομαδοποιημένα

Συνδυασμοί (combinations)

- Συνδυασμός r στοιχείων ενός συνόλου = αδιάτακτη (δηλ., χωρίς να μετράει η σειρά) επιλογή r στοιχείων του συνόλου αυτού
  - S={1,2,3}
  - Συνδυασμός κάποιων στοιχείων του S
    - 3,1 (1,3 είναι το ίδιο)
    - 1,2
    - 1
    - …
  - K={a,b,c,d,e,f}
  - Συνδυασμός κάποιων στοιχείων του K
    - c,a,e (=a,e,c=c,e,a=…)
    - a,d,f,b,e
    - …

Υπολογισμός συνδυασμών (Ι)

- Πλήθος συνδυασμών r στοιχείων ενός συνόλου με n στοιχεία ($0 \le r \le n$):

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Συνδυασμοί 2 στοιχείων από το σύνολο {a,b,c,d} είναι:
- C(4,2)=6
- {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}

Υπολογισμός συνδυασμών (ΙΙ)

- Πλήθος συνδυασμών r στοιχείων ενός συνόλου με n στοιχεία ($0 \leq r \leq n$):

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Απόδειξη
  - Οι μεταθέσεις r στοιχείων του συνόλου με n στοιχεία, P(n,r) λαμβάνονται από
    - τους συνδυασμούς των στοιχείων αυτών C(n,r)
    - τη μετάθεση των στοιχείων των συνδυασμών αυτών P(r,r)

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Συνδυασμοί και Μεταθέσεις

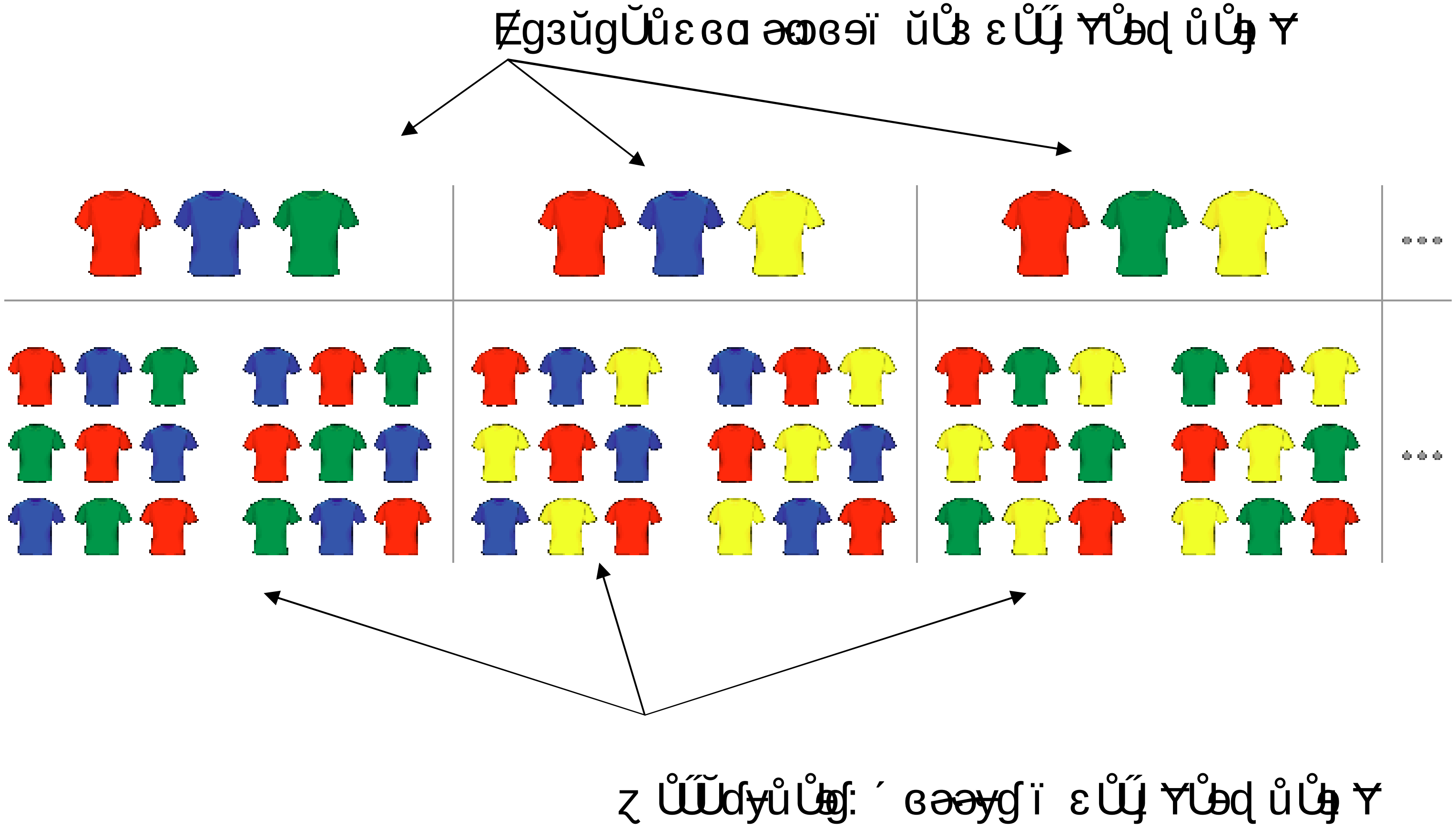


Image source: http://world.mathigon.org

Συνδυασμοί: χρήσιμη ιδιότητα (Ι)

- n,r μη αρνητικοί ακέραιοι με r $\leq$ n
- C(n,r)=C(n,n-r)

- Απόδειξη (με άλγεβρα, δηλ., με πράξεις)

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)!\left[n-(n-r)\right]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Συνδυασμοί: χρήσιμη ιδιότητα (ΙΙ)

- n,r μη αρνητικοί ακέραιοι με $r \leq n$
- C(n,r)=C(n,n-r)

- Απόδειξη (με συνδυαστικά επιχειρήματα)
  - Έχω διαθέσιμα r καπέλα για να τα δώσω σε n άτομα
  - C(n,r): πλήθος τρόπων να επιλέξω τα r άτομα από τα n στα οποία θα δώσω καπέλα
  - …Μα αυτό είναι ίδιο με το να επιλέξω σε ποια n-r άτομα από τα n δεν θα δώσω καπέλο: C(n,n-r)

Παραδείγματα (1)

- Με πόσους τρόπους διαλέξω 5 χαρτιά από μια τράπουλα των 52 φύλλων;
  - C(52,5)=52!/5!*47!=2.598.960

- Με πόσους τρόπους διαλέξω 47 χαρτιά από μια τράπουλα των 52 φύλλων;
  - C(52,47)=52!/5!*47!=2.598.960=C(52,5)
  - ΓΙΑΤΙ;

Παραδείγματα (2)

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή 5 παικτών από 10-μελή ομάδα τέννις για να πάνε σε άλλο πανεπιστήμιο για αγώνες;

- Δεν με νοιάζει ποιοι 5 θα είναι
- C(10,5)=10!/5!*5!=252

Παραδείγματα (3)

- Για αποστολή στον Άρη έχουν εκπαιδευτεί 30 άτομα σαν αστροναύτες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για την επιλογή 6-μελούς πληρώματος;

- Δεν με νοιάζει ποιοι 6 θα είναι
- C(30,6)=30!/6!*24!=593.775

Παραδείγματα (4)

- Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος n περιέχουν ακριβώς r άσσους;

- Δεν με νοιάζει σε ποιες θέσεις θα είναι τα r bits
- $C(n,r)=n!/r!*(n-r)!$

Παραδείγματα (5)

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή ομάδας διακριτών μαθηματικών, αν η επιτροπή αποτελείται από 3 κορίτσια και 4 αγόρια, και υπάρχουν 9 κορίτσια και 11 αγόρια που επιθυμούν να συμμετάσχουν;

- Δεν με νοιάζει ποια θα είναι τα άτομα αρκεί να είναι 3 κορίτσια και 4 αγόρια
- 3 κορίτσια από 9 επιλέγω με C(9,3)=9!/3!*6!
- 4 αγόρια από 11 επιλέγω με C(11,4)=11!/4!*7!
- Επομένως, συνολικά υπάρχουν C(9,3)*C(11,4)=27.720 τρόποι

Παραδείγματα (6)

- Να καταγραφούν όλες οι μεταθέσεις των {a,b,c}
  - abc, acb, bca, bac, cab, cba

Παραδείγματα (7)

- Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις των στοιχείων του συνόλου {a, b, c, d, e, f, g} υπάρχουν;
  - 7*6*5*4*3*2*1=7!

Παραδείγματα (8)

- Πόσες μεταθέσεις του {a,b,c,d,e,f,g} τελειώνουν με a;
  - Κρατάω σταθερό το τελευταίο σύμβολο (a) και μεταθέτω τα υπόλοιπα 6
  - Αυτό γίνεται με 6!=6*5*4*3*2*1=720 τρόπους

Παραδείγματα (9)

- Να βρεθεί η τιμή των ποσοτήτων
  - P(6,3)=6*5*4=120
  - P(6,5)=6*5*4*3*2=720
  - P(8,1)=8
  - P(8,5)=8*7*6*5*4=6720
  - P(8,8)=8!=8*7*6*5*4*3*2*1=40320
  - P(10,9)=10*9*8*7*6*5*4*3*2=3628800

Παραδείγματα (10)

- Να βρεθεί το πλήθος των μεταθέσεων 5 στοιχείων από σύνολο με 9 στοιχεία
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 5 στοιχεία από 9; 9!/5!*4!=6*7*8*9/4*3*2*1= 126
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να «ανακατέψω» 5 στοιχεία; 5!=5*4*3*2*1=120
  - Άρα, συνολικά 126*120=15120 μεταθέσεις

Παραδείγματα (11)

- Με πόσες διαφορετικές σειρές μπορούν να τερματίσουν 5 δρομείς όταν δεν επιτρέπονται ισοπαλίες;
  - 5*4*3*2*1=5!

Παραδείγματα (12)

- Πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την $1^η$, $2^η$ και $3^η$ θέση σε αγώνες ιπποδρόμου με 12 άλογα αν είναι δυνατές όλες οι σειρές τερματισμού;
  - 12*11*10=1320

Παραδείγματα (13)

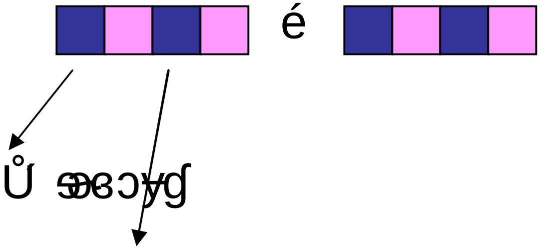
- Υπάρχουν 6 υποψήφιοι βουλευτές σε έναν νομό. Με πόσες διαφορετικές σειρές μπορούν να τυπωθούν τα ονόματά τους σε ένα ψηφοδέλτιο;
  - 6*5*4*3*2*1=6!

Παραδείγματα (14)

- Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές με μήκος 10 περιέχουν
  - τέσσερα 1
    - C(10,4)=10!/4!6!=7*8*9*10/4*3*2*1=210
  - το πολύ τέσσερα 1
    - C(10,4)+C(10,3)+C(10,2)+C(10,1)+C(10,0)=210+120+45+10+1=386
  - τουλάχιστον τέσσερα 1
    - C(10,4)+C(10,5)+C(10,6)+C(10,7)+C(10,8)+C(10,9)+C(10,10)=210+252 +210+120+45+10+1=848
  - ίσο πλήθος 0 και 1
    - C(10,5)=252

Παραδείγματα (15)

- Μια ομάδα περιέχει n άνδρες και n γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για τοποθέτηση αυτών των ανθρώπων σε γραμμή αν εναλλάσσονται άνδρες και γυναίκες;

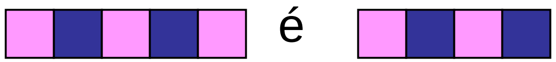


n Ů ɕɞɜɔɏɠ

n-1 Ů ɕɞɜɔɏɠ

õɘŬ Ű̋ɞgɠ Ɏɜŭɟ Ůɠ ůgɜɞɘɵɎ n! Ů ɕɞɜɔɏɠ
õɘŬ Ű̋ɞɠ ɔgɜŬɘɵŮɠ ůgɜɞɘɵɎ n! Ά΄ ɕɞɜɔɏɠ
ȾŬɘɔɘŬ Ű̋ɞgɠ ŭɨ ɞ ůgɜɞɘɵɎ n!*n!=(n!)^2 Ů ɕɞɜɔɏɠ

ȾŬɘɎɘɵŮɠ Ű̋ůŮɠ Ŭɜ ɢ ůŮɟ Ɏ ɜŮɘɜɎŬɛ ŮɔgɜŬɘɵŮɠ
ȯɟ Ŭ ůgɜɞɘɵɎ 2*(n!)^2 Ů ɕɞɜɔɏɠ



Παραδείγματα (16)

- Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεχθεί σύνολο 5 γραμμάτων από το λατινικό αλφάβητο;
  - C(26,5)=26!/5!*21!=26*25*24*23*22/5*4*3*2*1=65780

Παραδείγματα (17)

- Πόσα υποσύνολα με παραπάνω από 2 στοιχεία έχει σύνολο με 100 στοιχεία;
  - Σύνολο με 100 στοιχεία έχει 2^{100} υποσύνολα
  - Μέσα σε αυτά περιέχονται:
    - 1 υποσύνολο με 0 στοιχεία (το κενό)
    - 100 υποσύνολα με 1 στοιχείο
    - C(100,2)=100!/2!*98!=100*99/2=4950 υποσύνολα με 2 στοιχεία
    - Άρα το ζητούμενο πλήθος υποσυνόλων είναι: 2^{100}-1-100-4950= 2^{100}-5051

Παραδείγματα (18)

- Ένα νόμισμα πετάγεται 10 φορές στις οποίες το αποτέλεσμα είναι κορώνα ή γράμματα. Πόσα δυνατά αποτελέσματα:
  - υπάρχουν συνολικά;
    - 2^{10}
  - περιέχουν ακριβώς δύο κορώνες;
    - C(10,2)=10!/2!*8!=10*9/1*2=45
  - περιέχουν το πολύ τρεις κορώνες;
    - C(10,0)+C(10,1)+C(10,2)+C(10,3)=1+10+45+120=176
  - περιέχουν το ίδιο πλήθος από κορώνες και γράμματα;
    - C(10,5)=252

Παραδείγματα (19)

- Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων ABCDEFG περιέχουν:
  - τη συμβολοσειρά BCD;
    - 5!=5*4*3*2*1=120
  - τη συμβολοσειρά CFGA;
    - 4!=4*3*2*1=24
  - τις συμβολοσειρές BA και GF;
    - 5!=120
  - τις συμβολοσειρές ABC και DE;
    - 4!=24
  - τις συμβολοσειρές ABC και DEF;
    - 3!=3*2*1=6
  - τις συμβολοσειρές CBE και BED;
    - Καμία (δεν γίνεται τα ίδια γράμματα να επαναλαμβάνονται δύο φορές στη μετάθεση)

Παραδείγματα (20)

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν για 8 άνδρες και 5 γυναίκες να στέκονται σε σειρά έτσι ώστε να μην υπάρχουν 2 γυναίκες σε διαδοχικές θέσεις;
  - Τοποθετώ πρώτα τους άνδρες με 8! τρόπους
  - Έτσι δημιουργούνται 9 πιθανές θέσεις από τις οποίες διαλέγω 5 με C(9,5) τρόπους
  - Και σε αυτές τοποθετώ με 5! δυνατούς τρόπους τις γυναίκες
  - Επομένως, συνολικά: 8!*C(9,5)*5!=8*7*6*5*9! = 609638400 τρόποι

Παραδείγματα (21)

- Πωλούνται 100 λαχνοί για κλήρωση με απαρίθμηση 1,2,3,…,100 σε 100 διαφορετικούς ανθρώπους. Υπάρχουν 4 τυχεροί αριθμοί μαζί με το μεγάλο λαχνό (ένα ταξίδι στην Κούβα). Πόσοι τρόποι κλήρωσης υπάρχουν αν:
  - (a) δεν υπάρχουν περιορισμοί
    - Διαλέγω 4 από τους λαχνούς με C(100,4) τρόπους και τους μοιράζω σε 4 άτομα με 4! τρόπους: C(100,4) *4!=100*99*98*97=94109400
  - (b) όποιος έχει τον αριθμό 47 κερδίζει το μεγάλο λαχνό
    - Ουσιαστικά ρωτάμε πόσες τετράδες με τα στοιχεία 1 έως 100 μπορώ να φτιάξω ώστε το πρώτο στοιχείο να είναι το 47: 99*98*97=941094

Παραδείγματα (22)

- Πωλούνται 100 λαχνοί για κλήρωση με απαρίθμηση 1,2,3,…,100 σε 100 διαφορετικούς ανθρώπους. Υπάρχουν 4 τυχεροί αριθμοί μαζί με το μεγάλο λαχνό (ένα ταξίδι στην Κούβα). Πόσοι τρόποι κλήρωσης υπάρχουν αν:
  - (c) όποιος έχει τον αριθμό 47 κερδίζει έναν από τους τυχερούς λαχνούς
    - Από όλες τις τετράδες λαχνών που μπορώ να φτιάξω αφαιρώ όσες δεν περιέχουν το 47: 100*99*98*97-99*98*97*96=99*98*97*(100-96)=99*98*97*4=3764376
  - (d) όποιος έχει τον αριθμό 47 δεν κερδίζει τίποτα
    - Μετράω όλες τις τετράδες με διαφορετικούς αριθμούς που προκύπτουν από 99 νούμερα: 99*98*97*96=90345024

Παραδείγματα (23)

- Πωλούνται 100 λαχνοί για κλήρωση με απαρίθμηση 1,2,3,…,100 σε 100 διαφορετικούς ανθρώπους. Υπάρχουν 4 τυχεροί αριθμοί μαζί με το μεγάλο λαχνό (ένα ταξίδι στην Κούβα). Πόσοι τρόποι κλήρωσης υπάρχουν αν: όποιος έχει τον αριθμό 47 δεν κερδίζει τίποτα
  - (e) όποιοι έχουν τους αριθμούς 19 και 47 κερδίζουν και οι δύο από έναν λαχνό
    - Διαλέγω 2 από τις 4 θέσεις για τους αριθμούς 19 και 17, μετράω όλες τις πιθανές μεταθέσεις των δύο αριθμών στις θέσεις αυτές και συμπληρώνω τις υπόλοιπες δύο θέσεις με όλες τις διατάξεις 2 στοιχείων από τα υπόλοιπα 98 νούμερα
      - C(4,2)*2!*98*97=12*98*97=114072
  - (f) όποιοι έχουν τους αριθμούς 19, 47 και 73 κερδίζουν και οι τρεις από έναν λαχνό
    - Διαλέγω 3 από τις 4 θέσεις για τους αριθμούς 19,47 και 73, μετράω όλες τις πιθανές μεταθέσεις των τριών αριθμών στις θέσεις αυτές και συμπληρώνω τη θέση που μένει με ένα από τα 97 νούμερα
      - C(4,3)*3!*97=24*97=2328

Παραδείγματα (24)

- Πωλούνται 100 λαχνοί για κλήρωση με απαρίθμηση 1,2,3,…,100 σε 100 διαφορετικούς ανθρώπους. Υπάρχουν 4 τυχεροί αριθμοί μαζί με το μεγάλο λαχνό (ένα ταξίδι στην Κούβα). Πόσοι τρόποι κλήρωσης υπάρχουν αν:
  - (g) όποιοι έχουν τους αριθμούς 19, 47, 73 και 97 κερδίζουν όλοι από έναν λαχνό
    - Όσοι τρόποι υπάρχουν να ανακατέψω αυτούς τους 4 αριθμούς: 4!=4*3*2*1=24
  - (h) κανένας από αυτούς που έχουν τους αριθμούς 19, 47, 73 και 97 δεν κερδίζει τίποτα
    - Οι τετράδες που δεν περιέχουν αυτούς τους 4 αριθμούς: 96*95*94*93=79727040

Παραδείγματα (25)

- Πωλούνται 100 λαχνοί για κλήρωση με απαρίθμηση 1,2,3,…,100 σε 100 διαφορετικούς ανθρώπους. Υπάρχουν 4 τυχεροί αριθμοί μαζί με το μεγάλο λαχνό (ένα ταξίδι στην Κούβα). Πόσοι τρόποι κλήρωσης υπάρχουν αν:
  - (i) αυτός που κερδίζει τον πρώτο λαχνό είναι ένας από αυτούς που έχουν τους αριθμούς 19, 47, 73 και 97
    - Έχω 4 επιλογές για το πρώτο στοιχείο της τετράδας και στις υπόλοιπες 3 θέσεις διατάσσω τα υπόλοιπα νούμερα: 4*99*98*97=3764376
  - (j) όποιοι έχουν τους αριθμούς 19 και 47 κερδίζουν και οι δύο από έναν λαχνό αλλά αυτοί που έχουν τους αριθμούς 73 και 97 δεν κερδίζουν τίποτα
    - Διαλέγω δύο από τις τέσσερις θέσεις για τους αριθμούς 19 και 47 με κάθε σειρά και γεμίζω τις υπόλοιπες θέσεις με τα υπόλοιπα 96 στοιχεία: C(4,2)*2!*96*95=109440

Παραδείγματα (26)

- Ένας σύλλογος έχει 25 μέλη
  - Πόσοι τρόποι υπάρχουν για την επιλογή 4 μελών του συλλόγου για την εκτελεστική επιτροπή;
    - C(25,4)=25!/4!*21!=25*24*23*22/4*3*2*1=25*23*22=12650
  - Πόσοι τρόποι υπάρχουν για την επιλογή προέδρου, αντιπροέδρου, γραμματέα και ταμία του συλλόγου;
    - Τώρα μας ενδιαφέρει η σειρά: 25*24*23*22=303600

Παραδείγματα (27)

- Το λατινικό αλφάβητο περιέχει 21 σύμφωνα και 5 φωνήεντα. Πόσες συμβολοσειρές 6 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου θα περιέχουν:
  - (a) μόνο ένα φωνήεν
    - Διαλέγω 1 από τις 6 θέσεις για το φωνήεν, υπάρχουν 5 φωνήεντα και οι υπόλοιπες 5 θέσεις μπορούν να έχουν οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 21 σύμφωνα: $6*5*21^5=122523030$
  - (b) μόνο δύο φωνήεντα
    - Διαλέγω 2 από τις 6 θέσεις για τα 2 φωνήεντα, υπάρχουν 5^2 τοποθετήσεις για τα φωνήεντα αυτά και οι υπόλοιπες 4 θέσεις μπορούν να έχουν οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 21 σύμφωνα: $C(6,2)*5^2*21^4=122523030=15*5^2*21^4=72930375$
  - (c) τουλάχιστον ένα φωνήεν
    - Από τις συνολικά 26^6 δυνατές λέξεις αφαιρώ τις 21^6 που δεν περιέχουν κανένα φωνήεν: 223149655
  - (d) τουλάχιστον δύο φωνήεντα
    - $26^6-21^6-6*5*21^5=223149655-122523030=100626625$

Παραδείγματα (28)

- Έστω ότι ένας τομέας σχολής έχει 10 άνδρες και 15 γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για σχηματισμό επιτροπής με 6 μέλη αν θα πρέπει να έχει το ίδιο πλήθος ανδρών και γυναικών;
  - C(10,3)*C(15,3)=54600

Παραδείγματα (29)

- Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές περιέχουν ακριβώς οκτώ 0 και δέκα 1 αν κάθε 0 θα πρέπει να ακολουθείται από 1;
  - Φτιάχνω 8 ζευγάρια 01
  - Η τελική λέξη θα έχει 10 θέσεις: 8 που θα περιέχουν 01 και 2 που θα περιέχουν 1
  - Τοποθετώ τους δύο 1 στις 10 διαθέσιμες θέσεις με C(10,2)=45 πιθανούς τρόπους

Παραδείγματα (30)

- Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές με μήκος δέκα περιέχουν τουλάχιστον τρία 1 και τουλάχιστον τρία 0;
  - Πόσες συμβολοσειρές περιέχουν
    - 3 «0»: C(10,3)
    - 4 «0»: C(10,4)
    - 5 «0»: C(10,5)
    - 6 «0»: C(10,6)
    - 7 «0»: C(10,7)
  - Μας ενδιαφέρει το άθροισμά τους που είναι 912

Παραδείγματα (31)

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν για την επιλογή 12 χωρών στα Ηνωμένα Έθνη για ένα συμβούλιο αν τα 3 μέλη επιλέγονται από μια ομάδα 45 κρατών, τα 4 μέλη επιλέγονται από μια ομάδα 57 κρατών και τα άλλα μέλη επιλέγονται από τις υπόλοιπες 69 χώρες;
  - C(45,3)*C(57,4)*C(69,5)

Παραδείγματα (32)

- Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας με 3 γράμματα που ακολουθούνται από 3 ψηφία δεν περιέχουν γράμμα ή ψηφίο δύο φορές;
  - 26*25*24*10*9*8=11232000

Παραδείγματα (33)

- Πόσοι τρόποι υπάρχουν να τελειώσει ένας αγώνας ιπποδρομίας με τρία άλογα αν είναι δυνατές οι ισοπαλίες; (είναι δυνατή η ισοπαλία με δύο ή τρία άλογα)
  - Στην πρώτη θέση μπορεί να είναι
    - 3 άλογα: 1 τρόπος
    - 2 άλογα: C(3,2)=3 τρόποι
      - Αυτό που περισσεύει είναι στη δεύτερη θέση
    - 1 άλογο: C(3,1)=3 τρόποι
      - Τα δύο άλογα που μένουν μπορεί να είναι
        - » Και τα δύο στη δεύτερη θέση: 1 τρόπος
        - » Ένα στη δεύτερη και ένα στην τρίτη θέση: 2 τρόποι
  - Άρα συνολικά: 1+3+3*(1+2)=1+3+9=13 τρόποι

Παραδείγματα (34)

- Σε αγώνα δρόμου 100 μέτρων υπάρχουν 6 δρομείς. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να απονεμηθούν τρία μετάλλια αν είναι δυνατές και ισοπαλίες; (ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν με το μικρότερο χρόνο παίρνουν χρυσά μετάλλια, ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν με έναν δρομέα πριν από αυτούς παίρνουν αργυρά μετάλλια και ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν με δύο δρομείς πριν από αυτούς παίρνουν χάλκινα μετάλλια)

B	S	G			
	5	1			6
	4	1			30
	3	1			60
	2	1			60
1	1	1			120
4	1	1			30
3	1	1			120
2	1	1			180
3		2			60
2		2			90
1		2			60
4		2			15
		3			20
		4			15
		5			6
		6			1

873