Διακριτά Μαθηματικά

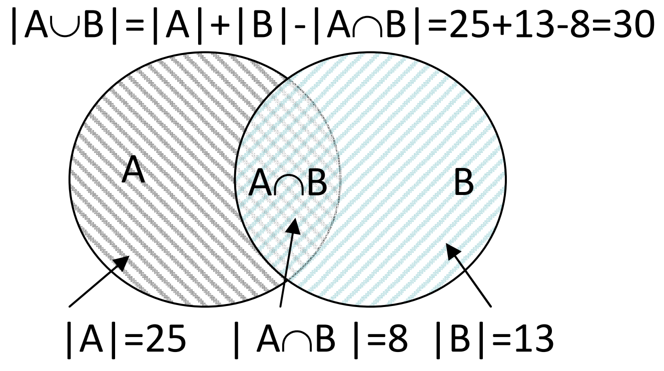
Προχωρημένες μέθοδοι απαρίθμησης: Εγκλεισμός-Αποκλεισμός

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (Ι)

- Όταν δύο εργασίες μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα, ΔΕΝ μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον κανόνα αθροίσματος για να απαριθμούμε τους τρόπους εκτέλεσης μιας από τις 2 εργασίες
  - Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 8 είτε αρχίζουν από 1 είτε τελειώνουν σε 00;
  - Ενδιαφέρομαι για 8-bit συμβολοσειρές
    - που αρχίζουν με 1: 2^7
    - που τελειώνουν σε 00: 2^6
    - που αρχίζουν με 1 και τελειώνουν σε 00: 2^5
      - ΠΡΟΣΕΧΩ ΝΑ ΜΗ ΔΙΠΛΟΜΕΤΡΑΩ… Αυτές τις έχω μετρήσει 2 φορές – από μία σε καθεμία από τις προηγούμενες κατηγορίες $\Rightarrow$ πρέπει να απομακρύνω τη μία φορά
    - Συνολικά, οι ζητούμενες συμβολοσειρές είναι: $2^7+2^6-2^5=128+64-32=160$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (ΙΙ)

- Μια τάξη έχει
  - 25 φοιτητές που παρακολουθούν Διακριτά Μαθηματικά
  - 13 φοιτητές που παρακολουθούν Ιστορία της Τέχνης
  - 8 φοιτητές που παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα
- Πόσοι φοιτητές υπάρχουν στην τάξη αυτή αν κάθε φοιτητής παρακολουθεί ένα από τα 2 ή και τα 2 μαθήματα;
- Α: σύνολο φοιτητών που παρακολουθούν Διακριτά Μαθηματικά
- Β: σύνολο φοιτητών που παρακολουθούν Ιστορία της Τέχνης
- $A \cap B$: σύνολο φοιτητών που παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα
- $\Rightarrow$ Το πλήθος των φοιτητών στην τάξη είναι
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25+13-8=30$

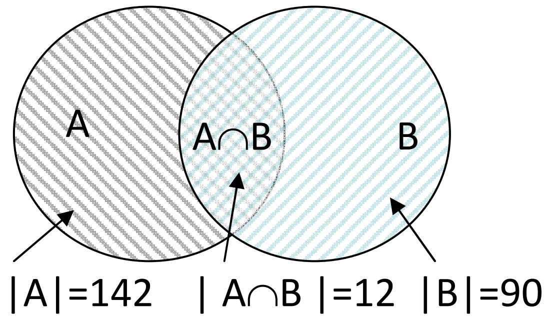


Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (ΙΙΙ)

- Πόσοι θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 διαιρούνται με 7 ή με 11;
- A: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται με το 7
- B: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται με το 11
- $A \cap B$: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται και με το 7 και με το 11
- $A \cup B$: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται με το 7 ή με το 11

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 142+90-12=220$

- Ποιος είναι ο πληθάριθμος των συνόλων αυτών;



Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (IV)

- Έστω n και d θετικοί ακέραιοι.
- Πόσοι θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από n διαιρούνται με d;

- Οι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με d είναι όλοι οι ακέραιοι της μορφής dk, όπου k ένας θετικός ακέραιος
- Επομένως, ο αριθμός των θετικών ακεραίων που διαιρούνται με d και δεν είναι μεγαλύτεροι από n ισούται με τον αριθμό των ακεραίων k με $0<dk \leq n \Leftrightarrow 0<k\leq n/d$
- Άρα, το πλήθος των θετικών ακεραίων που διαιρούνται με d και δεν είναι μεγαλύτεροι από n είναι:

$$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (V)

- Έστω *15* και *7* θετικοί ακέραιοι.
- Πόσοι θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από *15* διαιρούνται με *7*;

- Οι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με *7* είναι όλοι οι ακέραιοι της μορφής *7k*, όπου *k* ένας θετικός ακέραιος
- Επομένως, ο αριθμός των θετικών ακεραίων που διαιρούνται με *7* και δεν είναι μεγαλύτεροι από *15* ισούται με τον αριθμό των ακεραίων με $0<7k \leq 15 \Leftrightarrow 0<k \leq 15/7=2.14$
- Άρα, το πλήθος των θετικών ακεραίων που διαιρούνται με *7* και δεν είναι μεγαλύτεροι από *15* είναι:

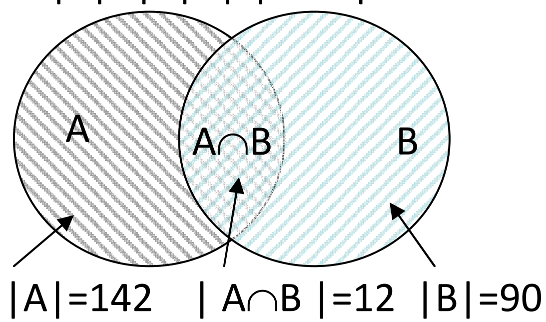
$$\left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor = \lfloor 2.14 \rfloor = 2$$

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (VI)

- Πόσοι θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 διαιρούνται με 7 ή με 11;
- A: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται με το 7 $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor$
- B: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται με το 11 $\left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor$
- A∩B: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται και με το 7 και με το 11 $\left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor$
- A∪B: σύνολο θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 που διαιρούνται με το 7 ή με το 11

|A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|=142+90-12=220



- |A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|=142+90-12=220

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (VII)

- Υπάρχουν 1807 πρωτοετείς σε ένα τμήμα. Από αυτούς:
  - 453 παρακολουθούν Διακριτά Μαθηματικά
  - 567 παρακολουθούν Ιστορία της Τέχνης
  - 299 παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα
- Πόσοι πρωτοετείς δεν παρακολουθούν Διακριτά Μαθηματικά ή Ιστορία της Τέχνης;

- A: σύνολο πρωτοετών που παρακολουθούν Διακριτά Μαθηματικά
  - $|A| = 453$
- B : σύνολο πρωτοετών που παρακολουθούν Ιστορία της Τέχνης
  - $|B| = 567$
- Πλήθος φοιτητών που παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα:
  - $|A \cap B| = 299$
- Πλήθος φοιτητών που παρακολουθούν ένα από τα δύο μαθήματα:
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721$
- $\Rightarrow$ Το πλήθος των πρωτοετών που δεν παρακολουθούν κανένα από τα δύο μαθήματα είναι: $1807 - 721 = 1086$

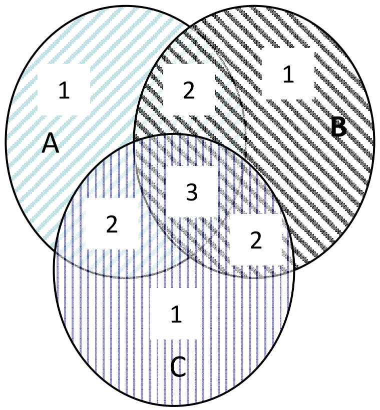
Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (VIII)

- Έχουμε έναν αποδοτικό τρόπο για να μετράμε το πλήθος των στοιχείων της ένωσης 2 συνόλων, A και B, μέσω:
  - του πλήθους των στοιχείων στα σύνολα αυτά. $|A|$, $|B|$
  - του πλήθους των στοιχείων της τομής τους, $|A\cap B|$

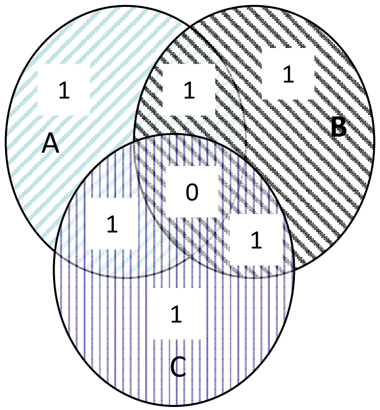
$$\boxed{|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|}$$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (IX)

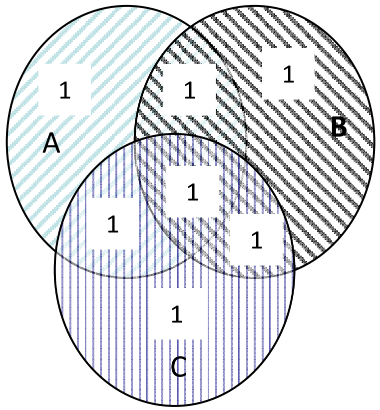
- Τι γίνεται αν έχουμε 3 σύνολα, A, B και C;
- Πώς μπορούμε να μετράμε το πλήθος των στοιχείων της ένωσης 3 συνόλων;



$|A|+|B|+|C|$



$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$



$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (X)

- 1232 φοιτητές παρακολουθούν Αγγλικά (σύνολο A), 879 Ισπανικά (σύνολο B), και 114 Γαλλικά (σύνολο C)
- 103 φοιτητές παρακολουθούν Αγγλικά και Ισπανικά ($A \cap B$), 23 φοιτητές παρακολουθούν Αγγλικά και Γαλλικά ($A \cap C$) και 14 φοιτητές παρακολουθούν Ισπανικά και Γαλλικά ($B \cap C$)
- Αν 2092 φοιτητές παρακολουθούν τουλάχιστον μία από τις γλώσσες Αγγλικά, Ισπανικά και Γαλλικά ($A \cup B \cup C$), πόσοι φοιτητές παρακολουθούν και τις 3 γλώσσες;

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \Rightarrow$$

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |A \cap B \cap C| \Rightarrow$$

$$|A \cap B \cap C| = 7$$

Γενικεύοντας... (Ι)

$$\text{Έστω ότι τα } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Γενικεύοντας… (ΙΙ)

$$\textit{Έστω ότι τα } A_1, A_2, \ldots, A_n \textit{ είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε}$$

$$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|} = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$\underbrace{+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|}$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;

Γενικεύοντας… (ΙΙΙ)

Έστω ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|}_{} = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \underbrace{+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|}_{}$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;

Έστω ότι το α ανήκει σε r από τα σύνολα Ai $\Rightarrow$ Το α μετριέται C(r,1) φορές στο

Γενικεύοντας… (IV)

Έστω ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε*

$$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|}_{} = \underbrace{\sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|}_{}$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;
Έστω ότι το α ανήκει σε r από τα σύνολα Ai ⇒ Το α μετριέται
C(r,1) φορές στο
C(r,2) φορές στο
…

Γενικεύοντας... (V)

Έστω ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|}_{\text{Κάθε στοιχείο α}} = \underbrace{\sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|}_{\text{Μετριέται μόνο μία φορά}}$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;

Έστω ότι το α ανήκει σε r από τα σύνολα Ai ⇒ Το α μετριέται

C(r,1) φορές στο

C(r,2) φορές στο

…

C(r,k) φορές στο

Γενικεύοντας… (VI)

Έστω ότι τα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ *είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε*

$$\underbrace{|\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n|}_{} = \sum_{1 \le i \le n} |\mathrm{A}_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$\underbrace{+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|}_{}$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;

Έστω ότι το α ανήκει σε r από τα σύνολα Ai $\Rightarrow$ Το α μετριέται

C(r,1) φορές στο

C(r,2) φορές στο

…

C(r,k) φορές στο

…

C(r,r) φορές στο

Γενικεύοντας… (VII)

Έστω ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|}_{} = \underbrace{\sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|}_{}$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;

Έστω ότι το α ανήκει σε r από τα σύνολα Ai ⇒ Το α μετριέται

C(r,1) φορές στο

C(r,2) φορές στο

…

C(r,k) φορές στο

…

C(r,r) φορές στο

Συνολικά, στο δεξί μέρος το στοιχείο α μετριέται:

$C(r,1)-C(r,2)+\ldots+(-1)^{k+1}C(r,k)+\ldots+(-1)^{r+1}C(r,r)$ φορές

Και έχουμε ήδη αποδείξει ότι: ⇨

Διάλεξη 4

Ασκήσεις (Ενότητα 4)

31. Να δειχτεί ότι μη κενό σύνολο έχει το ίδιο πλήθος υποσυνόλων, με περιττό πλήθος στοιχείων, και υποσυνόλων με άρτιο πλήθος στοιχείων.

Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

- Για κάθε x ισχύει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$
- Για $x = -1$ η παραπάνω σχέση δίνει: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \ldots = 0 \Rightarrow$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

Γενικεύοντας… (VIII)

Έστω ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Κάθε στοιχείο α

Μετριέται μόνο μία φορά

Γιατί;
Έστω ότι το α ανήκει σε r από τα σύνολα Ai ⇒ Το α μετριέται
C(r,1) φορές στο
C(r,2) φορές στο
…
C(r,k) φορές στο
…
C(r,r) φορές στο

Συνολικά, στο δεξί μέρος το στοιχείο α μετριέται:
C(r,1)-C(r,2)+…+$(-1)^{k+1}$C(r,k)+…+$(-1)^{r+1}$C(r,r) φορές
= C(r,0)=1 φορά

Ασκήσεις (1)

- Πόσα στοιχεία υπάρχουν στο σύνολο $A1 \cup A2$, αν υπάρχουν 12 στοιχεία στο σύνολο A1, 18 στοιχεία στο σύνολο A2 και $A1 \cap A2 = \varnothing$;
- $|A1 \cup A2| = |A1| + |A2| - |A1 \cap A2| = 12+18-0 = 30$
- Πόσα στοιχεία υπάρχουν στο σύνολο $A1 \cup A2$, αν υπάρχουν 12 στοιχεία στο σύνολο A1, 18 στοιχεία στο σύνολο A2 και $|A1 \cap A2| = 1$;
- $|A1 \cup A2| = |A1| + |A2| - |A1 \cap A2| = 12+18-1 = 29$

Ασκήσεις (2)

- Πόσα στοιχεία υπάρχουν στο σύνολο $A1 \cup A2$, αν υπάρχουν 12 στοιχεία στο σύνολο A1, 18 στοιχεία στο σύνολο A2 και $|A1 \cap A2|=6$;

- $|A1 \cup A2|=|A1|+|A2|-|A1 \cap A2| = 12+18-6 = 24$

- Πόσα στοιχεία υπάρχουν στο σύνολο $A1 \cup A2$, αν υπάρχουν 12 στοιχεία στο σύνολο A1, 18 στοιχεία στο σύνολο A2 και $A1 \subseteq A2$;

- $|A1 \cup A2|=|A1|+|A2|-|A1 \cap A2| = 12+18-12 = 18$

Ασκήσεις (3)

- Σε ένα Τμήμα, 345 φοιτητές παρακολουθούν άλγεβρα, 212 διακριτά μαθηματικά και 188 φοιτητές παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα.
- Πόσοι φοιτητές παρακολουθούν κάποιο από τα δύο μαθήματα;

- A: φοιτητές που παρακολουθούν άλγεβρα
- B: φοιτητές που παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 345 + 212 - 188 = 369$

Ασκήσεις (4)

- Έρευνα έδειξε ότι στην Ελλάδα 96% των σπιτιών διαθέτει τουλάχιστον 1 συσκευή τηλεόρασης, 98% των σπιτιών διαθέτουν τηλεφωνική σύνδεση και 95% των σπιτιών διαθέτουν τηλεφωνική σύνδεση και τουλάχιστον 1 συσκευή τηλεόρασης.
- Ποιο ποσοστό σπιτιών δεν διαθέτουν ούτε τηλεόραση ούτε τηλεφωνική σύνδεση;

- A: σπίτια με τηλεόραση, $|A|=0,96$
- B: σπίτια με τηλεφωνική σύνδεση, $|B|=0,98$
- $A\cap B$: σπίτια με τηλεόραση και τηλεφωνική σύνδεση, $|A\cap B|=0,95$
- $A\cup B$: σπίτια με τηλεόραση ή και τηλεφωνική σύνδεση, $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| = 0,96 + 0,98 – 0,95 = 0,99$
- <u>Ζητάμ</u>ε σπίτια χωρίς τηλεόραση και χωρίς τηλεφωνική σύνδεση δηλ. το $A\cup B \Rightarrow$
- $|\overline{A\cup B}| = 1-0,99=0,01$
- Το ζητούμενο ποσοστό είναι 1%

Ασκήσεις (5)

- Σύμφωνα με έρευνα αγοράς για προσωπικούς υπολογιστές, 650.000 κάτοχοι σκοπεύουν να αγοράσουν εκτυπωτή και 1.250.000 κάποιο πακέτο λογισμικού.
- Αν 1.450.000 κάτοχοι PC σκοπεύουν να αγοράσουν εκτυπωτή ή πακέτο λογισμικού, πόσοι σκοπεύουν να αγοράσουν και εκτυπωτή και λογισμικό;

- A: άτομα που σκοπεύουν να αγοράσουν εκτυπωτή
- B: άτομα που σκοπεύουν να αγοράσουν λογισμικό
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow 1.450.000 = 65.000 + 1.250.000 - |A \cap B| \Rightarrow$ $|A \cap B| = 450.000$

Ασκήσεις (6)

- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία σε κάθε σύνολο και τα σύνολα είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους

- Αφού τα σύνολα είναι ανά ζεύγη ξένα μεταξύ τους $\Rightarrow$ συνολικά δεν έχουν κοινά στοιχεία
- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3| = 100+100+100-0-0-0+0=300$

- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία σε κάθε σύνολο και υπάρχουν 50 κοινά στοιχεία σε κάθε ζεύγος συνόλων και κανένα στοιχείο δεν ανήκει και στα 3 σύνολα

- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3| = 100+100+100-50-50-50+0=150$

Ασκήσεις (7)

- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία σε κάθε σύνολο και υπάρχουν 50 κοινά στοιχεία σε κάθε ζεύγος συνόλων και 25 στοιχεία ανήκουν και στα 3 σύνολα
- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3| = 100+100+100-50-50-50+25=175$
- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία σε κάθε σύνολο και τα σύνολα είναι ίσα
- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3| = 100+100+100-100-100-100+100=100$

Ασκήσεις (8)

- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία στο $A1$, 1000 στο $A2$ και 10.000 στο $A3$ αν $A1 \subseteq A2$ και $A2 \subseteq A3$

- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3| = 100+1000+10000-100-100-1000+100 = 10000$

- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία στο $A1$, 1000 στο $A2$ και 10,000 στο $A3$ αν τα σύνολα είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους

- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3| = 100+1000+10000-0-0-0+0 = 11100$

Ασκήσεις (9)

- Βρείτε τον πληθάριθμο του συνόλου $A1 \cup A2 \cup A3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία στο $A1$, 1000 στο $A2$ και 10,000 στο $A3$ και υπάρχουν 2 στοιχεία κοινά σε κάθε ζεύγος συνόλων και κανένα στοιχείο δεν ανήκει και στα 3 σύνολα

- $|A1 \cup A2 \cup A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - |A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A3|$ $= 100+1000+10000-2-2-2+0 = 11100-6 = 11094$

Ασκήσεις (10)

- Υπάρχουν 2504 φοιτητές σε ένα Τμήμα. Από αυτούς, 1876 παρακολουθούν Java, 999 Linux και 345 γλώσσα προγραμματισμού C.
- Επιπλέον, 876 παρακολουθούν Java και Linux, 231 Linux και C και 290 Java και C.
- Αν 189 από τους φοιτητές αυτούς παρακολουθούν και τα 3 μαθήματα, πόσοι από τους 2504 φοιτητές δεν παρακολουθούν κανένα από τα 3 μαθήματα;

- A: φοιτητές που παρακολουθούν Java
- B: φοιτητές που παρακολουθούν Linux
- C: φοιτητές που παρακολουθούν C
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$ $1876+999+345-876-231-290+189 = 2012$
- Το ζητούμενο πλήθος είναι 2504-2012=492

Ασκήσεις (11)

- Έρευνα σε 270 φοιτητές έδειξε ότι σε 64 αρέσει το λάχανο, σε 94 το μπρόκολο, σε 58 το κουνουπίδι, σε 26 και το λάχανο και το μπρόκολο, σε 28 και το λάχανο και το κουνουπίδι, σε 22 και το μπρόκολο και το κουνουπίδι και σε 14 αρέσουν και τα 3 λαχανικά.
- Σε πόσους από τους 270 φοιτητές δεν αρέσει κανένα από τα 3 λαχανικά;

- A: φοιτητές που προτιμούν λάχανο
- B: φοιτητές που προτιμούν μπρόκολο
- C: φοιτητές που προτιμούν κουνουπίδι
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
  $64+94+58-26-28-22+14=154$
- Το ζητούμενο πλήθος είναι 270-154=116

Ασκήσεις (12)

- Πόσοι φοιτητές παρακολουθούν κάποιο από τα μαθήματα άλγεβρα, διακριτά μαθηματικά, δομές δεδομένων ή αλγόριθμους αν σε κάθε μάθημα έχουν αντίστοιχα γραφτεί 507, 292, 312 και 344 φοιτητές, 14 σε άλγεβρα και δομές δεδομένων, 213 σε άλγεβρα και αλγόριθμους, 211 σε διακριτά και δομές δεδομένων, 43 σε διακριτά και αλγόριθμους και κανένας φοιτητής δεν μπορεί να δηλώσει ταυτόχρονα άλγεβρα και διακριτά μαθηματικά ή δομές δεδομένων και αλγόριθμους;

- A: φοιτητές που παρακολουθούν άλγεβρα
- B: φοιτητές που παρακολουθούν διακριτά μαθηματικά
- C: φοιτητές που παρακολουθούν δομές δεδομένων
- D: φοιτητές που παρακολουθούν αλγόριθμους
- $|A\cup B\cup C\cup D|=|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|B\cap C\cap D|+|A\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D| =$ $507+292+312+344-0-14-213-211-43-0+0-0= 974$

Ασκήσεις (13)

- Βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 και δεν διαιρούνται με 5 ή με 7

- A: σύνολο θετικών ακεραίων $\leq$ 100 που διαιρούνται με 5
  - $|A|=20$
- B: σύνολο θετικών ακεραίων $\leq$ 100 που διαιρούνται με 7
  - $|B|=14$
- $A \cap B$: σύνολο θετικών ακεραίων $\leq$ 100 που διαιρούνται και με 5 και με 7
  - $|A \cap B|=2$
- $\Rightarrow$ Οι θετικοί ακέραιοι $\leq$ 100 που διαιρούνται με 5 ή με 7 είναι: $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B| = 20+14-2=32$
- Το ζητούμενο πλήθος είναι 101-32=69

Ασκήσεις (14)

- Βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 και είναι περιττοί ή τετράγωνο κάποιου ακεραίου

- A: θετικοί περιττοί ακέραιοι ≤ 100
- B: θετικοί ακέραιοι ≤ 100 που είναι τετράγωνο κάποιου ακεραίου
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50+11-5 = 56$

Ασκήσεις (15)

- Βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 και είναι τετράγωνο ή κύβος κάποιου ακεραίου

- A: θετικοί ακέραιοι $\leq$ 1000 που είναι τετράγωνο κάποιου ακεραίου
- B: θετικοί ακέραιοι $\leq$ 1000 που είναι κύβος κάποιου ακεραίου
- $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|=32+11-4=39$

x	x*x	x*x*x
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000
11	121	1331
12	144	1728
13	169	2197
14	196	2744
15	225	3375
16	256	4096
17	289	4913
18	324	5832
19	361	6859
20	400	8000
21	441	9261
22	484	10648
23	529	12167
24	576	13824
25	625	15625
26	676	17576
27	729	19683
28	784	21952
29	841	24389
30	900	27000
31	961	29791
32	1024	32768

Ασκήσεις (16)

- Πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 δεν περιέχουν 6 συνεχόμενα 0;

- A: Οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 είναι 2^8
- B: Οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 που περιέχουν ακριβώς 6 συνεχόμενα 0 είναι 5
  - 00000011, 00000010, 11000000, 01000000, 10000001
- C: Οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 που περιέχουν ακριβώς 7 συνεχόμενα 0 είναι 2
  - 00000001,10000000
- D: Οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 8 που περιέχουν ακριβώς 8 συνεχόμενα 0 είναι 1
  - 00000000
- Το ζητούμενο πλήθος είναι: |A|-|B|-|C|-|D|=256-5-2-1=248

Ασκήσεις (17)

- Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου δεν περιέχουν καμία από τις λέξεις fish, rat ή bird;

- A: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου είναι 26!
- B: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τη λέξη fish είναι (26-4+1)!=23!
- C: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τη λέξη rat είναι (26-3+1)!=24!
- D: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τη λέξη bird είναι (26-4+1)!=23!
- B∩C: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τις λέξεις fish και rat είναι (26-7+2)!=21!
- B∩D: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τις λέξεις fish και bird είναι 0 (αφού το i είναι διαθέσιμο μόνο 1 φορά)
- C∩D: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τις λέξεις rat και bird είναι 0 (αφού το r είναι διαθέσιμο μόνο 1 φορά)
- B∩C∩D: Οι μεταθέσεις 26 γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου που περιέχουν τις λέξεις fish, rat και bird είναι 0 (αφού τα i και r είναι διαθέσιμα μόνο από 1 φορά)
- Το ζητούμενο πλήθος είναι |A|-|B∪C∪D|=26!-24!-2*23!+21!

Ασκήσεις (18)

- Πόσες μεταθέσεις των 10 ψηφίων έχουν μία από τις παρακάτω μορφές:
  - ξεκινάνε με τα ψηφία 987
  - περιέχουν τα ψηφία 45 στην 5η και 6η θέση
  - καταλήγουν με τα ψηφία 123;

- A: μεταθέσεις που ξεκινάνε με 987
  - $|A|=7!$
- B: μεταθέσεις που περιέχουν τα ψηφία 45 στις θέσεις 5 και 6, αντίστοιχα
  - $|B|=8!$
- C: μεταθέσεις που καταλήγουν σε 123
  - $|C|=7!$
- $A\cap B$: μεταθέσεις που ξεκινάνε με 987 και έχουν τα ψηφία 45 στις θέσεις 5 και 6
  - $|A\cap B|=5!$
- $A\cap C$: μεταθέσεις που ξεκινάνε με 987 και καταλήγουν σε 123
  - $|A\cap C|=4!$
- $B\cap C$: μεταθέσεις που καταλήγουν σε 123 και έχουν τα ψηφία 45 στις θέσεις 5 και 6
  - $|B\cap C|=5!$
- $A\cap B\cap C$: μεταθέσεις που ξεκινάνε με 987, καταλήγουν σε 123 και έχουν τα ψηφία 45 στις θέσεις 5 και 6
  - $|A\cap B\cap C|=2!=2$
- Το ζητούμενο πλήθος είναι: $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=7!+8!+7!-5!-4!-5!+2 = 8!+2*7! -2*5! -4! +2 = 50138$

Ασκήσεις (19)

- Πόσα στοιχεία υπάρχουν στην ένωση 4 συνόλων αν κάθε σύνολο έχει 100 στοιχεία, υπάρχουν 50 στοιχεία κοινά σε κάθε ζεύγος συνόλων, υπάρχουν 25 στοιχεία κοινά σε κάθε τριάδα συνόλων και 5 στοιχεία ανήκουν και στα 4 σύνολα;

- $|A\cup B\cup C\cup D|=|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|B\cap C\cap D|+|A\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|=$ $400-300+100-5=195$

Ασκήσεις (20)

- Πόσα στοιχεία υπάρχουν στην ένωση 4 συνόλων αν τα σύνολα έχουν 50, 60, 70 και 80 στοιχεία, αντίστοιχα, υπάρχουν 5 στοιχεία κοινά σε κάθε ζεύγος συνόλων, υπάρχει 1 στοιχείο κοινό σε κάθε τριάδα συνόλων και κανένα στοιχείο δεν ανήκει και στα 4 σύνολα;

- $|A \cup B \cup C \cup D| = |A|+|B|+|C|+|D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| + |A \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| =$ $260-30+4-0=234$

Ασκήσεις (21)

- Πόσοι όροι υπάρχουν στον τύπο για τον υπολογισμό με χρήση της Αρχής Εγκλεισμού- Αποκλεισμού του πλήθους των στοιχείων στην ένωση 10 συνόλων;
- Τα ίδια τα σύνολα είναι C(10,1)=10
- Οι τομές ζευγών συνόλων είναι C(10,2)=45 όροι
- Οι τομές τριάδων συνόλων είναι C(10,3)=120 όροι
- Οι τομές τετράδων συνόλων είναι C(10,4)=210 όροι
- Οι τομές πεντάδων συνόλων είναι C(10,5)=252 όροι
- Οι τομές εξάδων συνόλων είναι C(10,6)=C(10,4)=210 όροι
- Οι τομές επτάδων συνόλων είναι C(10,7)=C(10,3)=120 όροι
- Οι τομές οκτάδων συνόλων είναι C(10,8)=C(10,2)=45 όροι
- Οι τομές εννιάδων συνόλων είναι C(10,9)=C(10,1)=10 όροι
- Η τομή και των δέκα συνόλων είναι C(10,10)=1 όρος
- Συνολικά, ο τύπος έχει 2*(10+45+120+210)+252+1=1023 όρους

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Ασκήσεις (22)

- Έστω 3 ενδεχόμενα $E1$, $E2$ και $E3$ από ένα δειγματοχώρο S
- Δώστε τύπο για τον υπολογισμό της πιθανότητας του ενδεχομένου $E1 \cup E2 \cup E3$

- $p(E1 \cup E2 \cup E3)=p(E1)+p(E2)+p(E3)-p(E1 \cap E2)-p(E1 \cap E3)-p(E2 \cap E3)+p(E1 \cap E2 \cap E3)$

Ασκήσεις (23)

- Βρείτε την πιθανότητα όταν ρίχνουμε 5 φορές ένα δίκαιο νόμισμα να ρθουν γράμματα ακριβώς 3 φορές, την πρώτη και την τελευταία φορά να ρθουν γράμματα ή τη δεύτερη και την τέταρτη φορά να ρθει κορώνα

- p(E1): πιθανότητα όταν ρίχνουμε 5 φορές ένα δίκαιο νόμισμα να ρθουν γράμματα ακριβώς 3 φορές
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 3 από τις 5 φορές; C(5,3)=10
  - Πόσα είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορώ να πάρω αν ρίξω το νόμισμα 5 φορές; 2^5
  - Επομένως, p(E1)=10/32=5/16
- p(E2): πιθανότητα όταν ρίχνουμε 5 φορές ένα δίκαιο νόμισμα να ρθουν γράμματα την πρώτη και την τελευταία φορά
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να πάρω γράμματα την πρώτη και την πέμπτη φορά; 2^3
  - Πόσα είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορώ να πάρω αν ρίξω το νόμισμα 5 φορές; 2^5
  - Επομένως, p(E2)=8/32=1/4
- p(E2): πιθανότητα όταν ρίχνουμε 5 φορές ένα δίκαιο νόμισμα να ρθει κορώνα τη δεύτερη και την τέταρτη φορά
  - Με πόσους τρόπους μπορώ να πάρω κορώνα τη δεύτερη και την τέταρτη φορά; 2^3
  - Πόσα είναι όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορώ να πάρω αν ρίξω το νόμισμα 5 φορές; 2^5
  - Επομένως, p(E3)=8/32=1/4

Ασκήσεις (24)

- Βρείτε την πιθανότητα όταν ρίχνουμε 5 φορές ένα δίκαιο νόμισμα να ρθουν γράμματα ακριβώς 3 φορές, την πρώτη και την τελευταία φορά να ρθουν γράμματα ή τη δεύτερη και την τέταρτη φορά να ρθει κορώνα

- $p(E1 \cap E2)=3/32$
- $p(E1 \cap E3)=1/32$
- $p(E2 \cap E3)=2/32$
- $p(E1 \cap E2 \cap E3)=1/32$

- Συνολικά:
- $p(E1 \cup E2 \cup E3)=p(E1)+p(E2)+p(E3)-p(E1 \cap E2)-p(E1 \cap E3)-p(E2 \cap E3)+p(E1 \cap E2 \cap E3)=5/16+1/4+1/4-3/32-1/32-2/32+1/32=21/32=0{,}65625$