(0, 0) προς το $(n + 1, r)$ είναι ίσο με $\binom{n+1+r}{r}$. Δεύτερον, απαριθμούμε το πλήθος των διαδρομών με άθροιση του πλήθους των διαδρομών που ξεκινούν με κίνηση k μονάδων προς τα επάνω για k = 0, 1, 2, . . . , r.]

38. Να δοθεί συνδυαστική απόδειξη ότι, αν ο n είναι θετικός ακέραιος τότε $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}+n2^{n-1}$. [*Υπόδειξη:* Να δειχτεί ότι και τα δύο μέλη απαριθμούν τους τρόπους επιλογής υποσυνόλου ενός συνόλου με n στοιχεία μαζί με δύο όχι απαραίτητα διακριτά στοιχεία από αυτό το υποσύνολο. Επιπλέον, να εκφραστεί το δεξιό μέλος σαν $n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}$.]

***39.** Να καθοριστεί τύπος με διωνυμικούς συντελεστές για τον όρο τάξης n ακολουθίας αν οι αρχικοί όροι της είναι οι όροι που αναφέρονται παρακάτω. [*Υπόδειξη:* Μια ματιά στο τρίγωνο του Pascal θα βοηθήσει. Αν και άπειρες ακολουθίες αρχίζουν με καθορισμένο σύνολο όρων, η καθεμιά από τις παρακάτω λίστες είναι η αρχή ακολουθίας του είδους που θέλουμε.]

a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...
b) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 230, ...
c) 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, ...
d) 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, ...
e) 1, 1, 1, 3, 1, 5, 15, 35, 1, 9, ...
f) 1, 3, 15, 84, 495, 3003, 18564, 116280, 735471, 4686825, ...

4.5 Γενικευμένες Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης, μπορεί τα στοιχεία να χρησιμοποιούνται με επαναλήψεις. Για παράδειγμα, ένα γράμμα ή ένα ψηφίο ίσως χρησιμοποιείται περισσότερες από μια φορές σε πινακίδα κυκλοφορίας αυτοκινήτου. Οταν επιλέγουμε δώδεκα λουκουμάδες, κάθε ποικιλία ίσως επιλέγεται επανειλημμένα. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα προβλήματα απαρίθμησης που εξετάσαμε παραπάνω στο κεφάλαιο, όπου μελετήσαμε μόνο τις μεταθέσεις και τους συνδυασμούς όπου κάθε αντικείμενο μπορούσε να χρησιμοποιηθεί το πολύ μια φορά. Στην Παράγραφο αυτή θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο λύνουμε προβλήματα απαρίθμησης όπου τα στοιχεία χρησιμοποιούνται περισσότερες από μια φορές.

Ακόμη, κάποια προβλήματα απαρίθμησης αφορούν σε στοιχεία που δεν μπορούν να αντιδιασταλλούν. Για παράδειγμα, για να απαριθμηθεί το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν να αναδιαταχθούν τα γράμματα της λέξης *SUCCESS*, θα πρέπει να εξεταστεί η τοποθέτηση ίδιων γραμμάτων. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα προβλήματα απαρίθμησης που εξετάσαμε παραπάνω, όπου όλα τα στοιχεία θεωρούνταν ότι μπορούσαν να αναγνωριστούν. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο λύνουμε προβλήματα απαρίθμησης όπου κάποια στοιχεία δεν μπορούν να διαχωριστούν.

Επιπλέον, στην παράγραφο αυτή θα εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο λύνουμε μια άλλη σημαντική τάξη προβλημάτων απαρίθμησης, δηλ., τα προβλήματα που αφορούν σε απαρίθμηση των τρόπων τοποθέτησης σε κουτιά στοιχείων που μπορούν να διαχωριστούν. Ενα παράδειγμα αυτού του είδους προβλήματος είναι το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν φύλλα της τράπουλας σε παίκτες του παιχνιδιού πόκερ.

Ολες μαζί οι μέθοδοι που περιγράψαμε παραπάνω στο κεφάλαιο αυτό και οι μέθοδοι που παρουσιάζουμε στην παράγραφο αυτή αποτελούν ένα χρήσιμο οπλοστάσιο για λύση μιάς μεγάλης σειράς προβλημάτων απαρίθμησης. Οταν στο οπλοστάσιο αυτό προστεθούν οι επιπλέον μέθοδοι που εξετάζονται στο Κεφάλαιο 6, θα μπορούμε να λύνουμε ένα μεγάλο ποσοστό των προβλημάτων απαρίθμησης που εμφανίζονται σε μια μεγάλη περιοχή τομέων μελέτης.

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

Οπως δείχνει το Παράδειγμα 1, η απαρίθμηση μεταθέσεων όταν επιτρέπεται η επανάληψη στοιχείων γίνεται εύκολα με χρήση του κανόνα γινομένου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Πόσες συμβολοσειρές μήκους n σχηματίζονται από το Λατινικό αλφάβητο;

Λύση: Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, επειδή υπάρχουν 26 γράμματα, και επειδή αυτά τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν επανειλημμένα, βλέπουμε ότι υπάρχουν 26^n συμβολοσειρές μήκους n.

Στο Θεώρημα 1 δίνεται το πλήθος των μεταθέσεων r συνόλου με n στοιχεία όταν επιτρέπεται η επανάληψη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Το πλήθος των μεταθέσεων r συνόλου με n αντικείμενα, με την επανάληψη να επιτρέπεται, είναι n^r.

Απόδειξη: Υπάρχουν n τρόποι επιλογής στοιχείου συνόλου για κάθε μια από τις r θέσεις στην μετάθεση r όταν επιτρέπεται η επανάληψη, επειδή για κάθε επιλογή υπάρχουν και τα n αντικείμενα. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου υπάρχουν n^r μεταθέσεις r όταν επιτρέπεται η επανάληψη.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Εξετάζουμε τα παρακάτω παραδείγματα συνδυασμών όταν επιτρέπεται η επανάληψη στοιχείων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή τεσσάρων φρούτων από μια πιατέλλα με μήλα, πορτοκάλια, και αχλάδια αν δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία επιλέγονται, έχει σημασία μόνο το είδος του φρούτου και όχι κάθε κομμάτι, και αν στην πιατέλλα υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα φρούτα από κάθε είδος;

Λύση: Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα καταγράφουμε όλους τους τρόπους επιλογής φρούτων. Υπάρχουν 15 τρόποι:

4 μήλα	4 πορτοκάλια	4 αχλάδια
3 μήλα, 1 πορτοκάλι	3 μήλα, 1 αχλάδι	3 πορτοκάλια, 1 μήλο
3 πορτοκάλια, 1 αχλάδι	3 αχλάδια, 1 μήλο	3 αχλάδια, 1 πορτοκάλι
2 μήλα, 2 πορτοκάλια	2 μήλα, 2 πορτοκάλια	2 πορτοκάλια, 2 αχλάδια
2 μήλα, 1 πορτοκάλι, 1 αχλάδι	2 πορτοκάλια, 1 μήλο, 1 αχλάδι	2 αχλάδια, 1 μήλο, 1 πορτοκάλι

Η λύση είναι το πλήθος των συνδυασμών 4 με επανάληψη από σύνολο με τρία στοιχεία, {*μήλο*, *πορτοκάλι*, *αχλάδι*}.

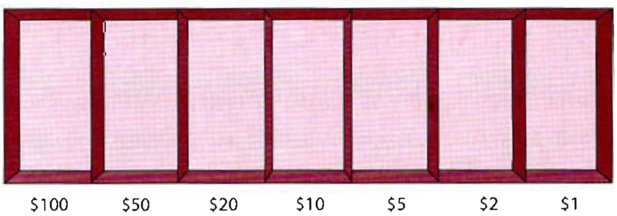
Για να λύνουμε περισσότερο πολύπλοκα προβλήματα απαρίθμησης αυτού του είδους, χρειαζόμαστε μια γενική μέθοδο απαρίθμησης των συνδυασμών r σε σύνολο με n στοιχεία. Στο Παράδειγμα 3 θα δείξουμε μια παρόμοια μέθοδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

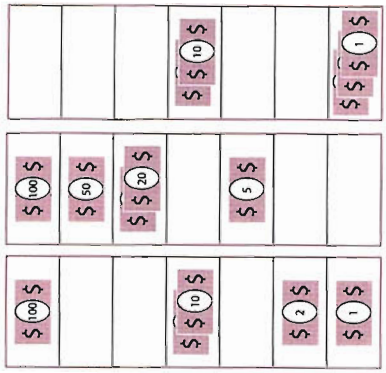
Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή πέντε χαρτονομισμάτων από συρτάρι ταμείου που περιέχει χαρτονομίσματα των 1 \$, 2 \$, 5 \$, 10 \$, 20 \$, 50 \$, και 100 \$; Θεωρούμε ότι δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής των χαρτονομισμάτων, ότι τα χαρτονομίσματα ίδιας αξίας δεν ξεχωρίζουν, και ότι υπάρχουν τουλάχιστο πέντε χαρτονομίσματα κάθε είδους.

Λύση: Επειδή δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής των χαρτονομισμάτων και μπορούν να επιλεγούν επτά διαφορετικά είδη χαρτονομισμάτων μέχρι πέντε φορές, το πρόβλημα αυτό αφορά σε απαρίθμηση συνδυασμών 5 με επανάληψη από σύνολο με επτά στοιχεία. Η καταγραφή όλων των δυνατοτήτων θα ήταν κουραστική, επειδή υπάρχει μεγάλο πλήθος λύσεων. Αντίθετα, θα δείξουμε την χρήση μιάς τεχνικής απαρίθμησης συνδυασμών με επανάληψη.

Εστω ότι ένα συρτάρι ταμείου έχει επτά χώρους, έναν για κάθε είδος χαρτονομίσματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Οι χώροι αυτοί οριοθετούνται με έξη χωρίσματα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επιλογή των πέντε χαρτονομισμάτων αντιστοιχεί με τοποθέτηση πέντε ενδείξεων στους χώρους που περιέχουν τα διαφορετικά είδη χαρτονομισμάτων. Στο Σχήμα 2 φαίνεται αυτή η αντιστοιχία για επιλογή πέντε χαρτο-



ΣΧΗΜΑ 1 Συρτάρι Ταμείου με Επτά Είδη χαρτονομισμάτων.



| | | * * | | | * * *

* | * | * * | | * | |

* | | | * * | | * | *

ΣΧΗΜΑ 2 Παραδείγματα Τρόπων Επιλογής Πέντε Χαρτονομισμάτων

νομισμάτων με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπου τα έξη χωρίσματα παριστάνονται με γραμμές και τα πέντε χαρτονομίσματα με αστέρια.

Το πλήθος των τρόπων επιλογής πέντε χαρτονομισμάτων αντιστοιχεί στο πλήθος των τρόπων διάταξης έξη γραμμών και πέντε αστεριών. Κατά συνέπεια, το πλήθος των τρόπων επιλογής πέντε χαρτονομισμάτων είναι το πλήθος των τρόπων επιλογής των θέσεων των πέντε άστρων, από 11 δυνατές θέσεις. Αυτό αντιστοιχεί με το πλήθος των μη διατεταγμένων επιλογών 5 αντικειμένων από σύνολο 11 αντικειμένων, το οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί με $C(11, 5)$ τρόπους. Κατά συνέπεια, υπάρχουν

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!6!} = 462$$

τρόποι επιλογής πέντε χαρτονομισμάτων από συρτάρι ταμείου που περιέχει επτά είδη χαρτονομισμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Υπάρχουν $C(n+r-1, r)$ συνδυασμοί r από σύνολο με n στοιχεία όταν επιτρεπεται η επανάληψη στοιχείων.

Απόδειξη: Κάθε συνδυασμός r συνόλου με n στοιχεία όταν επιτρέπεται η επανάληψη μπορεί να παρασταθεί με κατάλογο $n-1$ γραμμών και r αστεριών. Οι $n-1$ γραμμές χρησιμοποιούνται για να ξεχωρίζουν n διαφορετικά κελλιά, όπου το κελλί τάξης i περιέχει ένα αστέρι κάθε φορά που το στοιχείο του συνόλου τάξης i εμφανίζεται στον συνδυασμό. Για παράδειγμα, συνδυασμός 6 συνόλου με τέσσερα στοιχεία, παριστάνεται με τρεις γραμμές και έξη αστέρια. Εδώ το

* * | * | | * * *

παριστάνει τον συνδυασμό που περιέχει δύο από το πρώτο στοιχείο, ένα από το δεύτερο στοιχείο, κανένα από το τρίτο στοιχείο, και τρία από το τέταρτο στοιχείο του συνόλου.

Οπως είδαμε, κάθε διαφορετική λίστα που περιέχει $n-1$ γραμμές και r αστέρια αντιστοιχεί σε συνδυασμό r του συνόλου με n στοιχεία, όταν επιτρέπεται η επανάληψη. Το πλήθος αυτών των καταλόγων είναι $C(n-1+r, r)$, επειδή κάθε λίστα αντιστοιχεί σε επιλογή των r θέσεων για τοποθέτηση των r αστεριών από τις $n-1+r$ θέσεις που περιέχουν r αστέρια και $n-1$ γραμμές.

Τα Παραδείγματα 4-7 δείχνουν τον τρόπο εφαρμογής του Θεωρήματος 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Εστω ότι ένα κατάστημα με ζαχαρωτά έχει τέσσερα διαφορετικά είδη ζαχαρωτών. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν έξη ζαχαρωτά; Θεωρούμε ότι έχει σημασία μόνο το είδος των ζαχαρωτών, και όχι κάθε ζαχαρωτό ή η σειρά με την οποία επιλέγονται.

Λύση: Το πλήθος των τρόπων για επιλογή έξη ζαχαρωτών είναι το πλήθος των συνδυασμών 6 συνόλου με τέσσερα στοιχεία. Από το Θεώρημα 2 αυτό είναι ίσο με $C(4+6-1,6)=C(9,6)$. Επειδή

$$C(9,6)=C(9,3)=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84$$

υπάρχουν 84 διαφορετικοί τρόποι επιλογής των έξη ζαχαρωτών.

Το Θεώρημα 2 χρησιμοποιείται και για να βρεθεί το πλήθος των λύσεων ορισμένων γραμμικών εξισώσεων, όπου οι μεταβλητές είναι ακέραιοι που υπόκεινται σε περιορισμούς. Αυτό φαίνεται στο Παράδειγμα 5.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση

$$x_1+x_2+x_3=11,$$

όπου οι x_1, x_2, και x_3 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι;

Λύση: Για να αριθμήσουμε το πλήθος των λύσεων, παρατηρούμε ότι μια λύση αντιστοιχεί σε τρόπο επιλογής 11 αντικειμένων από σύνολο με τρία στοιχεία, έτσι ώστε να επιλέγονται x_1 αντικείμενα από το πρώτο είδος, x_2 αντικείμενα από το δεύτερο είδος, και x_3 αντικείμενα από το τρίτο είδος. Αρα το πλήθος των λύσεων θα είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών 11 με επανάληψη, από σύνολο με τρία στοιχεία. Από το Θεώρημα 2 έπεται ότι θα υπάρχουν

$$C(3+11-1,11)=C(13,11)=C(13,2)=\frac{13\cdot 12}{1\cdot 2}=78$$

λύσεις.

Μπορούμε να βρούμε το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης και όταν οι μεταβλητές υπόκεινται σε περιορισμούς. Για παράδειγμα, μπορούμε να βρούμε το πλήθος των λύσεων όπου οι μεταβλητές είναι ακέραιοι με $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, και $x_3 \geq 3$. Λύση της εξίσωσης που υπόκειται στους περιορισμούς αυτούς αντιστοιχεί σε επιλογή 11 αντικειμένων με x_1 αντικείμενα του πρώτου είδους, x_2 αντικείμενα του δεύτερου είδους, και x_3 αντικείμενα του τρίτου είδους, όπου, επιπλέον, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο του πρώτου είδους, τουλάχιστον δύο αντικείμενα του δεύτερου είδους, και τρία τουλάχιστον αντικείμενα του τρίτου είδους. Ετσι, επιλέγουμε ένα αντικείμενο του πρώτου είδους, δύο αντικείμενα του δεύτερου είδους, και τρία αντικείμενα του τρίτου είδους. Υστερα επιλέγουμε πέντε επιπλέον αντικείμενα. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2 αυτό μπορεί να γίνει με

$$C(3+5-1,5)=C(7,5)=C(7,2)=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21$$

τρόπους. Ετσι, υπάρχουν 21 λύσεις της εξίσωσης που υπόκειται στους περιορισμούς που δόθηκαν.

Υπάρχει αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ συνδυασμών *r* από σύνολο με *n* στοιχεία όταν επιτρέπεται επανάληψη, και των τρόπων τοποθέτησης *r* σφαιρών που δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους σε *n* δοχεία που ξεχωρίζουν μεταξύ τους. Για να θεμελειώνουμε αυτή την αντιστοιχία, τοποθετούμε μια σφαίρα στο δοχείο τάξης *i* κάθε φορά που το στοιχείο τάξης *i* του συνόλου περιλαμβάνεται στον συνδυασμό *r*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για τοποθέτηση δέκα σφαιρών που δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους σε οκτώ διακεκριμένα δοχεία;

Λύση: Το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης δέκα σφαιρών που δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους σε οκτώ διακρίσιμα δοχεία είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών 10 από σύνολο με οκτώ στοιχεία όταν επιτρέπεται η επανάληψη. Κατά συνέπεια, υπάρχουν

$$C(8+10-1,10)=C(17,10)=\frac{17!}{10!7!}=19.448.$$

Το Παράδειγμα 7 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται η απαρίθμηση του πλήθους συνδυασμών με επανάληψη, στον καθορισμό της τιμής μεταβλητής που αυξάνεται κάθε φορά που εκτελείται ένα ορισμένο είδος εμφωλευμένου βρόχου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Ποιά θα είναι η τιμή του *k* μετά την εκτέλεση του παρακάτω ψευδοκώδικα;

```
k =: 0
for i_1 := 1 to n
for i_2:= 1 to i_1
      .
      .
      .
      for i_m:=1 to i_{m-1}
          k:=k+1
```

Λύση: Παρατηρούμε ότι η αρχική τιμή του k είναι 0 και ότι κάθε φορά που εκτελείται ο εμφωλευμένος βρόχος με ακολουθία ακέραιων $i_1, i_2, \ldots, i_m$ προστίθεται το 1 έτσι ώστε να είναι

$$1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq \cdots \leq i_1 \leq n.$$

Το πλήθος αυτών των ακολουθιών ακέραιων είναι το πλήθος των τρόπων *επιλογής* m ακέραιων από το $\{1, 2, \ldots, n\}$ με επανάληψη. (Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι όταν επιλεγεί παρόμοια ακολουθία, αν διατάξουμε τους ακέραιους της ακολουθίας σε μη φθίνουσα σειρά, το γεγονός αυτό ορίζει με μοναδικό τρόπο ανάθεση των $i_m, i_{m-1}, \cdots, i_1$. Αντίστροφα, κάθε παρόμοια ανάθεση αντιστοιχεί σε μοναδικό μη διατεταγμένο σύνολο.) Συνεπώς, από το Θεώρημα 2, έπεται ότι, μετά την εκτέλεση του κώδικα, $k=C(n+m-1, m)$.

Στον Πίνακα 1 φαίνονται οι τύποι για τα πλήθη διατεταγμένων και μη διατεταγμένων επιλογών r στοιχείων, που έχουν διαλεχθεί με επανάληψη και χωρίς επανάληψη από σύνολο με n στοιχεία.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 Συνδυασμοί και Μεταθέσεις με και χωρίς Επανάληψη

Είδος	*Επιτρέπεται Επανάληψη;*	*Τύπος*
Μεταθέσεις r	Οχι	$\frac{n!}{(n-r)!}$
Συνδυασμοί r	Οχι	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
Μεταθέσεις r	Ναι	n^r
Συνδυασμοί r	Ναι	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΜΕ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΠΟΥ ΔΕΝ ΞΕΧΩΡΙΖΟΥΝ

Σε προβλήματα απαρίθμησης, κάποια αντικείμενα ίσως δεν μπορούν να αντιδιασταλλούν. Οταν έχουμε κάτι παρόμοιο, θα πρέπει να φροντίζουμε να αποφεύγουμε την απαρίθμηση πραγμάτων περισσότερες από μια φορές. Εστω ότι έχουμε το Παράδειγμα 8.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να κατασκευαστούν με αναδιάταξη των γραμμάτων της λέξης

SUCCESS;

Λύση: Επειδή κάποια από τα γράμματα της λέξης *SUCCESS* είναι ίδια, η απάντηση δεν δίνεται από το πλήθος των μεταθέσεων επτά γραμμάτων. Η λέξη αυτή περιέχει τρία *S*, δύο *C*, ένα *U*, και ένα *E*. Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των διαφορετικών συμβολοσειρών που μπορούν να κατασκευαστούν με αναδιάταξη των γραμμάτων, πρώτα παρατηρούμε ότι τα τρία *S* μπορούν να τοποθετηθούν μεταξύ των επτά θέσεων με $C(7, 3)$ διαφορετικούς τρόπους, αφήνοντας ελεύθερες τέσσερεις θέσεις. Υστερα, μπορούν να τοποθετηθούν τα δύο *C* με $C(4, 2)$ τρόπους, αφήνοντας δύο ελεύθερες θέσεις. Το *U* μπορεί να τοποθετηθεί με $C(2, 1)$ τρόπους, αφήνοντας μόνο μια θέση ελεύθερη. Συνεπώς το *E* μπορεί να τοποθετηθεί με $C(1, 1)$ τρόπο. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, το πλήθος των διαφορετικών συμβολοσειρών που μπορούν να κατασκευαστούν θα είναι

$$C(7,3)C(4,2)C(2,1)C(1,1)=\frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{1!}{1!0!}=\frac{7!}{3!2!1!1!}=420.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 3 με χρήση των ίδιων λογικών σκέψεων όπως στο Παράδειγμα 8.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων n αντικειμένων, όπου υπάρχουν n_1 αντικείμενα είδους 1 που δεν ξεχωρίζουν, n_2 αντικείμενα είδους 2 που δεν ξεχωρίζουν, . . . , και n_k αντικείμενα είδους k που δεν ξεχωρίζουν, είναι

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Απόδειξη: Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των μεταθέσεων, πρώτα παρατηρούμε ότι τα n_1 αντικείμενα είδους 1 μπορούν να τοποθετηθούν μεταξύ των n θέσεων με $C(n, n_1)$ τρόπους, αφήνοντας $n-n_1$ ελεύθερες θέσεις. Τότε τα αντικείμενα του είδους 2 μπορούν να τοποθετηθούν με $C(n-n_1, n_2)$ τρόπους, αφήνοντας $n-n_1-n_2$ ελεύθερες θέσεις. Συνεχίζουμε με τοποθέτηση των αντικειμένων είδους 3, . . . , είδους $k-1$, μέχρι που στο τελευταίο στάδιο να τοποθετηθούν n_k αντικείμενα είδους k με $C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}, n_k)$ τρόπους. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, το συνολικό πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων θα είναι

$$C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-\cdots-n_{k-1},n_k)$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΣΕ ΚΟΥΤΙΑ

Κάποια προβλήματα απαρίθμησης λύνονται με απαρίθμηση των τρόπων με τους οποίους διακεκριμένα αντικείμενα τοποθετούνται σε κουτιά διακεκριμένα. Θα εξετάσουμε το παρακάτω παράδειγμα όπου τα αντικείμενα είναι χαρτιά τράπουλας και τα "κουτιά" είναι τα χέρια των παικτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για διανομή 5 χαρτιών σε καθέναν από τέσσερεις παίκτες από συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά;

Λύση: Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα γινομένου. Στην αρχή, παρατηρούμε ότι ο πρώτος παίκτης μπορεί να πάρει 5 χαρτιά με $C(52, 5)$ τρόπους. Ο δεύτερος παίκτης μπορεί να πάρει 5 χαρτιά με $C(47, 5)$ τρόπους, επειδή έχουν μείνει μόνο 47 χαρτιά. Ο τρίτος παίκτης μπορεί να πάρει 5 χαρτιά με $C(42, 5)$ τρόπους. Τέλος, ο τέταρτος παίκτης μπορεί να πάρει 5 χαρτιά με $C(37, 5)$ τρόπους. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος τρόπων για να πάρουν τέσσερεις παίκτες από 5 χαρτιά θα είναι

$$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5) = \frac{52!}{47!5!}\cdot\frac{47!}{42!5!}\cdot\frac{42!}{37!5!}\cdot\frac{37!}{32!5!} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}.$$

Παρατήρηση: Η λύση του Παραδείγματος 9 είναι ίση με το πλήθος των μεταθέσεων 52 αντικειμένων, με 5 όμοια αντικείμενα από κάθε ένα από τέσσερα διαφορετικά είδη, και 32 αντικείμενα ενός πέμπτου είδους. Μπορούμε να δούμε αυτή την ισότητα αν ορίσουμε αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ μεταθέσεων αυτού του είδους και κατανομών χαρτιών στους παίκτες. Για να ορίσουμε αυτή την αντιστοιχία, πρώτα διατάσσουμε τα χαρτιά από το 1 μέχρι το 52. Τα χαρτιά που μοιράζονται στον πρώτο παίκτη αντιστοιχούν στα χαρτιά των θέσεων που έχουν ανατεθεί σε αντικείμενα του πρώτου είδους στην μετάθεση. Με παρόμοιο τρόπο, τα χαρτιά που μοιράζονται στον δεύτερο, στον τρίτο, και στον τέταρτο παίκτη, αντίστοιχα, αντιστοιχούν σε χαρτιά των θέσεων που έχουν ανατεθεί σε αντικείμενα του δεύτερου, τρίτου, και τέταρτου είδους, αντίστοιχα. Τα χαρτιά που δεν έχουν μοιραστεί σε παίκτες αντιστοιχούν σε χαρτιά στις θέσεις που έχουν ανατεθεί σε αντικείμενα του πέμπτου είδους. Ο αναγνώστης θα πρέπει να επαληθεύσει ότι εδώ πρόκειται για αντιστοιχία ένα-προς-ένα.

Το Παράδειγμα 9 αποτελεί συνηθισμένο πρόβλημα που αφορά σε κατανομή διακεκριμένων αντικειμένων σε διακεκριμένα κουτιά. Τα διακρίσιμα αντικείμενα που είναι τα 52 χαρτιά, και τα πέντε διακρίσιμα κουτιά είναι τα χέρια των τεσσάρων παικτών και το υπόλοιπο της τράπουλας. Τα προβλήματα απαρίθμησης που αφορούν σε κατανομή διακριτών αντικειμένων σε κουτιά λύνονται με το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Το πλήθος των τρόπων κατανομής n διακεκριμένων αντικειμένων σε k διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε n_i αντικείμενα να τοποθετούνται στο κουτί i, $i = 1, 2, \ldots, k$ είναι ίσο με

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Το Θεώρημα 4 αποδεικνύεται με χρήση του κανόνα γινομένου. Αφήνουμε τις λεπτομέρειες σαν Ασκηση 47. Αποδεικνύεται, ακόμη, (βλ. Ασκηση 48) και αν θέσουμε αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ των μεταθέσεων που απαριθμούνται με το Θεώρημα 3 και των τρόπων κατανομής αντικειμένων που απαριθμούνται με το Θεώρημα 4.

Ασκήσεις

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν σε σειρά πέντε αντικείμενα από σύνολο με τρία στοιχεία όταν επιτρέπεται η επανάληψη;

2. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να επιλεγούν σε σειρά πέντε αντικείμενα από σύνολο με πέντε στοιχεία όταν επιτρέπεται η επανάληψη;

3. Πόσες συμβολοσειρές έξη γραμμάτων υπάρχουν;

4. Κάθε μέρα ένας σπουδαστής διαλέγει ένα σάντουιτς για φαγητό από ένα σωρό σάντουιτς με περιτύλιγμα. Αν υπάρχουν έξη είδη σάντουιτς, πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να διαλέγει ο σπουδαστής σάντουιτς για τις επτά ημέρες της εβδομάδας αν έχει σημασία η σειρά με την οποία επιλέγονται τα σάντουιτς;

5. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για ανάθεση τριών εργασιών σε πέντε εργαζόμενους αν σε κάθε εργαζόμενο μπορούν να δοθούν περισσότερες από μια εργασίες;

6. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή πέντε στοιχείων χωρίς σειρά από σύνολο με τρία στοιχεία, όταν επιτρέπεται η επανάληψη;

7. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή τριών στοιχείων χωρίς σειρά από σύνολο με πέντε στοιχεία, όταν επιτρέπεται η επανάληψη;

8. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για επιλογή δώδεκα λουκουμάδων από τις 21 ποικιλίες σε κατάστημα που πουλάει λουκουμάδες;

9. Ενα κατάστημα που πουλάει σάντουιτς έχει σάντουιτς με κρεμμύδι, σάντουιτς με σπόρους παπαρούνας, σάντουιτς με αυγό, αλμυρά σάντουιτς, σάντουιτς σίκαλης, σάντουιτς με σουσάμι, σάντουιτς με σταφίδες, και σκέτα σάντουιτς. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να διαλέξουμε

a) έξη σάντουιτς; **b)** δώδεκα σάντουιτς;

c) είκοσι τέσσερα σάντουιτς;

d) δώδεκα σάντουιτς, στα οποία υπάρχει τουλάχιστον ένα από κάθε είδος;

e) δώδεκα σάντουιτς, εκ των οποίων τουλάχιστον τρία είναι με αυγό ενώ δεν υπάρχουν περισσότερα από δύο αλμυρά σάντουιτς;

10. Ενα κατάστημα που πουλάει κρουασσάν έχει σκέτα κρουασσάν, κρουασσάν με βύσσινο, κρουασσάν με σοκολάτα, κρουασσάν με αμύγδαλο, κρουασσάν με μήλο, και κρουασσάν με μπρόκκολο. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να διαλέξουμε

a) δώδεκα κρουασσάν; **b)** τριάντα έξη κρουασσάν;

c) είκοσι τέσσερα κρουασσάν, στα οποία τουλάχιστον υπάρχουν δύο από κάθε είδος;

d) είκοσι τέσσερα κρουασσάν, εκ των οποίων όχι περισσότερα από δύο κρουασσάν είναι με μπρόκκολο;

e) είκοσι τέσσερα κρουασσάν, εκ των οποίων τουλάχιστον πέντε κρουασσάν είναι με σοκολάτα και τουλάχιστον τρία κρουασσάν με αμύγδαλο;

f) είκοσι τέσσερα κρουασσάν με τουλάχιστον ένα σκέτο κρουασσάν, τουλάχιστο δύο κρουασσάν με βύσσινο, τουλάχιστον τρία κρουασσάν με σοκολάτα, τουλάχιστο ένα κρουασσάν με αμύγδαλο, τουλάχιστο δύο κρουασσάν με μήλο, και όχι περισσότερα από τρία με μπρόκκολο;

11. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή οκτώ κερμάτων από κουμπαρά που περιέχει 100 ίδια κέρματα του 1 λεπτών, και 80 ίδια κέρματα των πέντε λεπτών;

12. Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς κερμάτων του 1 λεπτών, των 5 λεπτών, των δέκα λεπτών, των 25 λεπτών, και μισού ευρώ μπορεί να περιέχει ένας κουμπαράς αν έχει μέσα 20 κέρματα;

13. Ενας εκδότης έχει 3.000 βιβλία ενός βιβλίου διακριτών μαθηματικών. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για αποθήκευση αυτών των βιβλίων σε τρεις αποθήκες αν όλα τα βιβλία είναι τα ίδια;

14. Πόσες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ υπάρχουν, όπου οι x_1, x_2, x_3, και x_4 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι;

15. Πόσες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ υπάρχουν, όπου ο x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, είναι μη αρνητικός ακέραιος, έτσι ώστε να είναι

a) $x_1 \geq 1$; **b)** $x_1 \geq 2$ για $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

c) $0 \leq x_1 \leq 10$; **d)** $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 \leq 4$, και $x_3 \geq 15$;

16. Πόσες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ υπάρχουν, όπου ο x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, είναι μη αρνητικός ακέραιος έτσι ώστε να είναι

a) $x_i > 1$ για $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

b) $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 4$, $x_5 \geq 5$, και $x_6 \geq 6$;

c) $x_1 \leq 5$; **d)** $x_1 < 8$ και $x_2 > 8$;

17. Πόσες συμβολοσειρές 10 τριαδικών ψηφίων (0, 1, ή 2) υπάρχουν που περιέχουν δύο 0, τρία 1, και πέντε 2;

18. Πόσες συμβολοσειρές 20 δεκαδικών ψηφίων υπάρχουν που περιέχουν δύο 0, τέσσερα 1, τρία 2, ένα 3, δύο 4, τρία 5, δύο 7, και τρία 9;

19. Εστω ότι μια μεγάλη οικογένεια έχει 14 παιδιά, μεταξύ των οποίων δύο ομάδες τρίδυμων, τρεις ομάδες δίδυμων, και δύο ακόμη παιδιά. Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε τα παιδιά να κάθονται σε σειρά από καρέκλες, αν τα τρίδυμα ή τα δίδυμα δεν μπορούν να ξεχωρίζουν μεταξύ τους;

20. Πόσες λύσεις της ανισότητας $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ υπάρχουν, όπου οι x_1, x_2, και x_3 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι; (*Υπόδειξη:* Εισάγουμε βοηθητική μεταβλητή x_4, έτσι ώστε να είναι $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.)

21. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για κατανομή έξη διακεκριμένων σφαιρών σε εννέα διακεκριμένες θήκες που ξεχωρίζουν;

22. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για κατανομή 12 διακεκριμένων σφαιρών που σε έξη θήκες που ξεχωρίζουν;

23. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για κατανομή 12 διακεκριμένων αντικειμένων που ξεχωρίζουν σε έξη κουτιά, έτσι ώστε σε κάθε κουτί να είναι τοποθετημένα δύο αντικείμενα;

24. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για κατανομή 15 διακεκριμένων αντικειμένων σε πέντε διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε σε τα κουτιά να περιέχουν ένα, δύο, τρία, τέσσερα, και πέντε αντικείμενα, αντίστοιχα;

25. Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από 1.000.000 έχουν άθροισμα των ψηφίων τους ίσο με 19;

26. Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από 1.000.000 έχουν ένα ψηφίο 9 και άθροισμα ψηφίων ίσο με 13;

27. Σε τελικό διαγώνισμα διακριτών μαθηματικών υπάρχουν 10 ερωτήσεις. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για ανάθεση βαθμολογίας στα προβλήματα αν το άθροισμα της βαθμολογίας είναι 100 και κάθε ερώτηση έχει τουλάχιστο 5 πόντους;

28. Να δειχτεί ότι υπάρχουν $C(n + r - q_1 - q_2 - \cdots q_r - 1, n - q_1 - q_2 - \cdots - q_r)$ διαφορετικές μη διατεταγμένες επιλογές n αντικειμένων r' διαφορετικών ειδών που περιλαμβάνουν τουλάχιστον q_1 αντικείμενα είδους ένα, q_2 αντικείμενα είδους δύο, . . . , και q_r αντικείμενα είδους r.

29. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές bit μπορούν να μεταδοθούν, αν η συμβολοσειρά θα πρέπει να αρχίζει με bit 1, θα πρέπει να περιέχει τρία επιπλέον bit 1 (έτσι ώστε να στέλνονται συνολικά τέσσερα bit 1), θα πρέπει να περιέχει συνολικά δώδεκα bit 0, και θα πρέπει να έχει τουλάχιστο δύο bit 0 μετά από κάθε bit 1;

30. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να κατασκευαστούν από τα γράμματα της λέξης *MISSISSIPPI*, με χρήση όλων των γραμμάτων;

31. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να κατασκευαστούν από τα γράμματα της λέξης *ABRACADABRA*, με χρήση όλων των γραμμάτων;

32. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να κατασκευαστούν από τα γράμματα της λέξης *AARDVARK*, με χρήση όλων των γραμμάτων, αν και τα τρία *A* πρέπει να είναι διαδοχικά;

33. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να κατασκευαστούν από τα γράμματα της λέξης *ORONO*, με χρήση κάποιων ή όλων των γραμμάτων;

34. Πόσες συμβολοσειρές με πέντε ή περισσότερους χαρακτήρες μπορούν να κατασκευαστούν από τα γράμματα της λέξης *SEERESS*;

35. Πόσες συμβολοσειρές με επτά ή περισσότερους χαρακτήρες μπορούν να κατασκευαστούν από τα γράμματα της λέξης *EVERGREEN*;

36. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούν να σχηματιστούν με χρήση έξη 1 και οκτώ 0;

37. Ενας σπουδαστής έχει τρία μάνγκο, δύο παπάγιες, και δύο ακτινίδια. Αν ο σπουδαστής τρώει ένα φρούτο κάθε ημέρα, και μόνο το είδος του φρούτου έχει σημασία, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καταναλωθούν αυτά τα φρούτα;

38. Μια καθηγήτρια μαζεύει την συλλογή της 40 τευχών ενός περιοδικού μαθηματικών σε τέσσερα κιβώτια, με 10 τεύχη ανά κιβώτιο. Με πόσους τρόπους μπορεί να κατανείμει τα περιοδικά αν

a) τα κιβώτια είναι αριθμημένα, έτσι ώστε να ξεχωρίζουν;

b) τα κιβώτια είναι ίδια, έτσι ώστε να μη ξεχωρίζουν

39. Πόσοι τρόποι ταξιδίου υπάρχουν στον χώρο xyz από την αρχή (0, 0, 0) μέχρι το σημείο (4, 3, 5), με βήματα της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση x, της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση y, ή της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση z; (Απαγορεύεται η κίνηση προς την αρνητική κατεύθυνση x, y, ή z, και έτσι δεν επιτρέπεται οπισθοχώρηση.)

40. Πόσοι τρόποι ταξιδίου υπάρχουν στον χώρο $xyzw$ από την αρχή (0, 0, 0, 0) μέχρι το σημείο (4, 3, 5, 4), με βήματα της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση x, της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση y, της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση z, ή της μιάς μονάδας προς την θετική κατεύθυνση w;

41. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για μοίρασμα επτά χαρτιών στον καθένα από πέντε παίκτες από συνηθισμένη τράπουλα των 52 χαρτιών;

42. Στο παιχνίδι μπρίτζ, τα 52 χαρτιά συνηθισμένης τράπουλας μοιράζονται σε τέσσερεις παίκτες. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για μοίρασμα μπρίτζ σε τέσσερεις παίκτες;

43. Ποιά είναι η πιθανότητα κάθε παίκτης να έχει χαρτιά με έναν άσσο όταν τα 52 χαρτιά συνηθισμένης τράπουλας μοιράζονται σε τέσσερεις παίκτες;

44. Με πόσους τρόπους τοποθετούνται δώδεκα βιβλία σε τέσσερα ράφια που μπορούν να ξεχωρίζουν

a) αν τα βιβλία έχουν τον ίδιο τίτλο και είναι ολόιδια;

b) αν δεν υπάρχουν δύο ίδια βιβλία, και έχουν σημασία οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια; (*Υπόδειξη:* Η εργασία να γίνει σε 12 στάδια, με τοποθέτηση κάθε βιβλίου ξεχωριστά. Ξεκινούμε με την ακολουθία 1, 2, 3, 4 να παριστάνει τα ράφια. Παριστάνουμε τα βιβλία με b_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$. Τοποθετούμε το b_1 στα δεξιά ενός από τους όρους στην 1, 2, 3, 4. Υστερα τοποθετούμε διαδοχικά τα $b_2, b_3, \ldots,$ και b_{12}.)

45. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n βιβλία σε k ξεχωριστά ράφια

a) αν τα βιβλία έχουν τον ίδιο τίτλο και δεν ξεχωρίζουν;

b) αν δεν υπάρχουν δύο ίδια βιβλία, και έχουν σημασία οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια;

46. Ενα ράφι έχει 12 βιβλία στη σειρά. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή πέντε βιβλίων, έτσι ώστε να μην επιλέγονται δύο γειτονικά βιβλία; (*Υπόδειξη:* Παριστάνουμε τα βιβλία που επιλέγονται με γραμμές και τα βιβλία που δεν επιλέγονται με άστρα. Αριθμούμε το πλήθος των ακολουθιών πέντε γραμμών και επτά αστεριών, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο γειτονικές γραμμές.)

***47.** Με χρήση του κανόνα γινομένου να αποδειχτεί το Θεώρημα 4, με πρώτη τοποθέτηση αντικειμένων στο πρώτο κουτί, ύστερα με τοποθέτηση αντικειμένων στο δεύτερο κουτί, κ.ο.κ.

***48.** Να αποδειχτεί το Θεώρημα 4 πρώτα με δημιουργία αντιστοιχίας ένα-προς-ένα μεταξύ των μεταθέσεων n αντικειμένων με n_i ξεωριστά αντικείμενα είδους i, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, και των κατανομών n αντικειμένων σε k κουτιά, έτσι ώστε n_i αντικείμενα να τοποθετούνται στο κουτί i, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ και ύστερα με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.

***49.** Στην άσκηση αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα 2 με δημιουργία αντιστοιχίας ένα-προς-ένα μεταξύ του συνόλου των συνδυασμών r με επανάληψη, του $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ και του συνόλου των συνδυασμών r του συνόλου $T = \{1, 2, 3, \ldots, n+r-1\}$.

a) Διατάσσουμε τα στοιχεία σε συνδυασμό r με επανάληψη του S, σε αύξουσα ακολουθία $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_r$. Δείχνουμε ότι η ακολουθία που σχηματίζεται με πρόσθεση του $k-1$ στον όρο τάξης k είναι αυστηρά αύξουσα. Συμπεραίνουμε ότι αυτή η ακολουθία αποτελείται από r διαφορετικά στοιχεία από το T.

b) Δείχνουμε ότι η διαδικασία που περιγράψαμε στο (a) ορίζει αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ του συνόλου των συνδυασμών r με επανάληψη, του S και των συνδυασμών r του T. (*Υπόδειξη:* Να δειχτεί ότι η αντιστοιχία αυτή μπορεί να αντιστραφεί με συσχέτιση στον συνδυασμό r $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ του T, όπου $1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_r \le n+r-1$, του συνδυασμού με επανάληψη από το S, ο οποίος σχηματίζεται με αφαίρεση του $k-1$ από το στοιχείο τάξης k.)

c) Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $C(n+r-1, r)$ συνδυασμοί r με επανάληψη από σύνολο με n στοιχεία.

50. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για κατανομή πέντε διαφορετικών αντικειμένων σε τρία ολόιδια κιβώτια;

51. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για κατανομή πέντε όμοιων αντικειμένων σε τρία όμοια κιβώτια;

52. Πόσοι διαφορετικοί όροι υπάρχουν στο ανάπτυγμα του $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ μετά την πρόσθεση όλων των όρων με τους ίδιους εκθέτες;

***53.** Να αποδειχτεί το **Θεώρημα του Πολυωνύμου**: Αν ο n είναι θετικός ακέραιος, τότε

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} C(n; n_1, n_2, \ldots, n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_n^{n_m}$$

όπου ο

$$C(n;\, n_1, n_2, \ldots, n_m = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}$$

είναι ο **συντελεστής του πολυωνύμου**.

54. Να βρεθεί το ανάπτυγμα $(x+y+z)^4$.

55. Να βρεθεί ο συντελεστής του $x^3y^2z^5$ του $(x+y+z)^{10}$.

56. Πόσοι όροι υπάρχουν στο ανάπτυγμα του $(x+y+z)^{100}$;

4.6 Δημιουργία Μεταθέσεων και Συνδυασμών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις προηγούμενες Παραγράφους αυτού του Κεφαλαίου περιγράψαμε διάφορα είδη μεταθέσεων και συνδυασμών, αλλά κάποιες φορές οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί πρέπει να δημιουργούνται, και όχι απλά να αριθμούνται. Ας εξετάσουμε τα παρακάτω τρία προβλήματα. Πρώτο πρόβλημα, έστω ότι ένας πωλητής πρέπει να επισκεφθεί έξη διαφορετικές πόλεις. Με ποιά σειρά θα πρέπει να επισκεφθεί αυτές τις πόλεις έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο ταξιδίου; Ενας τρόπος προσδιορισμού της καλύτερης σειράς είναι να καθορίσει τον χρόνο ταξιδίου για κάθε μια από τις $6! = 720$ διαφορετικές σειρές με τις οποίες μπορεί να επισκεφθεί τις πόλεις και να επιλέξει την σειρά που έχει τον μικρότερο χρόνο ταξιδίου. Δεύτερο πρόβλημα, έστω ότι κάποιοι αριθμοί από ένα σύνολο με έξη αριθμούς έχουν σαν άθροισμα το 100. Ενας τρόπος για να βρούμε τους αριθμούς αυτούς είναι να δημιουργήσουμε και τα $2^6 = 64$ υποσύνολα και να ελέγξουμε το άθροισμα των όρων τους. Τρίτο πρόβλημα, έστω ότι ένα εργαστήριο έχει 95 εργαζόμενους. Για κάποιο έργο χρειάζεται μια ομάδα από 12 εργαζόμενους με συγκεκριμένο σύνολο 25 εργασιών. (Κάθε εργαζόμενος γνωρίζει μια ή περισσότερες από αυτές τις εργασίες.) Ενας τρόπος για να βρούμε αυτό το σύνολο εργαζομένων είναι να δημιουργήσουμε όλα τα σύνολα των 12 εργαζομένων και να ελέγξουμε αν διαθέτουν τα επιθυμητά προσόντα. Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν ότι, για την λύση προβλημάτων, συχνά χρειάζεται η δημιουργία μεταθέσεων και συνδυασμών

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

Οποιοδήποτε σύνολο με n στοιχεία μπορεί να τεθεί σε αντιστοιχία ένα-προς-ένα με το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Μπορούμε να καταγράψουμε τις μεταθέσεις οποιουδήποτε συνόλου με n στοιχεία με παραγωγή των μεταθέσεων των n μικρότερων θετικών ακέραιων και ύστερα να αντικαταστήσουμε αυτούς τους ακέραιους με τα αντίστοιχα στοιχεία. Εχουν αναπτυχθεί πολλοί διαφορετικοί αλγόριθμοι για την παραγωγή των $n!$ μεταθέσεων αυτού του συνόλου. Θα περιγράψουμε έναν από αυτούς που βασίζεται στην **λεξικογραφική διάταξη** του συνό-