****56.** (Χρειάζονται ανώτερα μαθηματικά) Με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης της $p(n)$ να δειχτεί ότι $p(n) \le e^{C\sqrt{n}}$ για κάποια σταθερά C. [Οι Hardy και Ramanujan έδειξαν ότι $p(n) \sim e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{\pi}}/(4\sqrt{3}n)$, γεγονός που σημαίνει ότι ο λόγος της $p(n)$ και του δεξιού μέλους προσεγγίζει το 1 καθώς το n προσεγγίζει το άπειρο.]

Εστω ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή σε δειγματικό χώρο S έτσι ώστε η $X(s)$ να είναι μη αρνητικός ακέραιος για όλα τα $s \in S$. Η **γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας** για την X είναι η

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X(s) = k)x^k .$$

57. (Χρειάζονται ανώτερα μαθηματικά) Να δειχτεί ότι αν η G_X είναι η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας για τυχαία μεταβλητή X έτσι ώστε η $X(s)$ να είναι μη αρνητικός ακέραιος για όλα τα $s \in S$, τότε

a) $G_X(1) = 1$ **b)** $E(X) = G'_X(1)$ **c)** $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

58. Εστω ότι η X είναι η τυχαία μεταβλητή, της οποίας η τιμή είναι n αν η πρώτη επιτυχία εμφανιστεί στην δοκιμή τάξης n όταν πραγματοποιούνται ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, που η κάθε μια έχει πιθανότητα επιτυχίας p.

a) Να βρεθεί κλειστός τύπος για την γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας G_X.

b) Να βρεθεί η αναμενόμενη (προσδοκώμενη) τιμή και η διακύμανση της X με χρήση της Ασκησης 57 και της κλειστής μορφής της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας που βρέθηκε στο (a).

59. Εστω ότι ο m είναι θετικός ακέραιος. Εστω ότι X_m είναι η τυχαία μεταβλητή, της οποίας η τιμή είναι n αν η επιτυχία τάξης m εμφανιστεί στην δοκιμή τάξης $(n+m)$ όταν πραγματοποιούνται ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, που η κάθε μια έχει πιθανότητα επιτυχίας p.

a) Με χρήση της Ασκησης 30 στις Συμπληρωματικές Ασκήσεις του Κεφάλαιου 5, να δειχτεί ότι η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας G_{X_m} δίνεται από την $G_{X_m}(x) = p^m/(1-qx)^m$, όπου $q = 1-p$.

b) Με χρήση της Ασκησης 57 και της κλειστής μορφής της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας που βρέθηκε στο (a) να βρεθεί η προσδοκώμενη τιμή και η διακύμανση της X_m.

60. Να δειχτεί ότι αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε δειγματικό χώρο S, έτσι ώστε οι $X(s)$ και $Y(s)$ να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι για όλα τα $s \in S$, τότε $G_{X+Y}(x) = G_X(x)G_Y(x)$.

6.5 Εγκλεισμός-Αποκλεισμός

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια τάξη διακριτών μαθηματικών έχει 30 γυναίκες και 50 δευτεροετείς. Πόσοι σπουδαστές στην τάξη είναι είτε γυναίκες είτε δευτεροετείς; Η ερώτηση δεν μπορεί να απαντηθεί εκτός και αν δοθούν περισσότερες πληροφορίες. Η πρόσθεση του πλήθους των γυναικών της τάξης και του πλήθους των δευτεροετών ίσως να μη δίνει την σωστή απάντηση, επειδή οι γυναίκες δευτεροετείς αριθμούνται δύο φορές. Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι το πλήθος των σπουδαστών της τάξης, που είναι είτε δευτεροετείς είτε γυναίκες, θα είναι το άθροισμα του πλήθους των γυναικών και του πλήθους των δευτεροετών της τάξης μείον το πλήθος των γυναικών δευτεροετών. Στην Παράγραφο 4.1 παρουσιάσαμε μια τεχνική για λύση παρόμοιων προβλημάτων απαρίθμησης. Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε τις ιδέες που παρουσιάσαμε στην παράγραφο εκείνη για λύση μιας μεγάλης περιοχής προβλημάτων απαρίθμησης.

Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Πόσα στοιχεία υπάρχουν στην ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων; Στην Παράγραφο 1.7 δείξαμε ότι το πλήθος των στοιχείων στην ένωση δύο συνόλων A και B είναι το άθροισμα των στοιχείων των συνόλων μείον το πλήθος των συνόλων της τομής τους. Δηλαδή

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Οπως δείξαμε στην Παράγραφο 4.1, ο τύπος για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση δύο συνόλων είναι χρήσιμος στα προβλήματα απαρίθμησης. Τα Παραδείγματα 1-3 δίνουν επιπλέον ενδείξεις της χρησιμότητας αυτού του τύπου.

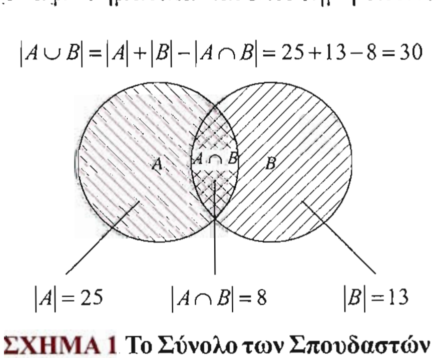
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια τάξη διακριτών μαθηματικών έχει 25 σπουδαστές που σπουδάζουν επιστήμη υπολογιστών, 13 σπουδαστές που σπουδάζουν μαθηματικά, και οκτώ σπουδαστές που σπουδάζουν ταυτόχρονα μαθηματικά και επιστήμη υπολογιστών. Πόσοι σπουδαστές υπάρχουν στην τάξη αυτή, αν κάθε σπουδαστής σπουδάζει μαθηματικά, επιστήμη υπολογιστών, ή ταυτόχρονα μαθηματικά και επιστήμη υπολογιστών;

Λύση: Εστω ότι A είναι το σύνολο των σπουδαστών της τάξης που σπουδάζουν επιστήμη υπολογιστών και έστω ότι B είναι το σύνολο των σπουδαστών της τάξης που σπουδάζουν μαθηματικά. Τότε $A \cap B$ είναι το σύνολο των σπουδαστών της τάξης που σπουδάζουν ταυτόχρονα μαθηματικά και επιστήμη υπολογιστών. Επειδή κάθε σπουδαστής της τάξης σπουδάζει είτε επιστήμη υπολογιστών είτε μαθηματικά (ή και τα δύο), έπεται ότι το πλήθος των σπουδαστών της τάξης θα είναι $|A \cup B|$. Αρα

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25+13-8 = 30.$$

Αρα, θα υπάρχουν 30 σπουδαστές στην τάξη. Ο υπολογισμός αυτός φαίνεται στο Σχήμα 1.



ΣΧΗΜΑ 1 **Το Σύνολο των Σπουδαστών σε Τάξη Διακριτών Μαθηματικών.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Πόσοι θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 διαιρούνται διά 7 ή διά 11;

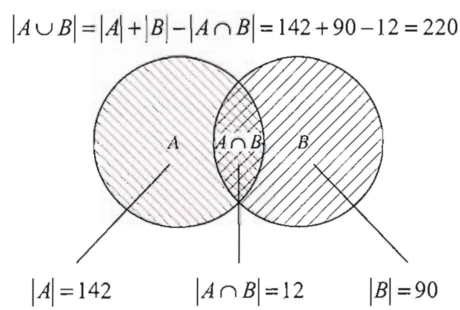
Λύση: Εστω ότι A είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 οι οποίοι διαιρούνται διά 7, και έστω ότι B είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 οι οποίοι διαιρούνται διά 11. Τότε $A \cup B$ είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 οι οποίοι διαιρούνται διά 7 ή διά 11, και $A \cap B$ είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 οι οποίοι διαιρούνται και διά 7 και διά 11.

Από το Παράδειγμα 2 της Παραγράφου 2.4, γνωρίζουμε ότι μεταξύ των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 υπάρχουν $\lfloor 1000/7 \rfloor$ ακέραιοι που διαιρούνται για 7 και $\lfloor 1000/11 \rfloor$ που διαιρούνται δια 11. Επειδή οι 7 και 11 είναι σχετικά πρώτοι, οι ακέραιοι που διαιρούνται και δια 7 και δια 11 είναι όσοι διαιρούνται δια $7 \cdot 11$. Κατά συνέπεια, υπάρχουν $\lfloor 1000/(11 \cdot 7) \rfloor$ θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 οι οποίοι διαιρούνται και διά 7 και διά 11. Επεται ότι θα υπάρχουν

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220$$

θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από 1000 οι οποίοι διαιρούνται είτε δια 7 είτε δια 11. Ο υπολογισμός αυτός φαίνεται στο Σχήμα 2.

Το Παράδειγμα 3 δείχνει τον τρόπο εύρεσης του πλήθους των στοιχείων σε πεπερασμένο γενικό σύνολο, τα οποία βρίσκονται έξω από την ένωση δύο συνόλων.



ΣΧΗΜΑ 2 Το Σύνολο των Θετικών Ακέραιων Που Δεν Είναι Μεγαλύτεροι από 1000 και Διαιρούνται Είτε δια 7 Είτε δια 11.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

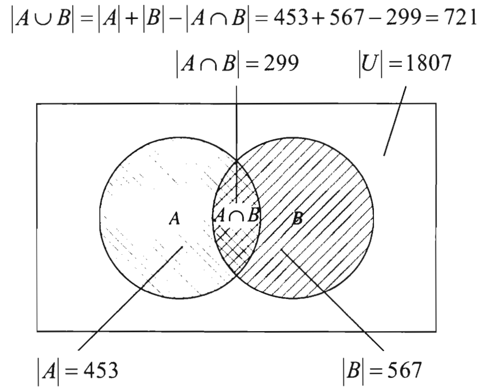
Εστω ότι υπάρχουν 1807 πρωτοετείς στην σχολή. Από αυτούς, οι 453 επιλέγουν μάθημα επιστήμης υπολογιστών, 567 επιλέγουν μαθηματικά, και 299 επιλέγουν και επιστήμη υπολογιστών και μαθηματικά. Πόσοι δεν επιλέγουν είτε μαθηματικά είτε επιστήμη υπολογιστών;

Λύση: Για να βρούμε το πλήθος των πρωτοετών που δεν έχουν επιλέξει είτε μαθηματικά είτε επιστήμη υπολογιστών, αφαιρούμε το πλήθος αυτών που επιλέγουν ένα από τα δύο μαθήματα από το συνολικό πλήθος των πρωτοετών.

Εστω ότι A είναι το σύνολο όλων των πρωτοετών που επιλέγουν επιστήμη υπολογιστών, και έστω ότι B είναι το σύνολο όλων των πρωτοετών που επιλέγουν μαθηματικά. Επεται ότι $|A| = 453$, $|B| = 567$, και $|A \cap B| = 299$. Το πλήθος των πρωτοετών που επιλέγουν είτε επιστήμη υπολογιστών είτε μαθηματικά θα είναι

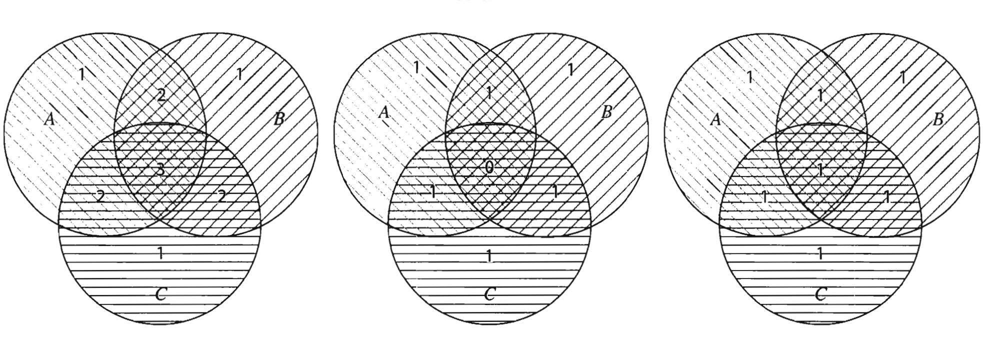
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721.$$

Κατά συνέπεια, υπάρχουν $1807 - 721 = 1086$ πρωτοετείς που δεν επιλέγουν μάθημα επιστήμης υπολογιστών ή μαθηματικών. Ο υπολογισμός αυτός φαίνεται στο Σχήμα 3.



ΣΧΗΜΑ 3 Το Σύνολο των Πρωτοετών που Δεν Επιλέγουν Μάθημα Είτε Επιστήμης Υπολογιστών Είτε Μαθηματικών.

Παρακάτω στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο βρίσκεται το πλήθος των στοιχείων στην ένωση πεπερασμένου πλήθους συνόλων. Το αποτέλεσμα που θα αναπτύξουμε ονομάζεται **αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού**. Πριν εξετάσουμε ενώσεις n συνόλων, όπου ο n είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος, θα βρούμε έναν τύπο για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση τριών συνόλων, A, B, και C. Για να κατασκευάσουμε αυτό τον τύπο παρατηρούμε ότι το $|A| + |B| + |C|$ αριθμεί μια φορά κάθε στοιχείο που υπάρχει μόνο σε ένα από αυτά τα τρία σύνολα, δύο φορές τα στοιχεία που υπάρχουν μόνο σε δύο από τα σύνολα, και τρεις φορές τα στοιχεία που υπάρχουν και στα τρία σύνολα. Αυτό φαίνεται στο πρώτο μέρος του Σχήματος 4.



(a) Αρίθμηση στοιχείων με την $|A|+|B|+|C|$

(b) Αρίθμηση στοιχείων με την $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) Αρίθμηση στοιχείων με την $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

ΣΧΗΜΑ 4 Εύρεση Τύπου για το Πλήθος των Στοιχείων στην Ενωση Τριών Συνόλων.

Για να απομακρύνουμε τα στοιχεία που περισσεύουν σε περισσότερα από ένα από τα σύνολα, αφαιρούμε το πλήθος των στοιχείων που βρίσκονται στις τομές όλων των ζευγών των τριών συνόλων, και παίρνουμε

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| .$$

Η έκφραση αυτή εξακολουθεί να αριθμεί στοιχεία που υπάρχουν μια φορά σε ένα μόνο από τα σύνολα. Στοιχείο που υπάρχει μόνο σε δύο από τα σύνολα αριθμείται και αυτό μόνο μια φορά, επειδή αυτό το στοιχείο εμφανίζεται σε μια από τις τρεις τομές των συνόλων όταν λαμβάνονται ανά δύο. Ωστόσο, τα στοιχεία που θα εμφανίζονται και στα τρία σύνολα δεν θα αριθμούνται καμμία φορά από την έκφραση αυτή, επειδή εμφανίζονται και στις τρεις τομές των συνόλων όταν λαμβάνονται ανά δύο. Αυτό φαίνεται στο δεύτερο μέρος του Σχήματος 4.

Για να διορθώσουμε αυτή την έλλειψη, προσθέτουμε το πλήθος των στοιχείων που βρίσκονται στην τομή και των τριών συνόλων. Αυτή η τελική έκφραση αριθμεί κάθε στοιχείο μια φορά, αν βρίσκεται σε ένα, δύο, ή τρία σύνολα. Ετσι θα έχουμε

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$

Ο τύπος αυτός φαίνεται στο τρίτο μέρος του Σχήματος 4.

Το Παράδειγμα 4 δείχνει τον τρόπο χρήσης αυτού του τύπου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ενα σύνολο από 1232 σπουδαστές έχουν επιλέξει μάθημα Ισπανικών, 879 έχουν επιλέξει μάθημα Γαλλικών, και 114 έχουν επιλέξει μάθημα Ρωσσικών. Επιπλέον, 103 έχουν επιλέξει και Ισπανικά και Γαλλικά, 23 έχουν επιλέξει και Ισπανικά και Ρωσσικά, και 14 έχουν επιλέξει και Γαλλικά και Ρωσσικά. Αν 2092 σπουδαστές έχουν επιλέξει τουλάχιστον ένα από τα μαθήματα Ισπανικών, Γαλλικών και Ρωσσικών, πόσοι σπουδαστές έχουν επιλέξει μάθημα και στις τρεις γλώσσες;

Λύση: Εστω ότι S είναι το σύνολο των σπουδαστών που έχουν επιλέξει Ισπανικά, F το σύνολο των σπουδαστών που έχουν επιλέξει Γαλλικά, και R το σύνολο των σπουδαστών που έχουν επιλέξει Ρωσσικά. Τότε

$$|S| = 1232, \qquad |F| = 879, \qquad |R| = 114,$$
$$|S \cap F| = 103, \qquad |S \cap R| = 23, \qquad |F \cap R| = 14,$$

και

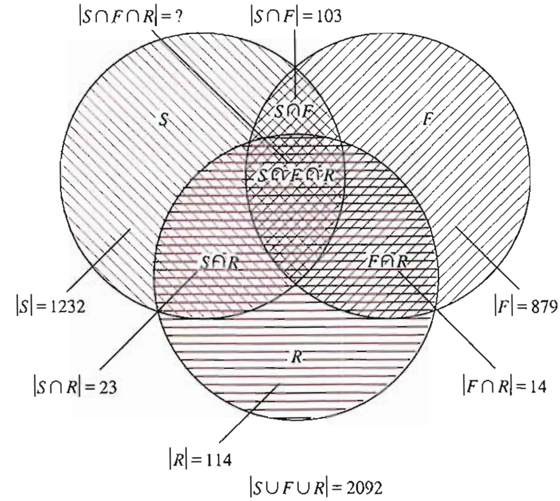
$$|S \cup F \cup R| = 2092 .$$

Αν βάλουμε αυτές τις ποσότητες στην εξίσωση

$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

θα έχουμε

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 + |S \cap F \cap R| .$$



ΣΧΗΜΑ 5 Το Σύνολο των Σπουδαστών που Εχουν Επιλέξει Μαθήματα Ισπανικών, Γαλλικών, και Ρωσσικών.

Αν λύσουμε ως προς $|S \cap F \cap R|$ βλέπουμε ότι $|S \cap F \cap R| = 7$. Αρα υπάρχουν επτά σπουδαστές που έχουν επιλέξει και Ισπανικά και Γαλλικά και Ρωσσικά. Το γεγονός αυτό φαίνεται στο Σχήμα 5.

Τώρα θα διαπυστώσουμε και θα αποδείξουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, η οποία μας λέει πόσα στοιχεία βρίσκονται στην ένωση πεπερασμένου πλήθους πεπερασμένων συνόλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Η ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ Εστω ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τον τύπο με το να δείξουμε ότι ένα στοιχείο στην ένωση αριθμείται μόνο μια φορά από το δεξιό μέλος της εξίσωσης. Εστω ότι a είναι μέλος μόνο r από τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ όπου $1 \le r \le n$. Αυτό το στοιχείο αριθμείται $C(r,1)$ φορές από το $\sum |A_i|$. Αριθμείται $C(r,2)$ φορές από το $\sum |A_i \cap A_j|$. Γενικά, αριθμείται $C(r,m)$ φορές από την άθροιση που αφορά σε m από τα σύνολα A_i. Ετσι, αυτό το στοιχείο αριθμείται

$$C(r,1) - C(r,2) + C(r,3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r)$$

φορές από την έκφραση στο δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε αυτή την ποσότητα. Σύμφωνα με το Λήμμα 2 της Παραγράφου 4.4, έχουμε

$$C(r,0) - C(r,1) + C(r,2) - \cdots + (-1)^r C(r,r) = 0$$

Συνεπώς,

$$1 = C(r,0) = C(r,1) - C(r,2) + \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r)$$

Αρα, κάθε στοιχείο στην ένωση αριθμείται μόνο μια φορά από την έκφραση στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού.

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει έναν τύπο για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση n συνόλων για κάθε θετικό ακέραιο n. Στον τύπο αυτό υπάρχουν όροι για το πλήθος των στοιχείων στην τομή κάθε μη κενού υποσυνόλου της συλλογής των n συνόλων. Κατά συνέπεια, στον τύπο αυτό υπάρχουν 2^n-1 όροι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να βρεθεί τύπος για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση τεσσάρων συνόλων.

Λύση: Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δείχνει ότι

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| \\ & - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος αυτός περιέχει 15 διαφορετικούς όρους, έναν για κάθε μη κενό υποσύνολο της $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Ασκήσεις

1. Ποσα στοιχεία υπάρχουν στην $A_1 \cup A_2$ αν υπάρχουν 12 στοιχεία στο A_1, 18 στοιχεία στο A_2, και

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; **b)** $|A_1 \cap A_2| = 1$; **c)** $|A_1 \cap A_2| = 6$; **d)** $A_1 \subseteq A_2$;

2. Σε ένα κολλέγιο υπάρχουν 345 σπουδαστές που έχουν επιλέξει ανώτερα μαθηματικά, 212 που έχουν επιλέξει διακριτά μαθηματικά, και 188 που έχουν επιλέξει και ανώτερα μαθηματικά και διακριτά μαθηματικά. Πόσοι σπουδαστές έχουν επιλέξει είτε ανώτερα μαθηματικά είτε διακριτά μαθηματικά;

3. Μια έρευνα σε νοικοκυριά των ΗΠΑ αποκαλύπτει ότι το 96% έχει τουλάχιστον ένα δέκτη τηλεόρασης, ότι το 98% έχει τηλέφωνο, και ότι το 95% έχει τηλεφωνο και τουλάχιστο ένα δέκτη τηλεόρασης. Ποιό ποσοστό νοικοκυριών στις ΗΠΑ δεν έχει ούτε τηλέφωνο ούτε δέκτη τηλεόρασης;

4. Μια έρευνα αγοράς για τους προσωπικούς υπολογιστές αναφέρει ότι μέσα στον επόμενο χρόνο 650.000 ιδιοκτήτες θα αγοράσουν modem για το μηχάνημά τους και ότι 1.250.000 θα αγοράσουν τουλάχιστον ένα πακέττο λογισμικού. Αν η έρευνα αναφέρει ότι 1.450.000 ιδιοκτήτες θα αγοράσουν είτε modem είτε τουλάχιστο ένα πακέττο λογισμικού, πόσοι θα αγοράσουν και modem και τουλάχιστο ένα πακέττο λογισμικού;

5. Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων στην $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία σε κάθε σύνολο και

a) τα σύνολα είναι διαζευγμένα κατά ζεύγη.

b) υπάρχουν 50 κοινά στοιχεία σε κάθε ζεύγος συνόλων και δεν υπάρχουν στοιχεία και στα τρία σύνολα.

c) υπάρχουν 50 κοινά στοιχεία σε κάθε ζεύγος συνόλων και 25 στοιχεία και στα τρία σύνολα.

d) τα σύνολα είναι ίσα.

6. Να βρεθεί το πλήθος στοιχείων στην $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ αν υπάρχουν 100 στοιχεία στο A_1, 1000 στο A_2, και 10.000 στο A_3 και

a) $A_1 \subseteq A_2$ και $A_2 \subseteq A_3$.

b) τα σύνολα είναι διαζευγμένα κατά ζεύγη.

c) υπάρχουν δύο κοινά στοιχεία σε κάθε ζεύγος συνόλων και ένα στοιχείο που βρίσκεται και στα τρία σύνολα.

7. Σε μια σχολή υπάρχουν 2504 σπουδαστές επιστήμης υπολογιστών. Από αυτούς, οι 1876 έχουν επιλέξει να μάθουν την γλώσσα προγραμματισμού Pascal, οι 999 έχουν επιλέξει να μάθουν την γλώσσα προγραμματισμού Fortran, και οι 345 έχουν επιλέξει να μάθουν την γλώσσα προγραμματισμού C. Επιπλέον, οι 876 έχουν επιλέξει και την Pascal και την Fortran, οι 231 έχουν επιλέξει και την Fortran και την C, και οι 290 έχουν επιλέξει και την Pascal και την C. Αν 189 από αυτούς τους σπουδαστές έχουν επιλέξει και την Fortran και την Pascal και την C, πόσοι από αυτούς τους 2504 σπουδαστές δεν έχουν επιλέξει μαθήματα σε καμμία από αυτές τις γλώσσες προγραμματισμού;

8. Σε μια έρευνα 270 σπουδαστών κολλεγίου, βρέθηκε ότι σε 64 αρέσουν τα λαχανάκια Βρυξελλών, ότι σε 94 αρέσουν τα μπρόκολα, ότι σε 58 αρέσουν τα κουνουπίδια, ότι σε 26 αρέσουν και τα λαχανάκια Βρυξελλών και τα μπρόκολα, ότι σε 28 αρέσουν και τα λαχανάκια Βρυξελλών και τα κουνουπίδια, ότι σε 22 αρέσουν και τα μπρόκολα και τα κουνουπίδια, και ότι σε 14 αρέσουν και τα τρία λαχανικά. Σε πόσους από αυτούς τους 270 σπουδαστές δεν αρέσει κανένα από αυτά τα τρία λαχανικά;

9. Πόσοι σπουδαστές έχουν γραφεί σε μαθήματα είτε ανώτερων μαθηματικών, διακριτών μαθηματικών, δομών δεδομένων, είτε γλωσσών προγραμματισμού, σε σχολή αν υπάρχουν 507, 292, 312, και 344 σπουδαστές στα μαθήματα αυτά, αντίστοιχα, 14 και στα ανώτερα μαθηματικά και στις δομές δεδομένων, 213 και στα ανώτερα μαθηματικά και στις γλώσσες προγραμματισμού, 211 και στα διακριτά μαθηματικά και στις δομές δεδομένων, 43 και στα διακριτά μαθηματικά και στις γλώσσες προγραμματισμού, και κανένας σπουδαστής δεν έχει γραφεί ταυτόχρονα σε μαθήματα ανώτερων μαθηματικών και διακριτών μαθηματικών, ή δομών δεδομένων και γλωσσών προγραμματισμού;

10. Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 οι οποίοι δεν διαιρούνται δια 5 ή δια 7.

11. Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 οι οποίοι είναι είτε περιττοί ή το τετράγωνο ακέραιου.

12. Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 οι οποίοι είναι είτε το τετράγωνο είτε ο κύβος ακέραιου.

13. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος οκτώ δεν περιέχουν έξη διαδοχικά 0;

***14.** Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του Λατινικού αλφαβήτου δεν περιέχουν καμμία από τις συμβολοσειρές *fish*, *rat*, ή *bird*;

15. Πόσες μεταθέσεις των 10 ψηφίων είτε αρχίζουν με τα 3 ψηφία 987, περιέχουν τα ψηφία 45 στην πέμπτη θέση και στην έκτη θέση, είτε τελειώνουν με τα τρία ψηφία 123;

16. Πόσα στοιχεία υπάρχουν στην ένωση τεσσάρων συνόλων, αν το καθένα από τα σύνολα έχει 100 στοιχεία, αν κάθε ζεύγος από τα σύνολα έχει 50 κοινά στοιχεία, αν κάθε τρία από τα σύνολα έχουν 25 κοινά στοιχεία, και υπάρχουν 5 στοιχεία που βρίσκονται και στα τέσσερα σύνολα;

17. Πόσα στοιχεία υπάρχουν στην ένωση τεσσάρων συνόλων αν τα σύνολα έχουν 50, 60, 70, και 80 στοιχεία, ταυτόχρονα, αν κάθε ζεύγος από τα σύνολα έχει 5 κοινά στοιχεία, αν κάθε τριάδα από τα σύνολα έχει 1 κοινό στοιχείο, και αν δεν υπάρχει στοιχείο που να βρίσκεται και στα τέσσερα σύνολα;

18. Πόσοι όροι υπάρχουν στον τύπο, που δίνει την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού, για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση 10 συνόλων;

19. Να γραφεί ο σαφής τύπος που δίνεται από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση πέντε συνόλων.

20. Πόσα στοιχεία υπάρχουν στην ένωση πέντε συνόλων αν κάθε σύνολο περιέχει 10.000 στοιχεία, αν κάθε ζεύγος συνόλων έχει 1000 κοινά στοιχεία, αν κάθε τριάδα συνόλων έχει 100 κοινά στοιχεία, αν κάθε τέσσερα από τα σύνολα έχουν 10 κοινά στοιχεία, και αν υπάρχει 1 στοιχείο που να βρίσκεται και στα πέντε σύνολα;

21. Να γραφεί ο σαφής τύπος που δίνεται από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση έξη συνόλων όταν είναι γνωστό ότι αυτά τα σύνολα ανά τρία δεν έχουν κοινή τομή.

****22.** Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής να αποδειχτεί η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

23. Εστω ότι E_1, E_2, και E_3 είναι τρία γεγονότα από δειγματικό χώρο S. Να βρεθεί τύπος για την πιθανότητα της $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

24. Να βρεθεί η πιθανότητα όταν ρίχνεται "απείραχτο" νόμισμα πέντε φορές να έρχονται γράμματα τρεις φορές, η πρώτη και η τελευταία ρίψη να έρχονται γράμματα, ή η δεύτερη και η τέταρτη ρίψη να έρχονται κορώνα.

25. Να βρεθεί η πιθανότητα όταν τέσσερεις αριθμοί από το 1 μέχρι το 100, συμπεριλαμβανομένων, επιλέγονται τυχαία χωρίς να επιτρέπονται επαναλήψεις, είτε όλοι να είναι περιττοί, όλοι να διαιρούνται δια 3, είτε όλοι να διαιρούνται δια 5.

26. Να βρεθεί τύπος για την πιθανότητα της ένωσης τεσσάρων γεγονότων σε δειγματικό χώρο αν δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα τρία από αυτά.

27. Να βρεθεί τύπος για την πιθανότητα της ένωσης πέντε γεγονότων σε δειγματικό χώρο αν δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα τέσσερα από αυτά.

28. Να βρεθεί τύπος για την πιθανότητα της ένωσης n γεγονότων σε δειγματικό χώρο αν δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα δύο από αυτά.

29. Να βρεθεί τύπος για την πιθανότητα της ένωσης τεσσάρων γεγονότων σε δειγματικό χώρο.

6.6 Εφαρμογές του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλά προβλήματα απαρίθμησης λύνονται με χρήση της αρχής του εγκλεισμού-αποκλεισμού. Για παράδειγμα, με την αρχή αυτή μπορούμε να βρούμε το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι από θετικό ακέραιο. Πολλά προβλήματα λύνονται με απαρίθμηση του πλήθους των συναρτήσεων επί από ένα πεπερασμένο σύνολο προς άλλο. Η αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση παρόμοιων συναρτήσεων. Το περίφημο πρόβλημα με τα καπέλλα μπορεί να λυθεί με την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού. Το πρόβλημα αναζητάει την πιθανότητα κανένας άνθρωπος να μη πάρει το σωστό καπέλλο από αυτόν που επιστρέφει τα καπέλλα με τυχαίο τρόπο.

ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Υπάρχει μια εναλλακτική μορφή της αρχής του εγκλεισμού-αποκλεισμού που είναι χρήσιμη στα προβλήματα απαρίθμησης. Ειδικότερα, αυτή η μορφή χρησιμοποιείται για την λύση προβλημάτων που ζητούν το πλήθος των στοιχείων συνόλου, τα οποία δεν έχουν καμμία από n ιδιότητες $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Εστω ότι A_i είναι το υποσύνολο που περιέχει τα στοιχεία που έχουν την ιδιότητα P_i. Θα συμβολίσουμε με $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k})$ το πλήθος των στοιχείων με όλες τις ιδιότητες $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$. Αν γράψουμε αυτές τις ποσότητες σαν έκφραση συνόλων, έχουμε

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = N(P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}).$$

Αν συμβολίσουμε με $N(P_1' P_2' \cdots P_n')$ το πλήθος των στοιχείων με καμμία από τις ιδιότητες $P_1, P_2, \ldots, P_n$ και με N το πλήθος των στοιχείων του συνόλου, έπεται ότι

$$N(P_1' P_2' \cdots P_n') = N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right|.$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} N(P_1' P_2' \cdots P_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) \\ - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \cdots P_n). \end{aligned}$$