ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4 Απαρίθμηση

Η συνδυαστική (ανάλυση), δηλαδή η μελέτη της διάταξης αντικειμένων, αποτελεί σημαντικό μέρος των διακριτών μαθηματικών. Το αντικείμενο αυτό μελετήθηκε ήδη από τον δέκατο έβδομο αιώνα, όταν παρουσιάστηκαν συνδυαστικά ερωτήματα κατά την μελέτη των τυχερών παιχνιδιών. Η απαρίθμηση, δηλαδή η μέτρηση αντικειμένων με ορισμένες ιδιότητες, αποτελεί σημαντικό μέρος της συνδυαστικής. Για να λύνουμε πολλά διαφορετικά είδη προβλημάτων πρέπει να μετρούμε αντικείμενα. Για παράδειγμα, η απαρίθμηση χρησιμοποιείται στον καθορισμό της πολυπλοκότητας των αλγόριθμων. Η απαρίθμηση χρειάζεται και για τον προσδιορισμό του αν υπάρχουν αρκετοί τηλεφωνικοί αριθμοί ή διευθύνσεις του Internet έτσι ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση. Επιπλέον, οι τεχνικές απαρίθμησης χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό όταν υπολογίζονται οι πιθανότητες γεγονότων.

Οι βασικοί κανόνες απαρίθμησης, τους οποίους θα μελετήσουμε στην Παράγραφο 4.1, μπορούν να λύσουν μια τρομερή ποικιλία προβλημάτων. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτούς τους κανόνες για να απαριθμούμε τους διαφορετικούς τηλεφωνικούς αριθμούς μιάς χώρας, τα επιτρεπτά συνθηματικά σε ένα σύστημα υπολογιστών, και τις διαφορετικές κατατάξεις με τις οποίες μπορούν να τερματίσουν οι δρομείς σε έναν αγώνα δρόμου. Ενα άλλο σημαντικό συνδυαστικό εργαλείο είναι η αρχή του περιστερώνα, την οποία θα μελετήσουμε στην Παράγραφο 4.2. Αυτή αναφέρει ότι όταν αντικείμενα τοποθετούνται σε κουτιά και υπάρχουν περισσότερα αντικείμενα από κουτιά, τότε θα υπάρχει ένα κουτί που θα περιέχει τουλάχιστον δύο αντικείμενα. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε αυτή την αρχή για να δείξουμε ότι μεταξύ ενός συνόλου 15 ή περισσότερων σπουδαστών, τουλάχιστο 3 γεννήθηκαν την ίδια μέρα της εβδομάδας.

Μπορούμε να διατυπώσουμε πολλά προβλήματα απαρίθμησης σαν έκφραση διατεταγμένων ή μη διατεταγμένων διατάξεων των αντικειμένων συνόλου. Αυτές οι διατάξεις, που ονομάζονται μεταθέσεις και συνδυασμοί, χρησιμοποιούνται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης. Για παράδειγμα, έστω ότι οι 100 πρώτοι ενός διαγωνισμού όπου έλαβαν μέρος 2000 σπουδαστές προσκαλούνται σε δεξίωση. Μπορούμε να μετρήσουμε τα δυνατά σύνολα 100 σπουδαστών που θα προσκαλεστούν, καθώς και τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να απονεμηθούν τα 10 πρώτα βραβεία.

Ενα άλλο πρόβλημα της συνδυαστικής αφορά στην δημιουργία όλων των διατάξεων ενός συγκεκριμένου είδους. Αυτό είναι συχνά σημαντικό σε προσομοιώσεις με υπολογιστή. Θα επινοήσουμε αλγόριθμους για να δημιουργήσουμε διατάξεις διαφόρων ειδών.

4.1 Τα Βασικά της Απαρίθμησης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ενα συνθηματικό σε σύστημα υπολογιστή αποτελείται από έξη, επτά, ή οκτώ χαρακτήρες. Ο κάθε χαρακτήρας πρέπει να είναι ψηφίο ή γράμμα του αλφαβήτου. Κάθε συνθηματικό πρέπει να περιέχει τουλάχιστο ένα ψηφίο. Πόσα συνθηματικά υπάρχουν; Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τις τεχνικές που χρειάζονται για να απαντηθεί αυτή η ερώτηση καθώς και μια μεγάλη ποικιλία άλλων προβλημάτων απαρίθμησης.

Τα προβλήματα απαρίθμησης εμφανίζονται παντού στα μαθηματικά και στην επιστήμη υπολογιστών. Για παράδειγμα, θα πρέπει να μετρήσουμε τα επιτυχημένα αποτελέσματα πειραμάτων και όλα τα δυνατά αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων για να καθορίσουμε τις πιθανότητες διακριτών γεγονότων. Πρέπει να μετρήσουμε το πλήθος των πράξεων που πραγματοποιούνται από αλγόριθμο για να μελετήσουμε την πολυπλοκότητά του χρόνου.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τις βασικές τεχνικές απαρίθμησης. Οι μέθοδοι αυτές λειτουργούν σαν θεμέλιο για σχεδόν όλες τις τεχνικές απαρίθμησης.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Θα παρουσιάσουμε δύο βασικές αρχές απαρίθμησης, τον **κανόνα γινομένου** και τον **κανόνα αθροίσματος**. Υστερα θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται αυτοί οι κανόνες για να λύνουν πολλά διαφορετικά προβλήματα απαρίθμησης.

Ο κανόνας γινομένου εφαρμόζεται όταν μια διαδικασία αποτελείται από ξεχωριστές εργασίες.

Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ Εστω ότι μια διαδικασία μπορεί να διασπαστεί σε ακολουθία δύο εργασιών. Αν υπάρχουν n_1 τρόποι για να γίνει η πρώτη εργασία και n_2 τρόποι για να γίνει η δεύτερη εργασία μετά την εκτέλεση της πρώτης εργασίας, τότε υπάρχουν $n_1 n_2$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας.

Τα Παραδείγματα 1-9 δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται ο κανόνας γινομένου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Τα καθίσματα σε ένα αμφιθέατρο πρόκειται να ονομαστούν με ένα γράμμα του Λατινικού αλφαβήτου και με έναν θετικό ακέραιο όχι μεγαλύτερο από το 100. Ποιό είναι το μεγαλύτερο πλήθος καθισμάτων που μπορούν να ονομαστούν με διαφορετικό τρόπο;

Λύση: Η διαδικασία ονομασίας ενός καθίσματος αποτελείται από δύο εργασίες, δηλαδή από την ανάθεση στο κάθισμα ενός από τα 26 γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου και ύστερα από την ανάθεση στο κάθισμα ενός από τους 100 δυνατούς ακέραιους. Ο κανόνας γινομένου δείχνει ότι υπάρχουν $26 \cdot 100 = 2.600$ διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ονομαστεί ένα κάθισμα. Κατά συνέπεια, το μεγαλύτερο πλήθος καθισμάτων που μπορούν να ονομαστούν με διαφορετικό τρόπο είναι 2.600.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σε ένα κέντρο υπολογιστών υπάρχουν 32 μικροϋπολογιστές. Κάθε μικροϋπολογιστής έχει 24 θύρες. Πόσες διαφορετικές θύρες υπάρχουν στο υπολογιστικό κέντρο για κάθε μικροϋπολογιστή;

Λύση: Η διαδικασία επιλογής θύρας αποτελείται από δύο εργασίες, πρώτα από την επιλογή μικροϋπολογιστή και ύστερα από την επιλογή θύρας του μικροϋπολογιστή αυτού. Επειδή υπάρχουν 32 τρόποι επιλογής του μικροϋπολογιστή και 24 τρόποι επιλογής της θύρας ανεξάρτητα από το ποιός μικροϋπολογιστής έχει επιλεγεί, ο κανόνας γινομένου δείχνει ότι υπάρχουν $32 \cdot 24 = 768$ θύρες.

Συχνά είναι χρήσιμη μια διευρυμένη εκδοχή του κανόνα γινομένου. Εστω ότι εκτελείται διαδικασία με εκτέλεση των εργασιών $T_1, T_2, \ldots, T_m$ σε σειρά. Αν η εργασία T_i μπορεί να εκτελεστεί με n_i τρόπους μετά την εκτέλεση των εργασιών $T_1, T_2, \ldots$, και T_{i-1}, τότε θα υπάρχουν $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας. Η εκδοχή αυτή του κανόνα γινομένου μπορεί να αποδειχτεί με μαθηματική επαγωγή από τον κανόνα γινομένου για δύο εργασίες (βλ. Ασκηση 56 στο τέλος της παραγράφου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές bit υπάρχουν με μήκος επτά;

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{2 επιλογές για κάθε bit}}$$

Λύση: Το καθένα από τα επτά bit μπορεί να επιλεγεί με δύο τρόπους, επειδή κάθε bit θα είναι είτε 0 είτε 1. Κατά συνέπεια, ο κανόνας γινομένου δείχνει ότι υπάρχουν συνολικά 2^7=127 διαφορετικές συμβολοσειρές bit με μήκος επτά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων υπάρχουν αν κάθε πινακίδα περιέχει τρία γράμματα ακολουθούμενα από τρία ψηφία (και δεν υπάρχουν απαγορευμένες ακολουθίες γραμμάτων, έστω και αν δεν έχουν καλή έννοια);

Λύση: Υπάρχουν 26 επιλογές για το καθένα από τα τρία γράμματα του (Λατινικού) αλφαβήτου και δέκα επιλογές για το καθένα από τα τρία ψηφία. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου υπάρχουν συνολικά

$$\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\substack{\text{26 επιλογές}\\ \text{για κάθε}\\ \text{γράμμα}}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\substack{\text{10 επιλογές}\\ \text{για κάθε}\\ \text{ψηφίο}}}$$

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17.576.000$ δυνατές πινακίδες κυκλοφορίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Απαρίθμηση Συναρτήσεων Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από σύνολο με m στοιχεία προς σύνολο με n στοιχεία;

Λύση: Μια συνάρτηση αντιστοιχεί σε επιλογή ενός από τα n στοιχεία στο πεδίο συνορισμού για καθένα από τα m στοιχεία στο πεδίο ορισμού. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου υπάρχουν $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^m$ συναρτήσεις από σύνολο με m στοιχεία προς σύνολο με n στοιχεία. Για παράδειγμα, υπάρχουν 53 διαφορετικές συναρτήσεις από σύνολο με τρία στοιχεία προς σύνολο με πέντε στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Απαρίθμηση Συναρτήσεων Ενα-προς-Ενα Πόσες συναρτήσεις ένα-προς-ένα υπάρχουν από σύνολο με m στοιχεία προς σύνολο με n στοιχεία;

Λύση: Πρώτα παρατηρούμε ότι όταν $m > n$ δεν υπάρχουν συναρτήσεις ένα-προς-ένα από σύνολο με m στοιχεία προς σύνολο με n στοιχεία. Εστω, τώρα, ότι $m \leq n$. Εστω ότι τα στοιχεία στο πεδίο ορισμού είναι $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Υπάρχουν n τρόποι επιλογής της τιμής της συνάρτησης στο a_1. Επειδή η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα, η τιμή της συνάρτησης στο a_2 μπορεί να επιλεγεί με $n-1$ τρόπους (επειδή η τιμή που χρησιμοποιήθηκε για το a_1 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί πάλι). Γενικά, η τιμή της συνάρτησης στο a_k μπορεί να επιλεγεί με $n-k+1$ τρόπους. Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, υπάρχουν $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ συναρτήσεις ένα-προς-ένα από σύνολο με m στοιχεία προς σύνολο με n στοιχεία. Για παράδειγμα, υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ συναρτήσεις ένα-προς-ένα από σύνολο με τρία στοιχεία προς σύνολο με πέντε στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Το Σχέδιο Τηλεφωνικής Αριθμοδότησης Η μορφή των τηλεφωνικών αριθμών στην Βόρεια Αμερική καθορίζεται από ένα *σχέδιο αριθμοδότησης*. Ο τηλεφωνικός αριθμός αποτελείται από 10 ψηφία, που χωρίζονται σε κωδικό περιοχής με τρία ψηφία, σε κωδικό Κομβικού Τηλεφωνικού Κέντρου με τρία ψηφία, και αριθμό Τερματικού Τηλεφωνικού Κέντρου με τέσσερα ψηφία. Εξαιτίας θεμάτων σηματοδοσίας, υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί σε κάποια από τα ψηφία αυτά. Για να καθορίσουμε την επιτρεπτή μορφή, έστω ότι το X συμβολίζει ψηφίο που μπορεί να πάρει οιαδήποτε από τις τιμές 0 μέχρι 9, έστω ότι το N συμβολίζει ψηφίο που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις τιμές 2 μέχρι 9, και έστω ότι το Y συμβολίζει ψηφίο που μπορεί να είναι 0 ή 1. Θα εξετάσουμε δύο σχέδια αριθμοδότησης, που θα τα ονομάσουμε παλαιό σχέδιο και νέο σχέδιο. (Το παλαιό σχέδιο, που χρησιμοποιούνταν μέχρι την δεκαετία του 1960, έχει αντικατασταθεί από το νέο σχέδιο, αλλά η πρόσφατη ταχεία ανάπτυξη ζήτησης νέων αριθμών θα αχρηστεύσει ακόμη και αυτό το νέο σχέδιο.) Οπως θα δείξουμε, το νέο σχέδιο επιτρέπει την χρήση περισσότερων αριθμών.

Στο παλαιό σχέδιο, οι μορφές του κώδικα περιοχής, του κώδικα Κομβικού Τηλεφωνικού Κέντρου, και του αριθμού Τερματικού Τηλεφωνικού Κέντρου ήταν *NYX*, *NNX*, και *XXXX*, αντίστοιχα, έτσι ώστε οι τηλεφωνικοί αριθμοί είχαν την μορφή *NYX-NNX-XXXX*. Στο νέο σχέδιο, οι μορφές αυτών των κωδικών είναι *NXX*, *NXX*, και *XXXX*, αντίστοιχα, έτσι ώστε οι τηλεφωνικοί αριθμοί να έχουν την μορφή *NXX-NXX-XXXX*. Πόσοι διαφορετικοί τηλεφωνικοί αριθμοί είναι δυνατοί στην Βόρεια Αμερική με το παλαιό σχέδιο και πόσοι με το νέο σχέδιο;

Λύση: Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, υπάρχουν $8 \cdot 2 \cdot 10 = 160$ κώδικες περιοχής με μορφή *NYX* και $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$ κώδικες περιοχής με μορφή *NXX*. Με παρόμοιο τρόπο, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, υπάρχουν $8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$ κώδικες Κομβικών Τηλεφωνικών Κέντρων με μορφή *NNX*. Ο κανόνας γινομένου δείχνει και ότι υπάρχουν $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ αριθμοί Τερματικού Τηλεφωνικού Κέντρου με μορφή *XXXX*.
Κατά συνέπεια, αν εφαρμόσουμε πάλι τον κανόνα γινομένου, έπεται ότι με το παλιό σχέδιο υπήρχαν

$$160 \cdot 640 \cdot 10.000 = 1.024.000.000$$

διαθέσιμοι διαφορετικοί αριθμοί στην Βόρεια Αμερική. Με το νέο σχέδιο υπάρχουν

$$800 \cdot 800 \cdot 10.000 = 6.400.000.000$$

διαθέσιμοι διαφορετικοί αριθμοί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Ποιά είναι η τιμή του k μετά την εκτέλεση του παρακάτω κώδικα προγράμματος;

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
        for i_2 :=1 to n_2
              .
              .
              .
            for i_m :=1 to n_m
                k := k + 1
```

Λύση: Η αρχική τιμή του k είναι μηδέν. Κάθε φορά που εκτελείται ο εμφωλευμένος βρόχος, στο k προστίθεται 1. Εστω ότι η T_i είναι η εργασία εκτέλεσης του βρόχου τάξης i. Τότε το πλήθος των φορών που εκτελείται ο βρόχος είναι το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης των εργασιών $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Το πλήθος των φορών εκτέλεσης της εργασίας T_j, $j = 1, 2, \ldots m$, είναι n_j, επειδή ο βρόχος τάξης j εκτελείται μια φορά για κάθε ακέραιο i_j με $1 \le i_j \le n_j$. Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, έπεται ότι ο εμφωλευμένος βρόχος εκτελείται $n_1 n_2 \cdots n_m$ φορές. Συνεπώς, η τελική τιμή του k θα είναι $n_1 n_2 \cdots n_m$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Απαρίθμηση Υποσυνόλων Πεπερασμένου Συνόλου Με χρήση του κανόνα γινομένου να δειχτεί ότι το πλήθος των διαφορετικών υποσυνόλων πεπερασμένου συνόλου S είναι $2^{|S|}$.

Λύση: Εστω ότι το S είναι πεπερασμένο σύνολο. Καταγράφουμε τα στοιχεία του S σε αυθαίρετη σειρά. Θυμόμαστε ότι υπάρχει αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ υποσυνόλων του S και συμβολοσειρών bit μήκους $|S|$. Δηλαδή, ένα υποσύνολο του S συνδέεται με την συμβολοσειρά bit που έχει ένα 1 στην θέση τάξης i αν το στοιχείο τάξης i της λίστας βρίσκεται στο υποσύνολο, και με ένα 0 στην θέση αυτή σε διαφορετική περίπτωση. Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, υπάρχουν $2^{|S|}$ συμβολοσειρές bit μήκους $2^{|S|}$. Συνεπώς, $|P(S)| = 2^{|S|}$.

Ο κανόνας γινομένου συχνά διατυπώνεται σαν έκφραση συνόλων με τον παρακάτω τρόπο: Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ είναι πεπερασμένα σύνολα, το πλήθος των στοιχείων στο Καρτεσιανό γινόμενο αυτών των συνόλων είναι το γινόμενο του πλήθους των στοιχείων σε κάθε σύνολο. Για να το συσχετίσουμε αυτό με τον κανόνα γινομένου, παρατηρούμε ότι η εργασία επιλογής στοιχείου στο Καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ εκτελείται με επιλογή ενός στοιχείου από το A_1, ενός στοιχείου από το $A_2, \ldots$, και ενός στοιχείου στο A_m. Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου έπεται ότι

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τον κανόνα αθροίσματος.

Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ Αν μια πρώτη εργασία μπορεί να εκτελεστεί με n_1 τρόπους και μια δεύτερη εργασία με n_2 τρόπους, και αν αυτές οι εργασίες δεν μπορούν να εκτελεστούν ταυτόχρονα, τότε υπάρχουν n_1+n_2 τρόποι εκτέλεσης μιάς από τις εργασίες αυτές.

Στο Παράδειγμα 10 φαίνεται ο τρόπος χρήσης του κανόνα αθροίσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Εστω ότι επιλέγεται είτε ένα μέλος του προσωπικού του τομέα μαθηματικών είτε ένας τελειόφοιτος σπουδαστής μαθηματικών σαν αντιπρόσωπος σε πανεπιστημιακή επιτροπή. Πόσες επιλογές υπάρχουν για τον αντιπρόσωπο αυτό αν στον τομέα μαθηματικών υπάρχει προσωπικό 37 ατόμων και 83 τελειόφοιτοι σπουδαστές μαθηματικών;

Λύση: Η πρώτη εργασία, δηλ., η επιλογή μέλους από το προσωπικό του τομέα μαθηματικών, μπορεί να εκτελεστεί με 37 τρόπους. Η δεύτερη εργασία, δηλ., η επιλογή τελειόφοιτου σπουδαστή μαθηματικών μπορεί να εκτελεστεί με 83 τρόπους. Από τον κανόνα αθροίσματος έπεται ότι υπάρχουν 37 + 83 = 120 δυνατοί τρόποι επιλογής αντιπροσώπου.

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον κανόνα αθροίσματος σε περισσότερες από δύο εργασίες. Εστω ότι οι εργασίες $T_1, T_2, \ldots, T_m$ μπορούν να εκτελεστούν με $n_1 n_2 \cdots n_m$ τρόπους, αντίστοιχα, και δεν μπορούν να εκτελεστούν δύο εργασίες ταυτόχρονα. Τότε το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης μιάς από αυτές τις εργασίες είναι $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$. Αυτή η επαυξημένη εκδοχή του κανόνα αθροίσματος είναι συχνά χρήσιμη σε προβλήματα απαρίθμησης, όπως δείχνουν τα Παραδείγματα 11 και 12. Η εκδοχή αυτή του κανόνα αθροίσματος μπορεί να αποδειχτεί με μαθηματική επαγωγή από τον κανόνα αθροίσματος για δύο σύνολα (βλ. Ασκηση 55 στο τέλος της παραγράφου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Σπουδαστής μπορεί να επιλέξει εργασία με υπολογιστή από έναν εκ τρειών καταλόγους. Οι τρεις κατάλογοι περιέχουν 23, 15, και 19 δυνατές εργασίες, αντίστοιχα. Πόσες δυνατές εργασίες υπάρχουν για επιλογή;

Λύση: Ο σπουδαστής μπορεί να επιλέξει εργασία από τον πρώτο κατάλογο με 23 τρόπους, από τον δεύτερο κατάλογο με 15 τρόπους, και από τον τρίτο κατάλογο με 19 τρόπους. Κατά συνέπεια, υπάρχουν 23 + 15 + 19 = 57 εργασίες για επιλογή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Ποιά είναι η τιμή του k μετά την εκτέλεση του παρακάτω κώδικα προγράμματος;

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    k := k + 1
for i_2 :=1 to n_2
    k := k + 1
        .
        .
        .
for i_m :=1 to n_m
    k := k + 1
```

Λύση: Η αρχική τιμή του k είναι μηδέν. Αυτό το κομμάτι του κώδικα προγράμματος αποτελείται από m διαφορετικούς βρόχους. Κάθε φορά που εκτελείται ένας βρόχος, στο k προστίθεται 1. Εστω ότι η T_i είναι η εργασία εκτέλεσης του βρόχου i τάξης. Η εργασία T_i μπορεί να εκτελεστεί με n_i τρόπους, επειδή ο βρόχος τάξης i εκτελείται n_i φορές. Επειδή δεν μπορούν να εκτελεστούν ταυτόχρονα δύο εργασίες, ο κανόνας αθροίσματος δείχνει ότι η τελική τιμή του k, που είναι το πλήθος των φορών εκτέλεσης μιάς από τις εργασίες T_i, $i = 1, 2, \ldots m$, θα είναι $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Ο κανόνας γινομένου διατυπώνεται σαν έκφραση συνόλων με τον παρακάτω τρόπο: Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_m$ είναι διαζευγμένα σύνολα, τότε το πλήθος των στοιχείων στην ένωση αυτών των συνόλων είναι το άθροισμα του πλήθους των στοιχείων σ' αυτά. Για να το συσχετίσουμε αυτό με την δήλωσή μας του κανόνα αθροίσματος, έστω ότι T_i είναι η εργασία επιλογής στοιχείου από το A_i για $i = 1, 2, \ldots m$. Υπάρχουν $|A_i|$ τρόποι εκτέλεσης του T_i. Από τον κανόνα αθροίσματος, επειδή δεν μπορούν να εκτελεστούν ταυτόχρονα δύο εργασίες, το πλήθος των φορών για επιλογή στοιχείου από ένα εκ των συνόλων, που είναι το πλήθος των στοιχείων στην ένωση, θα είναι

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|.$$

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνο όταν τα σύνολα είναι διαζευγμένα. Η περίπτωση είναι αρκετά περισσότερο πολύπλοκη όταν αυτά τα σύνολα έχουν κοινά στοιχεία. Η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί με συντομία παρακάτω στην παράγραφο αυτή, και με περισσότερο βάθος στο Κεφάλαιο 6.

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΠΟΛΥΠΛΟΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Πολλά προβλήματα απαρίθμησης δεν μπορούν να λυθούν απλά με χρήση του κανόνα αθροίσματος ή απλά με χρήση του κανόνα γινομένου. Πολλά, ωστόσο, πολύπλοκα προβλήματα απαρίθμησης λύνονται με χρήση και των δύο αυτών κανόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Σε μια έκδοση της γλώσσας υπολογιστή BASIC, το όνομα μεταβλητής είναι συμβολοσειρά ενός ή δύο αλφαριθμητικών χαρακτήρων, όπου δεν ξεχωρίζουν τα κεφαλαία από τα πεζά γράμματα. (*Αλφαριθμητικός* χαρακτήρας είναι είτε ένα από τα 26 γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου είτε ένα από τα 10 ψηφία.) Επιπλέον, το όνομα μεταβλητής θα πρέπει να αρχίζει με γράμμα και θα πρέπει να είναι διαφορετικό από τις πέντε συμβολοσειρές δύο χαρακτήρων που έχουν δεσμευτεί για χρήση προγραμματισμού. Πόσα διαφορετικά ονόματα μεταβλητής υπάρχουν στην έκδοση αυτή της BASIC;

Λύση: Εστω ότι V είναι το πλήθος των διαφορετικών ονομάτων μεταβλητής στην έκδοση αυτή της BASIC. Εστω ότι V_1 είναι το πλήθος των ονομάτων που έχουν μήκος ένα και V_2 το πλήθος των ονομάτων που έχουν μήκος δύο. Τότε, σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος, $V=V_1+V_2$. Σημειώνουμε ότι $V_1 = 26$, επειδή μεταβλητή με όνομα με ένα χαρακτήρα θα πρέπει να είναι ένα γράμμα. Επιπλέον, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, θα υπάρχουν $26 \cdot 36$ συμβολοσειρές με μήκος δύο που αρχίζουν με γράμμα και τελειώνουν με αλφαριθμητικό χαρακτήρα.. Ωστόσο, θα εξαιρούνται πέντε από αυτές, έτσι ώστε να είναι $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Κατά συνέπεια, θα υπάρχουν $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ διαφορετικά ονόματα μεταβλητής σ' αυτή την έκδοση της BASIC.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Κάθε χρήστης συστήματος υπολογιστή έχει ένα συνθηματικό, μήκους έξη ως οκτώ χαρακτήρων, όπου κάθε χαρακτήρας είναι κεφαλαίο γράμμα ή ψηφίο. Κάθε συνθηματικό θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστο ένα ψηφίο. Πόσα δυνατά συνθηματικά υπάρχουν;

Λύση: Εστω ότι P είναι το συνολικό πλήθος των δυνατών συνθηματικών, και έστω ότι τα P_6, P_7, και P_8 συμβολίζουν το πλήθος των δυνατών συνθηματικών με μήκη 6, 7, και 8, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος, $P = P_6 + P_7 + P_8$. Θα βρούμε, τώρα, τα P_6, P_7, και P_8. Η άμεση εύρεση του P_6 είναι δύσκολη. Για να βρούμε το P_6 είναι ευκολότερο να βρούμε το πλήθος των συμβολοσειρών με κεφαλαία γράμματα και ψηφία με μήκος έξη χαρακτήρες, όπου περιλαμβάνονται και οι συμβολοσειρές χωρίς ψηφία, και να αφαιρέσουμε από τον αριθμό αυτό το πλήθος των συμβολοσειρών χωρίς ψηφία. Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, το πλήθος των συμβολοσειρών με έξη χαρακτήρες είναι 36^6, και το πλήθος των συμβολοσειρών χωρίς ψηφία 26^6. Κατά συνέπεια,

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2.176.782.336 - 308.915.776 = 1.867.866.560.$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να δειχτεί ότι

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78.364.164.096 - 8.031.810.176 = 70.332.353.920$$

και

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2.821.109.907.456 - 208.827.064.576 = 2.612.282.842.880$$

Κατά ασυνέπεια,

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2.684.483.063.360.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Απαρίθμηση Διευθύνσεων Internet Στο Internet, το οποίο αποτελείται από διασυνδεδεμένα φυσικά δίκτυα υπολογιστών, σε κάθε υπολογιστή (ή ακριβέστερα, σε κάθε σύνδεση δικτύου υπολογιστή) ανατίθεται μια *διεύθυνση Internet*. Στην Εκδοση 4 του Πρωτοκόλλου Internet (IPv4), που χρησιμοποιείται σήμερα, η διεύθυνση είναι συμβολοσειρά με 32 bit. Αρχίζει με έναν *αριθμό δικτύου* (*netid*). Το netid ακολουθείται από έναν *αριθμό ξένιου υπολογιστή* (*hostid*), το οποίο προσδιορίζει ένα υπολογιστή σαν μέλος συγκεκριμένου δικτύου.

Χρησιμοποιούνται τρεις μορφές διευθύνσεων, με διαφορετικά πλήθη bit για netid και hostid. Οι **διευθύνσεις Τάξης A**, που χρησιμοποιούνται για τα μεγαλύτερα δίκτυα, αποτελούνται από το 0, ακολουθούμενο από netid με 7 bit και hostid με 24 bit. Οι **διευθύνσεις Τάξης B**, που χρησιμοποιούνται για τα δίκτυα μεσαίου μεγέθους, αποτελούνται από το 10, ακολουθούμενο από netid με 14 bit και hostid με 16 bit. Οι **διευθύνσεις Τάξης C**, που χρησιμοποιούνται για τα μικρότερα δίκτυα, αποτελούνται από το 110, ακολουθούμενο από netid με 21 bit και hostid με 8 bit. Υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί στις διευθύνσεις εξαιτίας ειδικών χρήσεων: το 1111111 δεν διατίθεται σαν netid δικτύου Τάξης A, και τα hostid που αποτελούνται μόνο από 0 και μόνο από 1 δεν διατίθενται για χρήση σε κανένα δίκτυο. Ενας υπολογιστής στο Internet έχει διεύθυνση είτε Τάξης A, είτε Τάξης B, είτε Τάξης C. (Εκτός από τις διευθύνσεις Τάξεων A, B, και C, υπάρχουν και διευθύνσεις Τάξης D, που είναι κρατημένες για χρήση σε πολλαπλή εκπομπή όταν καλούνται ταυτόχρονα πολλοί υπολογιστές, που αποτελούνται από το 1110, ακολουθούμενο από 28 bit, και διευθύνσεις Τάξης E που είναι κρατημένες για μελλοντική χρήση και αποτελούνται από το 11110, ακολουθούμενο από 27 bit. Ούτε οι διευθύνσεις Τάξης D ούτε οι διευθύνσεις Τάξης E δεν καταχωρούνται σαν διευθύνσεις IP υπολογιστή στο Internet.) Στο Σχήμα 1 φαίνεται η ανάθεση διευθύνσεων IPv4. (Οι περιορισμοί στο πλήθος των netid Τάξης A και Τάξης B έχουν κάνει ανεπαρκή την διευθυνσιοδότηση IPv4. Για να λυθεί το πρόβλημα, η IPv6, που θα αντικαταστήσει την IPv4, χρησιμοποιεί διευθύνσεις των 128 bit.)

Πόσες διαφορετικές διευθύνσεις IPv4 διατίθενται για υπολογιστές στο Internet;

Λύση: Εστω ότι x είναι το πλήθος των διαθέσιμων διευθύνσεων για υπολογιστές στο Internet, και έστω ότι τα x_A, x_B, και x_C συμβολίζουν το πλήθος των διαθέσιμων διευθύνσεων Τάξης A, Τάξης B, και Τάξης C, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος, $x = x_A + x_B + x_C$.

Αριθμός Bit	0	1	2	3	4	8	16	24	31
Τάξη A	0	netid					hostid		
Τάξη B	1	0	netid					hostid	
Τάξη C	1	1	0	netid					hostid
Τάξη D	1	1	1	0	Διεύθυνση Πολλαπλής Εκπομπής				
Τάξη E	1	1	1	1	0	Διεύθυνση			

ΣΧΗΜΑ 1 Διευθύνσεις στο Internet (IPv4).

Για να βρούμε το x_A, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $2^7-1=127$ netid Τάξης A, αν θυμηθούμε ότι το netid 1111111 δεν είναι διαθέσιμο. Για κάθε netid, υπάρχουν $2^{24}-2=16.777.214$ hostid, αν θυμηθούμε ότι τα hostid που αποτελούνται μόνο από 0 ή μόνο από 1 δεν είναι διαθέσιμα. Κατά συνέπεια, $x_A = 127 \cdot 16.777.214 = 2.130.706.178$.

Για να βρούμε τα x_B και x_C, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $2^{14}=16.384$ netid Τάξης B και $2^{21}=2.097.152$ netid Τάξης C. Για κάθε netid Τάξης B, υπάρχουν $2^{16}-2=65.534$ hostid και για κάθε netid Τάξης C, υπάρχουν $28-2=254$ hostid, αν θυμηθούμε ότι σε κάθε δίκτυο τα hostid που αποτελούνται μόνο από 0 και μόνο από 1 δεν είναι διαθέσιμα. Κατά συνέπεια, $x_B=1.037.709.056$ και $x_C=532.676.608$.

Συμπεραίνουμε ότι το συνολικό πλήθος διαθέσιμων διευθύνσεων IPv4 είναι $x=x_A+x_B+x_C=2.130.706.178+1.073.709.056+532.676.608=3.737.091.842$.

Η ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Οταν δύο εργασίες μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον κανόνα αθροίσματος για να αριθμούμε τους τρόπους εκτέλεσης μίας από τις δύο εργασίες. Η πρόσθεση των τρόπων εκτέλεσης κάθε εργασίας οδηγεί σε υπεραρίθμηση, επειδή οι τρόποι εκτέλεσης και των δύο εργασιών μετρούνται δύο φορές. Για να αριθμήσουμε σωστά το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης μιάς από τις δύο εργασίες, προσθέτουμε το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης κάθε μιάς από τις δύο εργασίες και ύστερα αφαιρούμε το πλήθος των φορών εκτέλεσης και των δύο εργασιών. Η τεχνική αυτή ονομάζεται **αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού**. Στο Παράδειγμα 16 φαίνεται ο τρόπος λύσης προβλημάτων απαρίθμησης με χρήση αυτής της αρχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος οκτώ είτε αρχίζουν με bit 1 είτε τελειώνουν με δύο bit 00;

Λύση: Η πρώτη εργασία, η κατασκευή ακολουθίας bit μήκους οκτώ που αρχίζει με bit 1, μπορεί να γίνει με $2^7 = 128$ τρόπους. Το γεγονός αυτό έπεται από τον κανόνα γινομένου, επειδή το πρώτο bit μπορεί να επιλεγεί μόνο με έναν τρόπο και το καθένα από τα άλλα επτά bit μπορεί να επιλεγεί με δύο τρόπους.

Η δεύτερη εργασία, η κατασκευή ακολουθίας bit μήκους οκτώ που τελειώνει με δύο bit 00, μπορεί να γίνει με $2^6 = 64$ τρόπους. Το γεγονός αυτό έπεται από τον κανόνα γινομένου, επειδή το καθένα από τα πρώτα έξη bit μπορεί να επιλεγεί με δύο τρόπους και τα τελευταία δύο bit μπορούν να επιλεγούν μόνο με έναν τρόπο.

Και οι δύο εργασίες, δηλαδή η κατασκευή ακολουθίας bit που αρχίζει με 1 και τελειώνει με 00, μπορεί να γίνει με $2^5 = 32$ τρόπους. Το γεγονός αυτό έπεται από τον κανόνα γινομένου, επειδή το πρώτο bit μπορεί να επιλεγεί μόνο με έναν τρόπο, το καθένα από τα δεύτερο μέχρι έκτο bit μπορούν να επιλεγούν με δύο τρόπους, και τα τελευταία δύο bit μπορούν να επιλεγούν με έναν τρόπο. Κατά συνέπεια, το πλήθος των συμβολοσειρών bit με μήκος οκτώ που αρχίζουν με 1 και τελειώνουν με 00, και το οποίο είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης είτε της πρώτης εργασίας είτε της δεύτερης εργασίας, είναι ίσο με $128+64-32=160$.

Μπορούμε να διατυπώσουμε αυτή την αρχή απαρίθμησης σαν έκφραση συνόλων. Εστω ότι τα A_1 και A_2 είναι σύνολα και έστω ότι T_1 είναι η εργασία επιλογής στοιχείου από το A_1 και T_2 είναι η εργασία επιλογής στοιχείου από το A_2. Υπάρχουν $|A_1|$ τρόποι εκτέλεσης της T_1 και $|A_2|$ τρόποι εκτέλεσης της T_2. Το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης είτε της T_1 είτε της T_2 είναι το άθροισμα του πλήθους των τρόπων εκτέλεσης της T_1 και του πλήθους των τρόπων εκτέλεσης της T_2, μείον το πλήθος των τρόπων εκτέλεσης και των δύο T_1 και T_2. Επειδή υπάρχουν $|A_1 \cup A_2|$ τρόποι εκτέλεσης είτε της T_1 είτε της T_2 και $|A_1 \cap A_2|$ τρόποι εκτέλεσης και της T_1 και της T_2, έχουμε

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Αυτός είναι ο τύπος που δίνεται στην Παράγραφο 1.7 για το πλήθος των στοιχείων στην ένωση δύο συνόλων.

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού γενικεύεται για εύρεση των τρόπων εκτέλεσης μίας από n διαφορετικές εργασίες ή, ισοδύναμα, για εύρεση του πλήθους των στοιχείων στην ένωση n συνόλων, αν ο n είναι θετικός ακέραιος. Στο Κεφάλαιο 6 θα μελετήσουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού και κάποιες από τις πολλές εφαρμογές της.

ΔΕΝΔΡΙΤΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

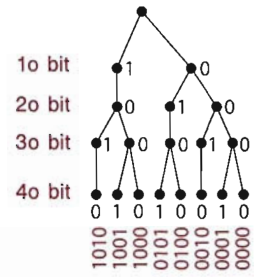
Τα προβλήματα απαρίθμησης λύνονται με χρήση **δενδρικών διαγραμμάτων**. Ενα δένδρο αποτελείται από ρίζα, κάποιους κλάδους που αφήνουν την ρίζα, και πιθανούς επιπλέον κλάδους που αφήνουν τα άκρα άλλων κλάδων. (Θα μελετήσουμε τα δένδρα με λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 9.) Για να χρησιμοποιήσουμε τα δένδρα στην απαρίθμηση, χρησιμοποιούμε έναν κλάδο για να παραστήσουμε δυνατή επιλογή. Παριστάνουμε τα δυνατά αποτελέσματα με τα φύλλα, που είναι τα άκρα σημεία των κλάδων οι οποίοι δεν έχουν άλλους κλάδους που να ξεκινούν από αυτούς

Σημειώνουμε ότι όταν για την λύση προβλήματος απαρίθμησης χρησιμοποιείται δενδρικό διάγραμμα, το πλήθος των επιλογών που χρειάζονται για να φτάσουμε σε ένα φύλλο μπορεί να ποικίλλει (για παράδειγμα, βλ. Παράδειγμα 18).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος τέσσερα δεν έχουν δύο διαδοχικά 1;

Λύση: Ο δενδρικό διάγραμμα του Σχήματος 2 δείχνει όλες τις συμβολοσειρές



ΣΧΗΜΑ 2
Συμβολοσειρές Bit Μήκους Τέσσερα χωρίς Διαδοχικά 1.

bit με μήκος τέσσερα χωρίς δύο διαδοχικά 1. Βλέπουμε ότι υπάρχουν οκτώ συμβολοσειρές bit με μήκος τέσσερα χωρίς δύο διαδοχικά 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

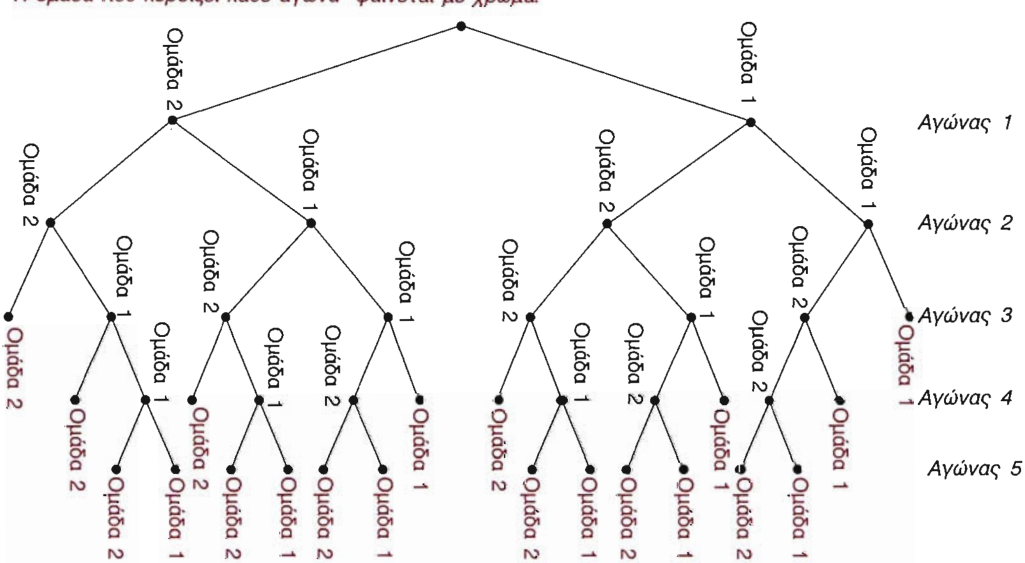
Ενα πρωτάθλημα playoff μεταξύ δύο ομάδων αποτελείται το πολύ από πέντε αγώνες. Η πρώτη ομάδα που θα κερδίσει τρείς αγώνες κερδίζει το πρωτάθλημα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει το πρωτάθλημα;

Λύση: Το δενδρικό διάγραμμα του Σχήματος 3 δείχνει όλους τους τρόπους με τους οποίους διεξάγεται το πρωτάθλημα playoff και όπου φαίνεται ο νικητής κάθε αγώνα. Βλέπουμε ότι υπάρχουν 20 διαφορετικοί τρόποι διεξαγωγής του πρωταθλήματος playoff.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

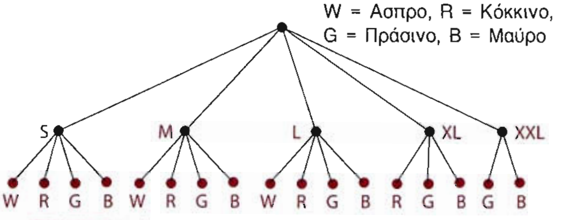
Εστω ότι τα Τ-σερτ με την επιγραφή "I love New Jersey" βγαίνουν σε πέντε διαφορετικά μεγέθη: S, M, L, XL, και XXL. Θεωρούμε, ακόμη, ότι κάθε μέγεθος βγαίνει σε τέσσερα χρώματα, άσπρο, κόκκινο, πράσινο, και μαύρο, εκτός από το μέγεθος XL, που βγαίνει μόνο σε κόκκινο, πράσινο, και μαύρο, και το μέγεθος XXL, που βγαίνει μόνο σε πράσινο και μαύρο. Πόσα διαφορετιικά Τ-σέρτ θα πρέπει να έχει ένα κατάστημα τουριστικών ειδών έτσι ώστε να έχει τουλάχιστον ένα Τ-σέρτ από κάθε διαθέσιμο μέγεθος και χρώμα;

Η ομάδα που κερδίζει κάθε αγώνα φαίνεται με χρώμα.



ΣΧΗΜΑ 3 **Πρωτάθλημα Playoff με Νικητή, τον Νικητή Τριών στους Πέντε Αγώνες.**

Λύση: Το δενδρικό διάγραμμα του Σχήματος 4 δείχνει όλα τα δυνατά ζεύγη μεγεθών και χρωμάτων. Επεται ότι ο ιδιοκτήτης του καταστήματος θα πρέπει να έχει στην αποθήκη του 17 διαφορετικά Τ-σέρτ.



ΣΧΗΜΑ 4 Αρίθμηση Ποικιλιών Τ-σέρτ.

Σημείωση: Στις ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου, να θεωρηθεί ότι χρησιμοποιείται το Λατινικό αλφάβητο, εκτός και αν ορίζεται διαφορετικά.

Ασκήσεις

1. Σε ένα κολλέγιο υπάρχουν 18 τελειόφοιτοι μαθηματικών και 325 τελειόφοιτοι επιστήμης υπολογιστών.
   a) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να εκλεγούν δύο εκπρόσωποι, έτσι ώστε ο ένας να είναι τελειόφοιτος μαθηματικών και ο άλλος τελειόφοιτος επιστήμης υπολογιστών;
   b) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να εκλεγεί ένας εκπρόσωπος που να είναι είτε τελειόφοιτος μαθηματικών είτε τελειόφοιτος επιστήμης υπολογιστών;

2. Ενα κτίριο γραφείων έχει 27 ορόφους και 37 γραφεία σε κάθε όροφο. Πόσα γραφεία υπάρχουν στο κτίριο;

3. Ενα διαγώνισμα πολλαπλών επιλογών περιέχει δέκα ερωτήσεις. Σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τέσσερεις δυνατές απαντήσεις.
   a) Με πόσους τρόπους μπορεί ένας σπουδαστής να απαντήσει στις ερωτήσεις του διαγωνίσματος αν δίνεται απάντηση σε κάθε ερώτηση;
   b) Με πόσους τρόπους μπορεί ένας σπουδαστής να απαντήσει στις ερωτήσεις του διαγωνίσματος αν μπορεί να αφήνει κενές απαντήσεις;

4. Μια συγκεκριμένη μάρκα πουκάμισου βγαίνει σε 12 χρώματα, έχει ανδρικό και γυναικείο, και υπάρχει σε τρία μεγέθη για κάθε φύλο. Πόσα διαφορετικά είδη αυτού του πουκάμισου κατασκευάζονται;

5. Υπάρχουν έξη διαφορετικές εταιρείες που πετούν από την Νέα Υόρκη προς το Denver και επτά που πετούν από το Denver προς το San Fransisco. Πόσες διαφορετικές δυνατότητες υπάρχουν για ένα ταξίδι από την Νέα Υόρκη προς το San Fransisco μέσω Denver, όταν επιλεγεί μια εταιρεία για την πτήση προς το Denver και μια εταιρεία για την πτήση προς το San Fransisco;

6. Υπάρχουν τέσσερεις κύριες διαδρομές με αυτοκίνητο από την Βοστώνη προς το Detroit και έξη από το Detroit προς το Los Angeles. Πόσες κύριες διαδρομές με αυτοκίνητο υπάρχουν από την Βοστώνη προς το Los Angeles μέσω Detroit;

7. Πόσα διαφορετικά αρχικά με τρία γράμματα μπορεί να έχει κάποιος για το όνομά του;

8. Πόσα διαφορετικά αρχικά με τρία γράμματα χωρίς επανάληψη γραμμάτων μπορεί να έχει κάποιος για το όνομά του;

9. Πόσα διαφορετικά αρχικά με τρία γράμματα υπάρχουν που να αρχίζουν με A;

10. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος οκτώ υπάρχουν;

11. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος δέκα αρχίζουν και τελειώνουν με 1;

12. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος έξη ή μικρότερο υπάρχουν;

13. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος όχι μεγαλύτερο από n, όπου ο n είναι θετικός ακέραιος, αποτελούνται αποκλειστικά από 1;

14. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος n, όπου ο n είναι θετικός ακέραιος, αρχίζουν και τελειώνουν με 1;

15. Πόσες συμβολοσειρές με πεζά γράμματα και με μήκος τέσσερα ή μικρότερο υπάρχουν;

16. Πόσες συμβολοσειρές με τέσσερα πεζά γράμματα που έχουν το γράμμα x υπάρχουν;

17. Πόσες συμβολοσειρές με πέντε χαρακτήρες ASCII περιέχουν τον χαρακτήρα @ (παπάκι) τουλάχιστον μία φορά; (*Σημείωση:* Υπάρχουν 128 διαφορετικοί χαρακτήρες ASCII.)

18. Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι από 1000
a) διαιρούνται δια 7; **b)** διαιρούνται δια 7 αλλά όχι δια 11;
c) διαιρούνται και δια 7 και δια 11; **d)** διαιρούνται είτε δια 7 είτε δια 11;
e) διαιρούνται μόνο από έναν από τους 7 και 11;
f) δεν διαιρούνται από κανέναν από τους 7 και 11;
g) έχουν ξεχωριστά ψηφία; **h)** έχουν ξεχωριστά ψηφία και είναι άρτιοι;

19. Πόσοι θετικοί ακέραιοι μεταξύ των 100 και 999 περιλαμβανομένων
a) διαιρούνται δια 7; **b)** είναι περιττοί;
c) έχουν τα ίδια τρία δεκαδικά ψηφία; **d)** δεν διαιρούνται δια 4;
e) διαιρούνται δια 3 ή δια 4; **f)** δεν διαιρούνται είτε δια 3 είτε δια 4;
g) διαιρούνται δια 3 αλλά όχι δια 4; **h)** διαιρούνται δια 3 και δια 4;

20. Πόσοι θετικοί ακέραιοι μεταξύ των 1000 και 9999 περιλαμβανομένων
a) διαιρούνται δια 9; **b)** είναι άρτιοι; **c)** έχουν ξεχωριστά ψηφία;
d) δεν διαιρούνται δια 3; **e)** διαιρούνται δια 5 ή δια 7;
f) δεν διαιρούνται ούτε δια 5 ούτε δια 7;
g) διαιρούνται δια 5 αλλά όχι δια 7; **h)** διαιρούνται δια 5 και δια 7;

21. Πόσες συμβολοσειρές με τρία δεκαδικά ψηφία
a) δεν περιέχουν το ίδιο ψηφίο τρεις φορές;
b) αρχίζουν με περιττό ψηφίο;
c) έχουν δύο ψηφία που είναι 4;

22. Πόσες συμβολοσειρές με τέσσερα δεκαδικά ψηφία
a) δεν περιέχουν το ίδιο ψηφίο δύο φορές;
b) τελειώνουν με άρτιο ψηφίο; **c)** έχουν τρία ψηφία που είναι 9;

23. Σχηματίζεται μια επιτροπή είτε με τον κυβερνήτη είτε με έναν από τους δύο γερουσιαστές κάθε μιας από τις 50 Πολιτείες των ΗΠΑ. Πόσοι τρόποι σχηματισμού αυτής της επιτροπής υπάρχουν;

24. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση είτε τριών ψηφίων που ακολουθούνται από τρία γράμματα είτε τριών γραμμάτων που ακολουθούνται από τρία ψηφία;

25. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση είτε δύο γραμμάτων που ακολουθούνται από τέσσερα ψηφία είτε δύο ψηφίων που ακολουθούνται από τέσσερα γράμματα;

26. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση είτε τριών γραμμάτων που ακολουθούνται από τρία ψηφία είτε τεσσάρων γραμμάτων που ακολουθούνται από δύο ψηφία;

27. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας αυτοκινήτων μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση είτε δύο είτε τριών γραμμάτων που ακολουθούνται είτε από δύο είτε από τρία ψηφία;

28. Πόσες συμβολοσειρές με οκτώ Λατινικά γράμματα υπάρχουν

a) αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

b) αν τα γράμματα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται;

c) που αρχίζουν με X, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

d) που αρχίζουν με X, αν τα γράμματα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται;

e) που αρχίζουν και τελειώνουν με X, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

f) που αρχίζουν με τα γράμματα BO (με αυτή την σειρά), αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

g) που αρχίζουν και τελειώνουν με τα γράμματα BO (με αυτή την σειρά), αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

h) που αρχίζουν ή τελειώνουν με τα γράμματα BO (με αυτή την σειρά), αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

29. Πόσες συμβολοσειρές με οκτώ Λατινικά γράμματα υπάρχουν

a) που δεν περιέχουν φωνήεντα, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

b) που δεν περιέχουν φωνήεντα, αν τα γράμματα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται;

c) που αρχίζουν με φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

d) που αρχίζουν με φωνήεν, αν τα γράμματα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται;

e) που περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

f) που περιέχουν μόνο ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

g) που αρχίζουν με X και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

h) που αρχίζουν και τελειώνουν με X και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν, αν τα γράμματα μπορούν να επαναλαμβάνονται;

30. Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις υπάρχουν από σύνολο με 10 στοιχεία προς σύνολα με τα παρακάτω πλήθη στοιχείων;

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5

31. Πόσες συναρτήσεις ένα-προς-ένα υπάρχουν από σύνολο με πέντε στοιχεία προς σύνολα με τα παρακάτω πλήθη στοιχείων;
a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7

32. Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου ο n είναι θετικός ακέραιος, προς το σύνολο $\{0, 1\}$;

33. Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου ο n είναι θετικός ακέραιος, προς το σύνολο $\{0, 1\}$
a) οι οποίες είναι ένα-προς-ένα;
b) που αναθέτουν το 0 και στο 1 και στο n;
c) που αναθέτουν το 1 μόνο σε έναν από τους θετικούς ακέραιους που είναι μικρότεροι από n;

34. Πόσες μερικές συναρτήσεις (βλ. τις ασκήσεις στην Παράγραφο 1.8) υπάρχουν από σύνολο με πέντε στοιχεία προς σύνολα με τα παρακάτω πλήθη στοιχείων; **a)** 1 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 9

35. Πόσες μερικές συναρτήσεις (βλ. τις ασκήσεις στην Παράγραφο 1.8) υπάρχουν από σύνολο με m στοιχεία προς σύνολο με n στοιχεία, όπου οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι;

36. Πόσα υποσύνολα συνόλου με 100 στοιχεία έχουν περισσότερα από ένα στοιχείο;

37. **Παλινδομική** ονομάζεται συμβολοσειρά της οποίας η ανάστροφη είναι ίδια με την συμβολοσειρά. Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους n είναι παλινδρομικές;

38. Με πόσους τρόπους ένας φωτογράφος σε τελετή γάμου μπορεί να τοποθετήσει έξη άτομα σε μια σειρά από μια ομάδα 10 ατόμων, όπου ο γαμπρός και η νύφη είναι μεταξύ αυτών των 10 ατόμων, αν
a) η νύφη θα πρέπει να βρίσκεται στην εικόνα;
b) και ο γαμπρός και η νύφη θα πρέπει να βρίσκονται στην εικόνα;
c) μόνο ο ένας από τον γαμπρό ή από την νύφη θα πρέπει να βρίσκονται στην εικόνα;

39. Με πόσους τρόπους ένας φωτογράφος σε τελετή γάμου μπορεί να τοποθετήσει έξη άτομα σε μια σειρά, μαζί με τον γαμπρό και την νύφη, αν
a) η νύφη θα πρέπει να είναι δίπλα στον γαμπρό;
b) η νύφη δεν θα είναι δίπλα στον γαμπρό;
c) η νύφη θα βρίσκεται κάπου αριστερά του γαμπρού;

40. Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους επτά είτε αρχίζουν με δύο 0 είτε τελειώνουν με τρία 1;

41. Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους 10 είτε αρχίζουν με τρία 0 είτε τελειώνουν με δύο 0;

***42.** Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους 10 περιέχουν είτε πέντε διαδοχικά μηδέν είτε πέντε διαδοχικά 1;

****43.** Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους οκτώ περιέχουν είτε τρία διαδοχικά μηδέν είτε τέσσερα διαδοχικά 1;

44. Κάθε σπουδαστής σε τμήμα διακριτών μαθηματικών είναι είτε τελειόφοιτος επιστήμης υπολογιστών είτε τελειόφοιτος μαθηματικών είτε τελειόφοιτος ταυτόχρονα και στις δύο επιστήμες. Πόσοι σπουδαστές βρίσκονται στο τμήμα αν υπάρχουν 38 τελειόφοιτοι επιστήμης υπολογιστών (μαζί με αυτούς που είναι ταυτόχρονα και στις δύο επιστήμες), 23 τελειόφοιτοι μαθηματικών (μαζί με αυτούς που είναι ταυτόχρονα και στις δύο επιστήμες), και 7 σπουδαστές που είναι ταυτόχρονα και στις δύο επιστήμες;

45. Πόσοι θετικοί ακέραιοι που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 διαιρούνται είτε δια 4 είτε δια 6;

46. Το όνομα μεταβλητής στην γλώσσα προγραμματισμού C είναι συμβολοσειρά που μπορεί να περιέχει κεφαλαία γράμματα, πεζά γράμματα, ψηφία ή κάτω παύλες. Ακόμη, ο πρώτος χαρακτήρας της συμβολοσειράς θα πρέπει να είναι γράμμα, είτε κεφαλαίο είτε πεζό, ή κάτω παύλα. Αν το όνομα μεταβλητής καθορίζεται από τους πρώτους οκτώ χαρακτήρες της, πόσες διαφορετικές μεταβλητές μπορούν να ονομαστούν στην C; (Σημειώνουμε ότι το όνομα μεταβλητής μπορεί να περιέχει λιγότερους από οκτώ χαρακτήρες.)

47. Εστω ότι σε κάποιο μελλοντικό χρόνο κάθε τηλέφωνο του κόσμου θα έχει αριθμό που περιέχει κώδικα χώρας με μήκος 1 μέχρι 3 ψηφία, δηλαδή θα έχει την μορφή X, XX, ή XXX, ακολουθούμενο από τηλεφωνικό αριθμό με δέκα ψηφία με την μορφή NXX-NXX-XXXX (όπως περιγράφεται στο Παράδειγμα 7). Πόσοι διαφορετικοί τηλεφωνικοί αριθμοί θα μπορούσαν να υπάρχουν παγκόσμια σύμφωνα με αυτό το σχέδιο αριθμοδότησης;

48. Με χρήση δενδρικού διαγράμματος να βρεθεί το πλήθος των συμβολοσειρών bit με μήκος τέσσερα που δεν έχουν τρία διαδοχικά 0;

49. Πόσοι τρόποι διάταξης των γραμμάτων a, b, c, και d υπάρχουν έτσι ώστε το a να μην ακολουθείται αμέσως από το b;

50. Με χρήση δενδριτικού διαγράμματος να βρεθεί το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να διεξαχθεί ένα πρωτάθλημα, όπου πρωταθλήτρια θα είναι η πρώτη ομάδα που θα κερδίσει τέσσερεις αγώνες στους επτά.

51. Με χρήση δενδρικού διαγράμματος να προσδιοριστεί το πλήθος των υποσυνόλων του $\{3, 7, 9, 11, 24\}$ με την ιδιότητα το άθροισμα των στοιχείων στο υποσύνολο να είναι μικρότερο από 28.

52. **a)** Εστω ότι ένα κατάστημα πουλάει έξη ποικιλίες αναψυκτικών: κόλα, τζίντζερ, πορτοκαλάδα, μπύρα, λεμονάδα, και σόδα. Με χρήση δενδρικού διαγράμματος να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών ειδών φιαλών που θα πρέπει να έχει στην αποθήκη του το κατάστημα, έτσι ώστε να έχει όλες τις διαθέσιμες ποικιλίες σε φιάλες όλων των μεγεθών, αν όλες οι ποικιλίες υπάρχουν σε φιάλες των 330 γρ., όλες εκτός από την λεμονάδα υπάρχουν σε φιάλες των 500 γρ., μόνο η κόλα και το τζίντζερ υπάρχουν σε φιάλες των 1000 γρ., και όλες εκτός από την λεμονάδα και την σόδα υπάρχουν σε φιάλες των 2000 γρ.

b) Να απαντηθεί η ερώτηση του (a) με χρήση κανόνων απαρίθμησης.

53. **a)** Εστω ότι ένα δημοφιλές είδος αθλητικού υποδήματος υπάρχει και σε ανδρικό και σε γυναικείο. Το γυναικείο υπάρχει σε μεγέθη 6, 7, 8, και 9, και το ανδρικό σε μεγέθη 8, 9, 10, 11, και 12. Το ανδρικό υπάρχει σε άσπρο και μαύρο, ενώ το γυναικείο σε άσπρο, κόκκινο και μαύρο. Με χρήση δενδρικού διαγράμματος να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών υποδημάτων που θα πρέπει το κατάστημα να έχει στην αποθήκη του για να έχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι αυτού του αθλητικού υποδήματος σε όλα τα διαθέσιμα μεγέθη και χρώματα για ανδρικά και γυναικεία.

b) Να απαντηθεί η ερώτηση του (a) με χρήση κανόνων απαρίθμησης.

***54.** Με χρήση του κανόνα γινομένου να δειχτεί ότι υπάρχουν 2^{2^n} διαφορετικοί πίνακες αληθείας για προτάσεις με n μεταβλητές.

55. Με μαθηματική επαγωγή να αποδειχτεί ο κανόνας αθροίσματος για m εργασίες από τον κανόνα αθροίσματος για δύο εργασίες.

56. Με μαθηματική επαγωγή να αποδειχτεί ο κανόνας γινομένου για m εργασίες από τον κανόνα γινομένου για δύο εργασίες.

57. Πόσες διαγωνίους έχει κυρτό πολύγωνο με n πλευρές; (Ένα πολύγωνο είναι κυρτό αν κάθε τμήμα ευθείας που συνδέει δύο σημεία στο εσωτερικό ή στο σύνορο του πολυγώνου βρίσκεται πλήρως μέσα στο σύνολο αυτό.)

58. Τα δεδομένα μεταδίδονται στο Internet με **datagram** που είναι δομημένες ομάδες bit. Κάθε datagram περιέχει πληροφορίες επικεφαλίδας οργανωμένες σε κατά μέγιστο 14 διαφορετικά πεδία (όπου καθορίζονται πολλά πράγματα, όπως οι διευθύνσεις πηγής και προορισμού) και σε μια περιοχή δεδομένων που περιέχει τις πληροφορίες που πρόκειται να μεταδοθούν. Ενα από τα 14 πεδία επικεφαλίδας είναι το **πεδίο μήκους επικεφαλίδας** (που συμβολίζεται με HLEN), το οποίο από το πρωτόκολλο καθορίζεται ότι έχει μήκος 4 bit και που καθορίζει το μήκος επικεφαλίδας σε σχέση με ομάδες bit των 32 bit. Για παράδειγμα, αν HLEN = 0110, η επικεφαλίδα θα αποτελείται από έξη ομάδες των 32 bit. Ενα άλλο από τα 14 πεδία επικεφαλίδας είναι το **πεδίο συνολικού μήκους** (που συμβολίζεται με TOTAL LENGTH) μήκους 16 bit, το οποίο καθορίζει το μήκος σε bit ολόκληρου του datagram, μαζί με τα πεδία επικεφαλίδας και την περιοχή δεδομένων. Το μήκος της περιοχής δεδομένων είναι το συνολικό μήκος του datagram μείον το μήκος της επικεφαλίδας.

a) Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του TOTAL LENGTH (που έχει μήκος 16 bit) προσδιορίζει το μέγιστο συνολικό μήκος σε οκτάδες (ομάδες των 8 bit) ενός datagram στο Internet. Ποιά είναι αυτή η τιμή;

b) Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του HLEN (που έχει μήκος 4 bit) προσδιορίζει το μέγιστο συνολικό μήκος επικεφαλίδας σε ομάδες των 32 bit. Ποιά είναι αυτή η τιμή; Ποιό είναι το μέγιστο συνολικό μήκος επικεφαλίδας σε οκτάδες;

c) Το ελάχιστο (και συνηθέστερο) μήκος επικεφαλίδας είναι 20 οκτάδες. Ποιό είναι το μέγιστο συνολικό μήκος σε οκτάδες της περιοχής δεδομένων σε ένα datagram του Internet;

d) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές οκτάδων στην περιοχή δεδομένων μπορούν να μεταδοθούν αν το μήκος επικεφαλίδας είναι 20 οκτάδες και το συνολικό μήκος έχει όσο το δυνατό μεγαλύτερο μήκος;

4.2 Η Αρχή του Περιστερώνα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εστω ότι ένα κοπάδι περιστεριών πετά σε ένα σύνολο από φωλιές για να φωλιάσει. Η αρχή του περιστερώνα αναφέρει ότι αν υπάρχουν περισσότερα περιστέρια από φωλιές, τότε θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια φωλιά με τουλάχιστο δύο περιστέρια (βλ. Σχήμα 1). Βέβαια, αυτή η αρχή εφαρμόζεται και σε άλλα αντικείμενα εκτός από περιστέρια και περιστερώνες.

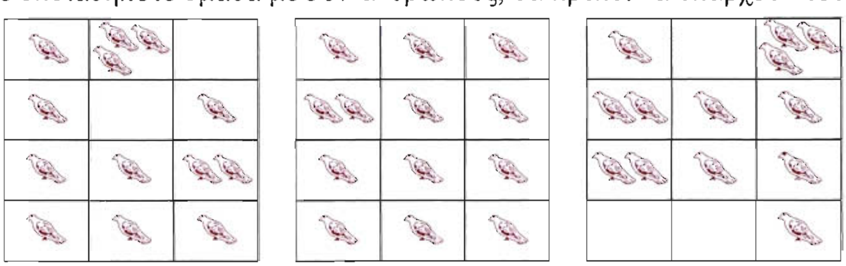
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ** Αν $k + 1$ ή περισσότερα αντικείμενα τοποθετηθούν μέσα σε k κουτιά, τότε τουλάχιστο ένα κουτί θα περιέχει δύο ή περισσότερα από τα αντικείμενα.

Απόδειξη: Εστω ότι κανένα από τα k κουτιά δεν περιέχει περισσότερα από ένα αντικείμενα. Τότε το συνολικό πλήθος των αντικειμένων θα είναι το πολύ k. Το γεγονός αυτό αποτελεί αντίφαση, επειδή υπάρχουν τουλάχιστον $k + 1$ αντικείμενα.

Η αρχή της φωλιάς περιστεριών ονομάζεται και **αρχή συρταριού του Dirichlet**, από τον Γερμανό μαθηματικό του δέκατου έννατου αιώνα Dirichlet, που συχνά χρησιμοποιούσε αυτή την αρχή στις εργασίες του. Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται η αρχή του περιστερώνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε οποιαδήποτε ομάδα με 367 ανθρώπους, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχι-



(a) (b) (c)

ΣΧΗΜΑ 1 Υπάρχουν Περισσότερα Περιστέρια από Περιστερώνες.

G. LEJEUNE DIRICHLET (1805 - 1859) Ο G. Lejeune Dirichlet γεννήθηκε από Γαλλική οικογένεια που ζούσε κοντά στην Κολωνία της Γερμανίας. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού και είχε θέσεις στα Πανεπιστήμια του Breslau και του Βερολίνου. Το 1855 επελέγη να διαδεχτεί τον Gauss στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Λέγεται ότι ο Dirichlet ήταν ο πρώτος άνθρωπος που έμαθε το *Disquisitiones Arithmeticae* του Gauss, που είχε εμφανιστεί πριν από 20 χρόνια. Λέγεται ότι πάντοτε είχε ένα αντίγραφο δίπλα του ακόμη και όταν ταξίδευε. Ο Dirichlet έκανε πολλές σημαντικές ανακαλύψεις στην θεωρία αριθμών, μαζί με το θεώρημα ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί σε αριθμητικές προόδους $an + b$ όταν οι a και b είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί. Απέδειξε την περίπτωση για $n = 5$ του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν μη προφανείς λύσεις με ακέραιους στην $x^5+y^5=z^5$. Ο Dirichlet έκανε και πολλές συνεισφορές στην μαθηματική ανάλυση.