4.3 Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εστω ότι μια ομάδα τέννις έχει δέκα μέλη. Ο προπονητής πρέπει να επιλέξει πέντε παίκτες για να πάνε σε έναν αγώνα σε άλλο σχολείο. Επιπλέον, ο προπονητής πρέπει να ετοιμάσει μία ταξινομημένη λίστα τεσσάρων παικτών που θα παίξουν στους τέσσερεις μονούς αγώνες. Στην παράγραφο αυτή, θα αναπτύξουμε μεθόδους απαρίθμησης των διαφορετικών αδιάτακτων συλλογών των πέντε παικτών που έχουν επιλεγεί για να πάνε στο άλλο σχολείο και τις διαφορετικές λίστες των τεσσάρων παικτών που θα παίξουν στους τέσσερεις μονούς αγώνες. Γενικότερα, θα παρουσιάσουμε τεχνικές απαρίθμησης των αδιάτακτων συλλογών ξεχωριστών αντικειμένων και τις διατεταγμένες διατάξεις αντικειμένων πεπερασμένου συνόλου.

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Μετάθεση ενός συνόλου διακεκριμένων αντικειμένων είναι μία διατεταγμένη τοποθέτηση αυτών των αντικειμένων. Ενδιαφερόμαστε και σε διατεταγμένες διαρυθμίσεις κάποιων από τα στοιχεία του συνόλου. Διατεταγμένη τοποθέτηση r στοιχείων συνόλου ονομάζεται **μετάθεση r**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Εστω ότι $S = \{1, 2, 3\}$. Η διάταξη 3, 1, 2 είναι μετάθεση του S. Η διάταξη 3, 2 είναι μετάθεση 2 του S.

Το πλήθος των μεταθέσεων r συνόλου με n στοιχεία συμβολίζεται με $P(n, r)$. Μπορούμε να βρούμε το $P(n, r)$ με χρήση του κανόνα γινομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Το πλήθος των μεταθέσεων r συνόλου με n ξεχωριστά στοιχεία είναι

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Απόδειξη: Το πρώτο στοιχείο της μετάθεσης μπορεί να επιλεγεί με n τρόπους, επειδή στο σύνολο υπάρχουν n στοιχεία. Υπάρχουν $n-1$ τρόποι επιλογής του δεύτερου στοιχείου της μετάθεσης, επειδή στο σύνολο έχουν μείνει $n-1$ στοιχεία μετά την χρήση του στοιχείου που έχει επιλεγεί για την πρώτη θέση. Με παρόμοιο τρόπο, υπάρχουν $n-2$ τρόποι επιλογής του τρίτου στοιχείου, κ.ο.κ., μέχρι να υπάρχουν $n - (r-1) = n = r + 1$ τρόποι επιλογής του στοιχείου τάξης r. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, υπάρχουν

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

μεταθέσεις r του συνόλου.

Από το Θεώρημα 1 έπεται ότι

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι $P(n, n) = n!$. Θα δείξουμε αυτό το αποτέλεσμα με μερικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή πρώτου νικητή, δεύτερου νικητή, και τρίτου νικητή από 100 διαφορετικούς ανθρώπους που συμμετέχουν σε διαγωνισμό;

Λύση: Επειδή έχει σημασία το ποιός θα κερδίσει τον διαγωνισμό, το πλήθος των τρόπων επιλογής των τριών πρώτων νικητών είναι το πλήθος των διατεταγμένων επιλογών τριών στοιχείων από σύνολο 100 στοιχείων, δηλαδή, το πλήθος των μεταθέσεων 3 συνόλου 100 στοιχείων. Κατά συνέπεια, η απάντηση είναι

$$P(100,3) = 100\cdot 99\cdot 98 = 970.200\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Εστω ότι σε αγώνα δρόμου συμμετέχουν οκτώ δρομείς. Ο νικητής παίρνει χρυσό μετάλλιο, ο δεύτερος παίρνει αργυρό μετάλλιο, και ο τρίτος παίρνει χάλκινο μετάλλιο. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι απονομής των μεταλλίων υπάρχουν, αν μπορούν να εμφανιστούν όλα τα δυνατά αποτελέσματα και αν δεν υπάρχουν ισοπαλίες;

Λύση: Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων απονομής των μεταλλίων είναι το πλήθος των μεταθέσεων 3 συνόλου με οκτώ στοιχεία. Συνεπώς, υπάρχουν $P(8, 3) = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$ δυνατοί τρόποι απονομής των μεταλλίων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Εστω ότι μια πωλήτρια πρέπει να επισκεφθεί οκτώ διαφορετικές πόλεις. Πρέπει να ξεκινήσει από συγκεκριμένη πόλη, αλλά μπορεί να επισκεφθεί τις άλλες επτά πόλεις με όποια σειρά θέλει. Πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να χρησιμοποιήσει η πωλήτρια κατά την επίσκεψή της στις πόλεις;

Λύση: Το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών μεταξύ των πόλεων είναι το πλήθος των μεταθέσεων των επτά στοιχείων, επειδή η πρώτη πόλη είναι καθορισμένη, αλλά οι υπόλοιπες επτά μπορούν να διαταχθούν με αυθαίρετο τρόπο. Κατά συνέπεια, η πωλήτρια έχει να επιλέξει $7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$ τρόπους για το ταξίδι της. Αν, για παράδειγμα, η πωλήτρια θα θέλει να βρει την συνολική διαδρομή με την ελάχιστη απόσταση, και να υπολογίσει την συνολική απόσταση για κάθε δυνατή διαδρομή, θα πρέπει να εξετάσει συνολικά 5040 διαδρομές!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων *ABCDEFGH* περιέχουν την συμβολοσειρά *ABC*;

Λύση: Επειδή τα γράμματα *ABC* πρέπει να εμφανίζονται σαν ομάδα, μπορούμε να βρούμε την απάντηση με εύρεση του πλήθους των μεταθέσεων έξη αντικειμένων, δηλαδή της ομάδας *ABC* και των ξεχωριστών γραμμάτων *D*, *E*, *F*, *G*, και *H*. Επειδή αυτά τα έξη αντικείμενα μπορούν να εμφανίζονται με οποιαδήποτε σειρά, υπάρχουν $6! = 720$ μεταθέσεις των γραμμάτων *ABCDEFGH* με τις οποίες τα γράμματα *ABC* εμφανίζονται σαν ομάδα.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Συνδυασμός r στοιχείων συνόλου είναι μία αδιάτακτη επιλογή r στοιχείων του συνόλου. Ετσι, ο συνδυασμός (ανά) r είναι απλά ένα υποσύνολο του συνόλου με r στοιχεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Εστω ότι S είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$. Τότε το $\{1, 3, 4\}$ είναι συνδυασμός 3 από το S.

Το πλήθος των συνδυασμών r συνόλου με n ξεχωριστά στοιχεία συμβολίζεται με $C(n, r)$. Σημειώνουμε ότι το $C(n, r)$ συμβολίζεται και με $\binom{n}{r}$ και ονομάζεται **διωνυμικός συντελεστής**. Στην Παράγραφο 4.4 θα μάθουμε από που προέρχεται αυτή η ονομασία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Βλέπουμε ότι $C(4, 2) = 6$ επειδή οι συνδυασμοί 2 του $\{a, b, c, d\}$ είναι τα έξη υποσύνολα $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, και $\{c, d\}$.

Μπορούμε να καθορίσουμε το πλήθος των συνδυασμών r συνόλου με n στοιχεία με χρήση του τύπου για το πλήθος των μεταθέσεων r συνόλου. Για να γίνει αυτό, παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε τις μεταθέσεις r συνόλου πρώτα με σχηματισμό των συνδυασμών r και ύστερα με διάταξη των στοιχείων με αυτούς τους συνδυασμούς. Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος, που δίνει την τιμή του $C(n, r)$ βασίζεται στην παρατήρηση αυτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Το πλήθος των συνδυασμών r συνόλου με n στοιχεία, όπου ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος και ο r ακέραιος με $0 \le r \le n$, είναι ίσο με

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Απόδειξη: Οι μεταθέσεις r του συνόλου λαμβάνονται με τον σχηματισμό των $C(n, r)$ συνδυασμών r του συνόλου, και ύστερα με τοποθέτηση σε σειρά των στοιχείων σε κάθε συνδυασμό r, γεγονός που πραγματοποιείται με $P(r, r)$ τρόπους. Κατά συνέπεια,

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Παρατήρηση: Ο τύπος του Θεωρήματος 2, αν και είναι σαφής, δεν βοηθάει όταν ο $C(n, r)$ υπολογίζεται για μεγάλες τιμές των n και r. Αιτίες είναι ότι είναι πρακτικό να υπολογίζονται ακριβείς τιμές των παραγοντικών μόνο για μικρές ακέραιες τιμές, ενώ όταν χρησιμοποιείται αριθμητική κινητής υποδιαστολής, ο τύπος του Θεωρήματος 2 ίσως δώσει τιμή που δεν είναι ακέραιος αριθμός. Στην πράξη, για να υπολογίσουμε το $C(n, r)$ απαλείφουμε όλες τις τιμές στον μεγαλύτερο παραγοντικό του παρονομαστή από τον αριθμητή και από τον παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους που δεν απαλείφονται στον αριθμητή και ύστερα διαιρούμε δια του μικρότερου παραγοντικού στον παρονομαστή. Πολλές αριθμομηχανές έχουν ενσωματωμένη λειτουργία υπολογισμού του $C(n, r)$.

Το Λήμμα 1 δίνει μια χρήσιμη ταυτότητα για το πλήθος των συνδυασμών r συνόλου.

ΛΗΜΜΑ 1 Εστω ότι οι n και r είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $r \leq n$. Τότε $C(n, r)=C(n, n-r)$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 2 έπεται ότι

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

και

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Κατά συνέπεια, $C(n,r) = C(n,n-r)$

Μπορούμε να αποδείξουμε το Λήμμα 1 και με μια απόδειξη που δείχνει ότι και τα δύο μέλη της εξίσωσης του Λήμματος 1 απαριθμούν τα ίδια αντικείμενα με χρήση διαφορετικών λογικών συμπερασμάτων. Στον Ορισμό 1 περιγράφουμε αυτό το σημαντικό είδος απόδειξης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Συνδυαστική απόδειξη* είναι η απόδειξη που χρησιμοποιεί λογικά συμπεράσματα απαρίθμησης, αντί για κάποια άλλη μέθοδο, όπως αλγεβρικές τεχνικές, για να αποδεικνύει θεώρημα.

Πολλές ταυτότητες με διωνυμικούς συντελεστές αποδεικνύονται με συνδυαστικές αποδείξεις. Μια ταυτότητα αποδεικνύεται με συνδυαστική απόδειξη αν μπορεί να δειχτεί ότι τα δύο μέλη της ταυτότητας απαριθμούν τα ίδια στοιχεία, αλλά με διαφορετικούς τρόπους. Θα δώσουμε, τώρα, μια συνδυαστική απόδειξη του Λήμματος 1.

Απόδειξη: Εστω ότι S είναι σύνολο με n στοιχεία. Κάθε υποσύνολο A του S με r στοιχεία αντιστοιχεί σε υποσύνολο του S με $n-r$ στοιχεία, δηλαδή $\overline{A}$. Κατά συνέπεια, $C(n,r)=C(n,n-r)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή πέντε παικτών από ομάδα τέννις με 10 μέλη για να πάνε σε άλλο σχολείο για αγώνες;

Λύση: Η απάντηση δίνεται από το πλήθος των συνδυασμών 5 συνόλου με δέκα στοιχεία. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, το πλήθος αυτών των συνδυασμών θα είναι

$$C(10,5)=\frac{10!}{5!5!}=252$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Για την αποστολή ανθρώπου στον Αρη έχουν εκπαιδευτεί 30 άτομα σαν αστροναύτες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να επιλεγεί πλήρωμα με έξη άτομα για την αποστολή αυτή (αν θεωρήσουμε ότι όλα τα μέλη του πληρώματος έχουν τα ίδια καθήκοντα);

Λύση: Το πλήθος των τρόπων επιλογής πληρώματος έξη ατόμων από σύνολο 30 ατόμων είναι το πλήθος των συνδυασμών 6 συνόλου με 30 στοιχεία, επειδή δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία επιλέγονται αυτοί οι άνθρωποι. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, το πλήθος αυτών των συνδυασμών θα είναι

$$C(30,6)=\frac{30!}{6!24!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=593.775$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος n περιέχουν r μονάδες (1);

Λύση: Οι θέσεις r 1 σε συμβολοσειρά bit με μήκος n σχηματίζουν συνδυασμό r του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Συνεπώς, θα υπάρχουν $C(n, r)$ συμβολοσειρές bit με μήκος n που περιέχουν ακριβώς r 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Πόσοι τρόπο υπάρχουν για επιλογή επιτροπής για την ανάπτυξη μαθήματος διακριτών μαθηματικών σε σχολείο, αν η επιτροπή θα αποτελείται από τρία μέλη του προσωπικού από τον τομέα μαθηματικών και τέσσερα μέλη από τον τομέα επιστήμης υπολογιστών, αν υπάρχουν εννέα μέλη προσωπικού στον τομέα μαθηματικών και 11 στον τομέα επιστήμης υπολογιστών;

Λύση: Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου, η απάντηση θα είναι το γινόμενο του πλήθους των συνδυασμών 3 συνόλου με εννέα μέλη και του πλήθους των συνδυασμών 4 συνόλου με 11 μέλη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, το πλήθος των τρόπων επιλογής της επιτροπής θα είναι

$$C(9,3)\cdot C(11,4)=\frac{9!}{3!6!}\cdot\frac{11!}{4!7!}=84\cdot 330=27.720.$$

Ασκήσεις

1. Να καταγραφούν όλες οι μεταθέσεις των $\{a, b, c\}$.

2. Πόσες μεταθέσεις υπάρχουν στο σύνολο $\{a, b, c, d, e, f, g\}$;

3. Πόσες μεταθέσεις του $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ τελειώνουν με a;

4. Εστω ότι $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

a) Να καταγραφούν όλες οι μεταθέσεις 3 του S.

b) Να καταγραφούν όλοι οι συνδυασμοί 3 του S.

5. Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω ποσοτήτων.

a) $P(6, 3)$ **b)** P(6, 5) **c)** $P(8, 1)$ **d)** $P(8, 5)$ **e)** $P(8, 8)$ **f)** $P(10, 9)$

6. Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω ποσοτήτων.

a) $C(5, 1)$ **b)** $C(5, 3)$ **c)** $C(8, 4)$ **d)** $C(8, 8)$ **e)** $C(8, 1)$ **f)** $C(12, 6)$

7. Να βρεθεί το πλήθος των μεταθέσεων 5 συνόλου με εννέα στοιχεία.

8. Με πόσες διαφορετικές κατατάξεις μπορούν να τερματίσουν έναν αγώνα δρόμου πέντε δρομείς αν δεν επιτρέπονται ισοπαλίες;

9. Πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη θέση σε αγώνα ιππόδρομου με 12 άλογα αν είναι δυνατές όλες οι σειρές τερματισμού;

10. Για την θέση του Κυβερνήτη σε Πολιτεία των ΗΠΑ υπάρχουν έξη διαφορετικοί υποψήφιοι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τυπωθούν στο ψηφοδέλτιο τα ονόματα των υποψήφιων;

11. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος δέκα περιέχουν

a) τέσσερα 1; **b)** το πολύ τέσσερα 1;

c) τουλάχιστο τέσσερα 1; **d)** ίσο πλήθος 0 και 1;

12. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος δώδεκα περιέχουν

a) μόνο τρία 1; **b)** το πολύ τρία 1;

c) τουλάχιστο τρία 1; **d)** ίσο πλήθος 0 και 1;

13. Μια ομάδα περιέχει n άνδρες και n γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για τοποθέτηση αυτών των ανθρώπων σε γραμμής αν εναλλάσσονται άνδρες και γυναίκες;

14. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί σύνολο δύο θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι από 100;

15. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί σύνολο πέντε γραμμάτων από το Λατινικό αλφάβητο;

16. Πόσα υποσύνολα με περιττό πλήθος στοιχείων έχει σύνολο με δέκα στοιχεία;

17. Πόσα υποσύνολα με περισσότερα από δύο στοιχεία έχει σύνολο με 100 στοιχεία;

18. Ενα νόμισμα πετάγεται οκτώ φορές, στις οποίες το αποτέλεσμα είναι κορώνα ή γράμματα. Πόσα δυνατά αποτελέσματα

a) υπάρχουν συνολικά; **b)** περιέχουν τρεις κορώνες;

c) περιέχουν τουλάχιστον τρεις κορώνες;

d) περιέχουν το ίδιο πλήθος από κορώνες και γράμματα;

19. Ενα νόμισμα πετάγεται οκτώ φορές στις οποίες το αποτέλεσμα είναι κορώνα ή γράμματα. Πόσα δυνατά αποτελέσματα

a) υπάρχουν συνολικά;

b) περιέχουν δύο κορώνες

c) περιέχουν το πολύ δύο κορώνες

d) περιέχουν το ίδιο πλήθος από κορώνες και γράμματα;

20. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος δέκα έχουν

a) τρία 0; **b)** περισσότερα 0 από 1;

c) τουλάχιστον επτά 1; **d)** τουλάχιστον τρία 1;

21. Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων *ABCDEFG* περιέχουν

a) την συμβολοσειρά *BCD*; **b)** την συμβολοσειρά *CFGA*;

c) τις συμβολοσειρές *BA* και *GF*; **d)** τις συμβολοσειρές *ABC* και *DE*;

e) τις συμβολοσειρές *ABC* και *CDE*; **f)** τις συμβολοσειρές *CBA* και *BED*;

22. Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων *ABCDEFGH* περιέχουν

a) την συμβολοσειρά *ED*; **b)** την συμβολοσειρά *CDE*;

c) τις συμβολοσειρές *BA* και *FGH*; **d)** τις συμβολοσειρές *AB*, *DE*, και *GH*;

e) τις συμβολοσειρές *CAB* και *BED*; **f)** τις συμβολοσειρές *BCA* και *ABF*;

23. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για οκτώ άνδρες και πέντε γυναίκες να στέκονται σε σειρά έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο γυναίκες σε διαδοχικές θέσεις; (*Υπόδειξη:* Πρώτα τοποθετούμε τους άνδρες και ύστερα εξετάζουμε τις δυνατές θέσεις για τις γυναίκες.)

24. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για δέκα γυναίκες και έξη άνδρες να στέκονται σε γραμμή έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο άνδρες σε διαδοχικές θέσεις; (*Υπόδειξη:* Πρώτα τοποθετούμε τις γυναίκες και ύστερα εξετάζουμε τις δυνατές θέσεις για τους άνδρες.)

25. Πωλούνται εκατό λαχνοί για κλήρωση, με απαρίθμηση 1, 2, 3, . . . , 100, σε 100 διαφορετικούς ανθρώπους. Υπάρχουν τέσσερεις τυχεροί αριθμοί, μαζί με τον μεγάλο λαχνό (ένα ταξίδι στην Ταϊτή). Πόσοι τρόποι κλήρωσης υπάρχουν αν

a) δεν υπάρχουν περιορισμοί;

b) αυτός που έχει τον αριθμό 47 κερδίζει τον μεγάλο λαχνό;

c) αυτός που έχει τον αριθμό 47 κερδίζει έναν από τους τυχερούς λαχνούς;

d) αυτός που έχει τον αριθμό 47 δεν κερδίζει τίποτα;

e) αυτοί που έχουν τους αριθμούς 19 και 47 κερδίζουν και οι δύο από έναν λαχνό;

f) αυτοί που έχουν τους αριθμούς 19, 47 και 73 κερδίζουν και οι τρεις από έναν λαχνό;

g) αυτοί που έχουν τους αριθμούς 19, 47, 73 και 97 κερδίζουν όλοι από έναν λαχνό;

h) κανένας από αυτούς που έχουν τους αριθμούς 19, 47, 73 και 97 δεν κερδίζει τίποτα;

i) αυτός που κερδίζει τον πρώτο λαχνό είναι ένας από αυτούς που έχουν τους αριθμούς 19, 47, 73 ή 97.

j) αυτοί που έχουν τους αριθμούς 19 και 47 κερδίζουν και οι δύο από έναν λαχνό, αλλά αυτοί που έχουν τους αριθμούς 73 και 97 δεν κερδίζουν τίποτα ;

26. Για ένα αγώνα ομάδας σοφτμπολ, η οποία έχει δέκα άτομα, εμφανίζονται δέκα τρία άτομα.

a) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή 10 παικτών για την ομάδα;

b) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για ανάθεση των δέκα θέσεων με επιλογή παικτών από τα 13 άτομα που εμφανίστηκαν;

c) Από τα 13 άτομα που εμφανίζονται, τα τρία είναι γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή δέκα παικτών για την ομάδα αν τουλάχιστο ένας από αυτούς τους παίκτες πρέπει να είναι γυναίκα;

27. Ενας σύλλογος έχει 25 μέλη.

a) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή τεσσάρων μελών του συλλόγου για την εκτελεστική επιτροπή;

b) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή προέδρου, αντιπροέδρου, γραμματέα και ταμία του συλλόγου;

28. Ενας καθηγητής ετοιμάζει 40 ερωτήσεις "σωστό/λάθος" διακριτών μαθηματικών. Από τις δηλώσεις αυτών των ερωτήσεων, οι 17 είναι αληθείς. Αν οι ερωτήσεις μπορούν να τοποθετηθούν με οποιαδήποτε σειρά, πόσα διαφορετικά σύνολα λύσεων είναι δυνατά;

29. Πόσες μεταθέσεις 4 των θετικών ακέραιων που δεν είναι μεγαλύτεροι από 100 περιέχουν τρείς διαδοχικούς ακέραιους με την σωστή σειρά

a) όπου διαδοχικοί σημαίνει με την συνηθισμένη σειρά των ακέραιων και όπου αυτοί οι διαδοχικοί ακέραιοι ίσως χωρίζονται από άλλους ακέραιους στην μετάθεση;

b) όπου διαδοχικοί σημαίνει και ότι οι αριθμοί είναι διαδοχικοί ακέραιοι και ότι βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις στην μετάθεση;

30. Επτά γυναίκες και εννέα άνδρες βρίσκονται στο προσωπικό του τομέα μαθηματικών σε σχολείο.

a) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή επιτροπής πέντε ατόμων του τομέα αν στην επιτροπή θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστο μια γυναίκα;

b) Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή επιτροπής πέντε ατόμων του τομέα αν στην επιτροπή θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστο μια γυναίκα και τουλάχιστον ένας άνδρας;

31. Το Λατινικό αλφάβητο περιέχει 21 σύμφωνα και πέντε φωνήεντα. Πόσες συμβολοσειρές έξη πεζών γραμμάτων του Λατινικού αλφάβητου θα περιέχουν
a) μόνο ένα φωνήεντο; **b)** μόνο δύο φωνήεντα;
c) τουλάχιστον ένα φωνήεντο; **d)** τουλάχιστον δύο φωνήεντα;

32. Πόσες συμβολοσειρές έξη πεζών γραμμάτων του Λατινικού αλφάβητου θα περιέχουν
a) το γράμμα *a*; **b)** τα γράμματα *a* και *b*;
c) τα γράμματα *a* και *b* σε διαδοχικές θέσεις με το *a* πριν από το *b*, με όλα τα γράμματα διακεκριμένα;
d) τα γράμματα *a* και *b*, όπου το *a* θα βρίσκεται κάπου στα αριστερά του *b* στην συμβολοσειρά, με όλα τα γράμματα διακεκριμένα;

33. Εστω ότι ένας τομέας σχολής έχει δέκα άνδρες και 15 γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για σχηματισμό επιτροπής με έξη μέλη αν θα πρέπει να έχει το ίδιο πλήθος ανδρών και γυναικών;

34. Εστω ότι ένας τομέας σχολής έχει δέκα άνδρες και 15 γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για σχηματισμό επιτροπής με έξη μέλη, αν θα πρέπει να έχει περισσότερες γυναίκες από άνδρες;

35. Πόσες συμβολοσειρές bit περιέχουν ακριβώς οκτώ 0 και δέκα 1, αν κάθε 0 θα πρέπει να ακολουθείται από 1;

36. Πόσες συμβολοσειρές bit περιέχουν ακριβώς πέντε 0 και δέκα τέσσερα 1, αν κάθε 0 θα πρέπει να ακολουθείται από δύο 1;

37. Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος δέκα περιέχουν τουλάχιστον τρία 1 και τουλάχιστον τρία 0;

38. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για επιλογή 12 χωρών στα Ηνωμένα Εθνη για ένα συμβούλιο, αν τα 3 μέλη επιλέγονται από μια ομάδα 45 κρατών, τα 4 μέλη επιλέγονται από μια ομάδα 57 κρατών, και τα άλλα μέλη επιλέγονται από τις υπόλοιπες 69 χώρες;

39. Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας με τρία γράμματα που ακολουθούνται από τρία ψηφία δεν περιέχουν γράμμα ή ψηφίο δύο φορές;

40. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για τοποθέτηση έξη ανθρώπων σε κυκλικό τραπέζι, όπου οι θέσεις θεωρούνται ίδιες αν λαμβάνονται η μια από την άλλη με περιστροφή του τραπεζιού;

41. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να τελειώσει αγώνας ιπποδρομίας με τρία άλογα αν είναι δυνατές οι ισοπαλίες; (*Σημείωση:* Είναι δυνατή ισοπαλία με δύο ή τρία άλογα.)

***42.** Πόσοι τρόποι υπάρχουν να τελειώσει αγώνας ιπποδρομίας με τέσσερα άλογα αν είναι δυνατές και ισοπαλίες; (*Σημείωση:* Είναι δυνατή ισοπαλία με οποιαδήποτε από τα τέσσερα άλογα.)

***43.** Σε αγώνα δρόμου 100 μέτρων υπάρχουν έξη δρομείς. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να απονεμηθούν τρία μετάλλια αν είναι δυνατές και ισοπαλίες; (Ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν με τον μικρότερο χρόνο παίρνουν χρυσά μετάλλια, ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν με ένα δρομέα πριν από αυτούς παίρνουν αργυρά μετάλλια, και ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν με δύο δρομείς πριν από αυτούς παίρνουν χάλκινα μετάλλια.)

***44.** Η παρακάτω διαδικασία χρησιμοποιείται στις ισοπαλίες των πρωταθλημάτων ποδοσφαίρου για το Παγκόσμιο Κύπελλο. Κάθε ομάδα επιλέγει πέντε παίκτες με προκαθορισμένη σειρά. Καθένας από τους παίκτες αυτούς χτυπά από ένα πέναλτυ, με παίκτη της πρώτης ομάδας να ακολουθείται από παίκτη της δεύτερης ομάδας, κ.ο.κ., με την καθορισμένη σειρά παικτών. Αν στο τέλος των δέκα πέναλτυ το αποτέλεσμα εξακολουθεί να είναι ισοπαλία, επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία. Αν μετά από τα 20 χτυπήματα πέναλτυ εξακολουθεί η ισοπαλία, ακολουθείται η διαδικασία του "ξαφνικού θανάτου", όπου κερδίζει η πρώτη ομάδα που θα επιτύχει τέρμα μετά από αποτυχία τέρματος της άλλης.

a) Πόσα διαφορετικά σενάρια υπάρχουν για επιτυχία τέρματος, αν το παιχνίδι τελειώσει στον πρώτο γύρο των δέκα χτυπημάτων πέναλτυ, όπου το παιχνίδι τελειώνει όταν η μία ομάδα έχει λιγότερα τέρματα από τα τέρματα που πέτυχε η άλλη ομάδα;

b) Πόσα διαφορετικά σενάρια υπάρχουν για επιτυχία τέρματος στην πρώτη και στην δεύτερη ομάδα χτυπημάτων πέναλτυ αν το παιχνίδι τελειώσει στην δεύτερη ομάδα χτυπημάτων πέναλτυ;

c) Πόσα διαφορετικά σενάρια υπάρχουν για επιτυχία τέρματος σε όλα τα χτυπήματα πέναλτυ αν το παιχνίδι τελειώσει με όχι περισσότερα από δέκα επιπλέον χτυπήματα πέναλτυ μετά τους δύο γύρους των πέντε χτυπημάτων πέναλτυ για κάθε ομάδα;

4.4 Διωνυμικοί Συντελεστές

Οπως σημειώσαμε στην Παράγραφο 4.3, το πλήθος των συνδυασμών r από σύνολο με n στοιχεία συχνά συμβολίζεται με $\binom{n}{r}$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται και **διωνυμικός συντελεστής** επειδή οι αριθμοί αυτοί εμφανίζονται σαν συντελεστές στο ανάπτυγμα δυνάμεων των διωνυμικών εκφράσεων όπως η $(a+b)^n$. Θα εξετάσουμε το **Θεώρημα του Διωνύμου**, που δίνει την δύναμη διωνυμικής έκφρασης σαν άθροισμα όρων με διωνυμικούς συντελεστές. Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα με χρήση συνδυαστικής απόδειξης. Θα δείξουμε, ακόμη, και τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι συνδυαστικές αποδείξεις για να δείχνουν κάποιες από τις πολλές διαφορετικές ταυτότητες που εκφράζουν σχέσεις μεταξύ διωνυμικών συντελεστών.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ

Το θεώρημα του διωνύμου δίνει τους συντελεστές του αναπτύγματος δυνάμεων